T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYINDA MANNHEIM EĞRİLERİ ÜZERİNE

Funda KAYMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
HAZİRAN 2016

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYINDA MANNHEIM EĞRİLERİ ÜZERİNE

Funda KAYMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

KIRŞEHİR
HAZİRAN 2016

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof. Dr. Levent KULA

Üye

Yrd. Doç. Dr. Ümit TOKEŞER

Üye

Yrd. Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

28/06/2016

Prof. Dr. Levent KULA

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİMİ

Yüksek lisans tezi olarak hazırladığım Öklid Uzayında Mannheim Eğrileri Üzerine adlı çalışmanın öneri aşamasından sonuçlanmasına kadar geçen süreçte bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle uyduğumu, tez içindeki tüm bilgileri bilimsel ahlak ve gelenek çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu çalışmamda doğrudan veya dolaylı olarak yaptığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu beyan ederim.

Funda KAYMAZ

ÖKLİD UZAYINDA MANNHEIM EĞRİLERİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Funda KAYMAZ

Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Haziran 2016

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmından oluşmaktadır

İkinci bölümde Öklid uzayında eğriler teorisiyle ilgili temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre Mannheim eğrilerinin ve Mannheim eğri çiftlerinin tanımları verilip, bu tip eğrilerin eğrilik ve torsiyonları yardımıyla çeşitli karakterizasyonlarına yer verilmiştir. Ayrıca bazı özel eğrilerin Mannheim eğri ve Mannheim eğri çifti olması durumları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre genelleştirilmiş Mannheim eğrilerinin ve Mannheim eğri çiftlerinin tanımları verilip, eğrilik fonksiyonları yardımıyla bu tip eğrilerin çeşitli karakterizasyonlarına yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Öklid uzayı, Mannheim eğrileri, Mannheim eğri çiftleri, Frenet çatısı, eğrilik fonksiyonları.

Sayfa Adedi : 57

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

NOTES ON MANNHEIM CURVES IN EUCLIDEAN SPACE

(Master's Thesis)

Funda KAYMAZ

Ahi Evran University

Institute of Science

June 2016

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, basic concepts and definitions about curves in the Euclidean space are introduced.

In the third chapter, Mannheim curves and Mannheim partner curves according to Frenet frame in 3-dimensional Euclidean space are defined and the characterizations of such curves are given by means of their curvatures and torsions. Also some special curves which have Mannheim curves and Mannheim partner curves are investigated.

In the fourth chapter , Generalized Mannheim curves and Mannheim partner curves according to Frenet frame in 4-dimensional Euclidean space are defined and the characterizations of such curves are given by means of their curvature functions.

Key Words: Euclidean space, Mannheim curves, Mannheim partner curves, Frenet frame, curvature functions.

Number of Pages: 57

Thesis Advisor: Yrd. Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgilerini benimle paylaşan değerli zamanını ayıran her aşamasında benden yardımlarını esirgemeyen yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ferdağ KAHRAMAN AKSOYAK' a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Bilgi ve tecrübeleriyle bana destek olan sevgili hocalarım Prof. Dr. Levent KULA ve Yrd. Doç. Dr. Bülent ALTUNKAYA' ya teşekkür ederim.

Değerli arkadaşım Büşra İŞERİ KOBAL' a desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında birçok fedakârlıklar göstererek beni destekleyen ve çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme en derin duygularla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

IR	: Reel Sayılar Cümlesi
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
E^3	: 3-boyutlu Öklid uzayı
E^4	: 4-boyutlu Öklid uzayı
$\lVert \quad \rVert$	: Öklid uzayında norm
$\langle\,,\rangle$	: Öklid uzayında iç çarpım
$\times$	: Öklid uzayında vektörel çarpım
κ	: Eğrinin eğriliği
τ	: Eğrinin burulması

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride, en çok çalışılan konulardan biri de eğriler teorisidir. Eğriler teorisinde özellikle geodezikler, çemberler, genel helisler, slant helisler ve rektifiyan eğriler gibi özel eğriler çalışılmaktadır. Öklid uzayında en çok araştırılan problemlerden biri de regüler bir eğrinin karakterizasyonudur. Bu problemin çözümünde κ (eğrinin eğriliği) ve τ (eğrinin burulması) nun önemli bir rolü vardır.

Eğrilerin eğrilikleri ve torsiyonları arasındaki ilişkilerden faydalanarak bazı özel eğriler belirlenebilir. Örneğin; $\kappa = \tau = 0$ ise eğri bir geodeziktir. Eğer κ sıfırdan farklı bir sabit ve $\tau = 0$ ise eğri bir çemberdir. Eğrilik ve torsiyonun her ikisi de sıfırdan farklı sabit ise eğri bir dairesel helistir. Eğer κ ve τ eğrilikleri sabit değil fakat $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sbt}$ ise eğri bir genel helistir. Eğer $\frac{\tau}{\kappa} = as + b$ şeklinde sabitten farklı ve yay parametresine bağlı lineer bir fonksiyon şeklinde yazılabiliyorsa eğri bir rektifiyan eğridir. Ayrıca eğriliği sabit ve torsiyonu değişken olan eğriye Salkowski, eğriliği değişken ve torsiyonu sabit olan eğriye ise anti-Salkowski eğri adı verilir. Bu şekilde 3- boyutlu Öklid uzayında eğrilik ve burulma fonksiyonları yardımıyla bazı özel eğrilerin karakterizasyonları mevcuttur.

Eğriler teorisinde bir başka yaklaşım da iki eğrinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkiyi ele alarak eğrilerin karakterizasyonlarını belirlemektir. Örneğin Γ eğrisinin asli normal doğrultusu Γ_1 eğrisinin asli normal doğrultusu ile çakışır ise Γ eğrisine Bertrand eğri, Γ_1 eğrisine ise Γ eğrisinin Bertrand eğri çifti denir. Eğer iki eğrinin teğetleri birbirine dik ise bu eğrilere involute-evolute eğri çifti adı verilir. Eğer Γ eğrisinin asli normal doğrultusu Γ_1 eğrisinin binormal doğrultusu ile çakışır ise Γ eğrisine Mannheim eğri, Γ_1 eğrisine de Γ eğrisinin Mannheim eğri çifti adı verilir. Bu çalışma, eğri çiftlerinin bir çeşidi olan Mannheim eğrileri ve çiftleriyle ilgilidir.

Mannheim eğrileri ilk olarak 1878 yılında Mannheim tarafından bulunmuştur [1]. 1966 yılında 3-boyutlu Öklid uzayında Riccati denklemleri yardımıyla Mannheim eğrileri ile ilgili olarak bazı teoremler verildi [2]. Son yıllarda Liu ve Wang tarafından 3-boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğri çiftleri ve bu eğri çiftleriyle ilgili bağıntılar çalışıldı [3]. Daha sonraki yıllarda ise Matsuda ve Yorozu tarafından Mannheim eğrileri 4-boyutlu Öklid uzayına genelleştirildi [4].

Bu çalışmada ilk olarak [1] ve [3] nolu çalışmalarda yer alan 3 boyutlu Öklid uzayındaki Mannheim eğrilerinin ve Mannheim eğri çiftlerinin karakterizasyonları verilecek ve bazı özel eğrilerin Mannheim eğrisi ve Mannheim eğri çifti olması durumları incelenecektir. Daha sonra [4] nolu çalışmada yer alan 4-boyutlu Öklid uzayındaki Genelleştirilmiş Mannheim eğrilerinin karakterizasyonlarına yer verilecektir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde eğriler teorisi ile ilgili temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

2.1. ÖKLİD UZAYINDA TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu alt başlıkta, Öklid uzayında eğriler teorisi ile ilgili bazı temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerindeki vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f: A \times A \to V$ fonksiyonu varsa, A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir.

i. $\forall\, P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$
ii. $\forall P \in A$ ve $\alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [5].

Tanım 2.1.2. A bir reel afin uzay ve V ise A ile birleşen bir vektör uzayı olsun. V de;

$$<,>: VXV \to IR$$

$$(x,y) \to < x,y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \begin{cases} x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_i = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına Öklid uzayı denir. $A = IR^n$ (noktalar cümlesi) ve $V = IR^n$(n − boyutlu standart reel vektör uzayı) olarak seçilirse, A standart reel Öklid Uzayı adını alır ve E^n ile gösterilir [5].

Tanım 2.1.3.

$$d\colon\, E^n x E^n \to IR$$

$$(x,y) \quad \to \quad d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve

$d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [5].

Tanım 2.1.4.

$$d : E^n x E^n \to IR$$

$$(x, y) \to d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan *d* fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir [5].

Tanım 2.1.5. n-boyutlu Öklid uzayında $\vec{x} \in E^n$ için *x* vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{< x, x >}$$

biçiminde tanımlanır [5].

Tanım 2.1.6. $I \subseteq IR$ bir açık aralık olmak üzere (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha : I \to E^n$ diferensiyellenebilen fonksiyona E^n de bir eğri adı verilir. Burada $I \subseteq IR$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı, $s \in I$ değişkenine α eğrisinin parametresi denir [5].

Tanım 2.1.7. E^n de bir *M* eğrisi (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$h = \alpha^{-1} o\, \beta : \mathrm{J} \to I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna *M'*nin bir parametre değişimi (*M'*nin I daki parametresinin J deki parametre ile değişimi) denir [5].

Tanım 2.1.8. E^n de bir *M* eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \to E^n$ fonksiyonunun Öklid koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere

$$\alpha'(s) = \left(\frac{d\alpha_1}{ds}, \dots, \frac{d\alpha_n}{ds}\right)$$

dır.

$$\big(\alpha(s), \alpha'(s)\big) \epsilon T_{E^n}(s)$$

teğet vektörüne M eğrisinin $s \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasında (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir [5].

Tanım 2.1.9. E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$\|\alpha'\|: I \rightarrow IR$ fonksiyonuna M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(s)\|$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasındaki skaler hızı denir [5].

Tanım 2.1.10. Eğer $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisine (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri, $s \in I$ parametresine de yay parametresi denir [5].

Tanım 2.1.11. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye

(yani $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$) regüler eğri denir [5].

Tanım 2.1.12. E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\Psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}, k > r$ için;

olmak üzere, $\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$ den elde edilen $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $s \in M$ için $\{e_1(s), e_2(s), \dots, e_r(s)\}$ ye ise $s \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir [5].

Tanım 2.1.13. E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \epsilon I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı $\{e_1(s), e_2(s), \dots, e_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$k_i : I \rightarrow IR, \quad 1 \leq i < r$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle e_i'(s), e_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \epsilon I$ için $k_i(s)$ sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M'nin i-yinci eğriliği denir [5].

Teorem 2.1.1. E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \epsilon I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki M'nin i-yinci eğriliği ve Frenet r-ayaklısı $\{e_1(s), e_2(s), \dots, e_r(s)\}$ olmak üzere

$$i.\ e_1'(s) = k_1(s)\, e_2(s)$$

$$ii.\ e_i'(s) = -k_{i-1}(s)e_{i-1}(s) + k_i(s)e_{i+1}(s),\ \ 1 < i < r$$

$$iii.\ e_r'(s) = -k_{r-1}(s)\, e_{r-1}(s)$$

dir. n = 3 özel halinde, 3-boyutlu Öklid uzayında $\alpha(s)$ noktasında bir M eğrisinin Frenet 3-ayaklı alanı,

$$T = \alpha' \ ,$$

$$N = \frac{1}{\|\alpha''\|}\,\alpha'' \ ,$$

$$B = T \times N \ .$$

Burada 1-inci eğrilik $k_1(s) = \kappa(s)$ değerine sadece eğrilik, 2-nci eğrilik $k_2(s) = \tau(s)$ değerine de burulma (torsiyon) denir. *T, N* ve *B* vektörlerine de, sırasıyla eğrinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı denir. Frenet vektörleri ile türevleri arasındaki ilişki matris formunda aşağıdaki gibi verilebilir [5].

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Tanım 2.1.14. Bir eğrinin teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yaparsa bu eğriye helis eğrisi adı verilir. E^3 de bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart eğrinin burulması ve eğriliği oranı $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$ nın sıfırdan farklı bir sabite eşit olmasıdır [6].

Tanım 2.1.15. E^3 de bir eğrinin rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart eğriliği $\kappa > 0$ ve $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$ oranının yay parametresine bağlı sabit olmayan lineer fonksiyona eşit olmasıdır [6].

Tanım 2.1.16. Bir eğrinin eğriliği sabit ve torsiyonu sabit değilse bu eğriye Salkowski eğri denir [7].

Tanım 2.1.17. Bir eğrinin eğriliği sabit değilse ve torsiyonu sabitse bu eğriye anti-Salkowski eğri denir [8].

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA MANNHEIM EĞRİLERİ VE MANNHEIM EĞRİ ÇİFTLERİ

Tanım 3.1. E^3, standart iç çarpım $<,>$ ile tanımlı 3-boyutlu Öklidyen uzayı olsun. Γ ve Γ_1 uzaysal eğrilerinin karşılıklı noktalarında, Γ eğrisinin asli normal doğrultusu ile Γ_1 eğrisinin binormal doğrultusu çakışıyorsa Γ eğrisine bir Mannheim eğri, Γ_1 eğrisine ise Γ eğrisinin Mannheim eğri çifti adı verilir. $\{\Gamma, \Gamma_1\}$ ikilisine de Mannheim çifti adı verilir [3].

$\Gamma : x(s)$, s yay parametresine bağlı bir Mannheim eğri olsun. $\Gamma : x(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere burada $T(s)$ teğet vektör alanı, $N(s)$ normal vektör alanı, $B(s)$ binormal vektör alanıdır. $\Gamma : x(s)$, Mannheim eğrisinin eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$, burulma fonsiyonu $\tau(s)$ dir [3].

$\Gamma_1 : x_1(s_1)$, s_1 yay parametresine bağlı Γ Mannheim eğrisinin çifti olsun. $\Gamma_1 : x_1(s_1)$, eğrisinin Frenet çatısı $\{T_1(s_1), N_1(s_1), B_1(s_1)\}$ şeklinde verilsin. Burada $T_1(s_1)$ teğet vektör alanı, $N_1(s_1)$ normal vektör alanı, $B_1(s_1)$ binormal vektör alanıdır. $\Gamma_1 : x_1(s_1)$, Mannheim eğri çiftinin eğrilik fonksiyonu $\kappa_1(s_1)$, burulma fonsiyonu $\tau_1(s_1)$ dir [3].

3.1. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA MANNHEIM EĞRİLERİ

Bu alt başlıkta ilk olarak 1878 yılında Mannheim tarafından bulunan ve bir çok diferensiyel geometri kitabında ispatı olan Mannheim eğrisinin karakterizasyonuna yer verilecek [1, 9, 10, 11, 12] ve bazı özel eğrilerin Mannheim eğrisi olması durumları incelenecektir.

Teorem 3.1.1. Öklid uzayında bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart λ sıfırdan farklı sabit olmak üzere eğrinin eğriliği κ ve torsiyonu τ nun

$$\kappa = \lambda(\kappa^2 + \tau^2) \tag{3.1}$$

denklemini sağlamasıdır [1].

İspat. $x(s)$ eğrisi Mannheim eğri, $x_1(s)$ eğrisi Mannheim eğri çifti olsun. Tanım 3.1. den $x_1(s)$ eğrisi

$$x_1(s) = x(s) + \lambda(s)N(s) \tag{3.2}$$

olarak yazılabilir.

(3.2) denkleminin türevi alınıp Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dx_1(s)}{ds} = \big(1 - \lambda(s)\kappa(s)\big)T(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)\tau(s)B(s) \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) denkleminin her iki tarafı $N(s)$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$< \frac{dx_1(s)}{ds}, N(s) \; > = \lambda'(s)$$

elde edilir. N ile B_1 aynı doğrultuda olduğundan $\lambda'(s) = 0$ elde edilir. Bu ise λ nın sıfırdan farklı sabit olduğu anlamına gelir. Bu durumda (3.3) denklemi

$$\frac{dx_1(s)}{ds} = \big(1 - \lambda\kappa(s)\big)T(s) + \lambda\tau(s)B(s)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Buradan

$$T_1 = \frac{dx_1}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \Big(\big(1 - \lambda\kappa(s)\big)T(s) + \lambda\tau(s)B(s)\Big)\frac{ds}{ds_1} \tag{3.4}$$

yazılabilir. (3.4) denkleminin s_1'e göre türevi alınıp ve Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \Big(&-\lambda\kappa'(s)T(s) + \Big(\kappa(s) - \lambda\big(\kappa(s)\big)^2 - \lambda\big(\tau(s)\big)^2\Big)N(s) \\ &+ \lambda\tau'(s)B(s)\Big)\frac{ds}{ds_1} \\ &+ \Big(\big(1 - \lambda\kappa(s)\big)T(s) + \lambda\tau(s)B(s)\Big)\frac{d^2s}{{ds_1}^2}\end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.5) denkleminin her iki tarafının $N(s)$ vektörü ile iç çarpımı alınırsa,

$$< \frac{dT_1}{ds}\frac{ds}{ds_1}, N(s) > = < (\kappa - \kappa^2\lambda - \tau^2\lambda)N(s)\frac{ds}{ds_1}, N(s) > = 0$$

$$\kappa = \lambda(\kappa^2 + \tau^2)$$

elde edilir.

3.1.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Mannheim Eğrilerine Örnekler

Mannheim eğrilerinin parametrik bir ifadesi yoktur fakat [4] nolu çalışmada Eisenhart's kitabında yer alan

$$x(u) = \begin{bmatrix} \alpha \int h(u)\sin u \, du \\ \alpha \int h(u)\cos u \, du \\ \alpha \int h(u)\, g(u)\, du \end{bmatrix}, u \in U \subset IR$$

parametrik ifadesiyle verilen eğrinin α pozitif sabit olmak üzere $g : U \to IR$ düzgün fonksiyonları ve

$$h : U \to IR$$

$$h(u) = \frac{\left\{1 + \left(g(u)\right)^2 + \left(\dot{g}(u)\right)^2\right\}^3 + \left\{1 + \left(g(u)\right)^2\right\}^3 \{\ddot{g}(u) + g(u)\}^2}{\left\{1 + \left(g(u)\right)^2\right\}^{3/2} \left\{1 + \left(g(u)\right)^2 + \left(\dot{g}(u)\right)^2\right\}^{5/2}}$$

fonksiyonu için bir Mannheim eğri olduğu gösterilmiştir. Burada u ya göre türev $(\dot{\ })$ olarak gösterilmiştir. C eğrisinin her bir $x(u)$ noktasında eğrinin eğrilik fonksiyonu κ ve torsiyonu τ aşağıdaki eşitliği sağlarlar [9].

$$\kappa(u) = \alpha\left\{\left(\kappa(u)\right)^2 + \left(\tau(u)\right)^2\right\}$$

Örnek 3.1.1.1. Eğer $g(u) = c$(sabit) ise $h(u) = 1$ olarak bulunur. Bu da C eğrisinin dairesel helis olduğunu gösterir [4].

Örnek 3.1.1.2. Eğer $g(u) = \tan u, \left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$ ise

$$h(u) = \frac{(5 + 3\cos^2 u)\cos u}{(1 + \cos^2 u)^{5/2}}$$

olarak bulunur. *C* eğrisi ise

$$x(u) = \begin{bmatrix} \alpha \int \frac{(5 + 3\cos^2 u)\cos u \sin u}{(1 + \cos^2 u)^{5/2}} du \\ \alpha \int \frac{(5 + 3\cos^2 u)\cos^2 u}{(1 + \cos^2 u)^{5/2}} du \\ \alpha \int \frac{(5 + 3\cos^2 u)\sin u}{(1 + \cos^2 u)^{5/2}} du \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir [4].

Örnek 3.1.1.3. Eğer $g(u) = \sinh u$ ise

$$h(u) = \frac{(1 + \cosh^2 u)}{\cosh^2 u}$$

olarak bulunur. *C* eğrisi ise

$$x(u) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{(1 + \cosh^2 u)\sin u}{\cosh^2 u} du \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{(1 + \cosh^2 u)\cos u}{\cosh^2 u} du \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int \frac{(1 + \cosh^2 u)\sinh u}{\cosh^2 u} du \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir [4].

3.1.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler ve Mannheim Eğrileri

Bu alt başlıkta bazı özel eğrilerin Mannheim eğrisi olması durumları incelenerek eğrilerin eğrilikleri ve torsiyonları karakterize edilecektir.

Önerme 3.1.2.1. Eğer *x* Mannheim eğrisi bir genel helis ise o zaman *x* bir dairesel helistir ve eğriliği, torsiyonu

$$\kappa = \frac{1}{\lambda(1+c^2)} \ ,$$

$$\tau = \frac{c}{\lambda(1+c^2)}$$

olarak elde edilir.

İspat. x eğrisi bir genel helis olsun. Bu durumda x in eğriliği κ ve torsiyonu τ olmak üzere Tanım 2.1.14. den

$$\frac{\tau}{\kappa} = c \tag{3.6}$$

eşitliğini sağlar. (3.6) denklemi

$$\tau = c\kappa \tag{3.7}$$

şeklinde yazılabilir. x eğrisi aynı zamanda bir Mannheim eğrisi de olduğundan (3.1) denklemini sağlar. (3.7) denklemi (3.1) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\kappa = \frac{1}{\lambda(1+c^2)} \ ,$$
$$\tau = \frac{c}{\lambda(1+c^2)}$$

olarak bulunur. κ ve τ sabit olduğundan x bir dairesel helis olur.

Önerme 3.1.2.2. Eğer x Mannheim eğrisi bir rektifiyan eğri ise o zaman x in eğriliği ve torsiyonu

$$\kappa = \frac{1}{\lambda(1+(as+b)^2)} \ ,$$
$$\tau = \frac{as+b}{\lambda(1+(as+b)^2)}$$

olarak elde edilir.

İspat. x eğrisinin bir rektifiyan eğri olduğunu kabul edelim. Bu durumda Tanım 2.1.15. den

$$\frac{\tau}{\kappa} = as + b \tag{3.8}$$

eşitliği vardır. (3.8) eşitliği

$$\tau = \kappa(as + b) \tag{3.9}$$

olarak düzenlenip (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\kappa = \frac{1}{\lambda(1 + (as + b)^2)}$$

olarak elde edilir. (3.9) dan

$$\tau = \frac{as + b}{\lambda(1 + (as + b)^2)}$$

olarak bulunur.

Önerme 3.1.2.3. Mannheim Salkowski eğrisi yoktur.

İspat. Kabul edelim ki x eğrisi bir Salkowski eğrisi olsun. Bu durumda Tanım 2.1.16. gereğince

$$\kappa = sbt = c\,, \qquad \tau = \tau(s) \tag{3.10}$$

dir. (3.10) ve (3.1) birlikte ele alınırsa x in torsiyonu sabit olarak bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

Önerme 3.1.2.4. Mannheim anti-Salkowski eğrisi yoktur.

İspat. Kabul edelim ki x eğrisi bir anti-Salkowski eğrisi olsun. Bu durumda Tanım 2.1.17. gereğince

$$\kappa = \kappa(s), \tau = sbt = c \tag{3.11}$$

dir. (3.11) ve (3.1) denklemleri birlikte ele alınırsa x in eğrilik fonksiyonu sabit olarak bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

Uyarı 3.1.2.1. x eğrisi bir Mannheim eğri ise x in eğrilik fonksiyonlarının ya her ikisi sabittir ya da her ikisi değişkendir. Aksi takdirde Önerme 3.1.2.3. ve Önerme 3.1.2.4. de görüldüğü gibi birinin sabit diğerinin değişken olması durumunda Mannheim eğrisi yoktur.

3.2. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA MANNHEIM EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu alt başlıkta [3] nolu çalışmada Huili Liu ve Fan Wang tarafından verilen Mannheim eğri çiftlerinin karakterizasyonlarına yer verilecektir. Ayrıca bazı özel eğrilerin Mannheim eğri çifti olması durumları incelenecektir.

Teorem 3.2.1. $\Gamma : x(s)$, s yay parametresine bağlı bir Mannheim eğri olsun.

$\Gamma_1 : x_1(s_1)$ eğrisinin Γ eğrisinin Mannheim çifti olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı herhangi bir λ reel sabiti için Γ_1 eğrisinin eğriliği κ_1 ve torsiyonu τ_1 fonksiyonlarının

$$\dot{\tau_1} = \frac{d\tau_1}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{\lambda}(1 + \lambda^2 {\tau_1}^2) \tag{3.12}$$

denklemini sağlamasıdır [3].

İspat. $\Gamma : x(s)$ bir Mannheim eğrisi olsun. Tanım 3.1. den $x(s_1)$ eğrisi

$$x(s_1) = x_1(s_1) + \lambda(s_1)B_1\,(s_1) \tag{3.13}$$

olarak yazılabilir.

(3.13) ün s_1'e göre türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$T\frac{ds}{ds_1} = T_1 - \lambda\tau_1 N_1 + \dot{\lambda} B_1 \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.14) denkleminin her iki tarafı B_1 vektörü ile iç çarpılırsa,

$$\langle T\frac{ds}{ds_1}, B_1\rangle = < T_1 - \lambda\tau_1 N_1 + \dot{\lambda} B_1, B_1 \ > = \dot{\lambda}$$

elde edilir. N ile B_1 aynı doğrultuda olduğu için $\dot{\lambda} = 0$ olarak bulunur. Bu ise λ nın sıfırdan farklı sabit olduğu anlamına gelir.

Buradan (3.14) denklemi

$$T\frac{ds}{ds_1} = T_1 - \lambda\tau_1 N_1 \qquad (3.15)$$

olarak düzenlenebilir. Tanım 3.1. den $x(s)$ eğrisinin asli normal doğrultusu $N(s)$ ile $x_1(s_1)$ eğrisinin binormal doğrultusu $B_1(s_1)$ çakıştığından, $x(s)$ eğrisinin $Sp\{T, B\}$ düzlemi ile $x_1(s_1)$ eğrisinin $Sp\{T_1,\ N_1\}$ düzlemleri de çakışır. Bu yüzden

$$T = \cos\theta\, T_1 + \sin\theta\, N_1 \qquad (3.16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada θ, Γ ve Γ_1 eğrilerinin karşılık gelen noktalarındaki T ve T_1 teğet vektörleri arasındaki açıdır. (3.16) denkleminin s_1 'e göre türevi alınırsa

$$\kappa N\frac{ds}{ds_1} = -\left(\kappa_1 + \dot{\theta}\right)\sin\theta\, T_1 + \left(\kappa_1 + \dot{\theta}\right)\cos\theta\, N_1 + \tau_1 \sin\theta\, B_1 \qquad (3.17)$$

elde edilir. N ile B_1 aynı doğrultuda olduğu için (3.17) denkleminden

$$\langle \kappa N\frac{ds}{ds_1}, T_1\rangle = -\left(\kappa_1 + \dot{\theta}\right)\sin\theta \ ,$$

$$\langle \kappa N\frac{ds}{ds_1}, N_1\rangle = (\kappa_1 + \dot{\theta})\cos\theta$$

ve

$$\begin{cases}(\kappa_1 + \dot{\theta})\sin\theta = 0\\ (\kappa_1 + \dot{\theta})\cos\theta = 0\end{cases}$$

elde edilir. Buradan

$$\dot{\theta} = -\kappa_1 \tag{3.18}$$

bulunur. (3.16) denklemi (3.15) te yerine yazılırsa,

$$T_1\left(\cos\theta\frac{ds}{ds_1} - 1\right) + N_1\left(\sin\theta\frac{ds}{ds_1} + \lambda\tau_1\right) = 0$$

elde edilir.

T_1 ve N_1 lineer bağımsız olduğu için

$$\cos\theta\frac{ds}{ds_1} - 1 = 0 \quad ,$$

$$\sin\theta\frac{ds}{ds_1} + \lambda\tau_1 = 0 \quad ,$$

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{\lambda\tau_1}{\sin\theta} \quad .$$

Buradan

$$\lambda\tau_1 = -\tan\theta \tag{3.19}$$

bulunur.

(3.19) eşitliğinin türevi alınıp (3.18) kullanılırsa,

$$\dot{\tau_1} = \frac{\kappa_1}{\lambda}(1 + \lambda^2{\tau_1}^2)$$

elde edilir.

Tersine Γ_1 eğrisinin eğriliği κ_1 ve torsiyonu τ_1 sıfırdan farklı herhangi bir λ değeri için

$$\dot{\tau_1} = \frac{\kappa_1}{\lambda}(1 + \lambda^2{\tau_1}^2)$$

denklemini sağlasın. Bu durumda (3.13) denklemi ile verilen Γ eğrisinin bir Mannheim eğri ve Γ_1 eğrisinin de Γ nın Mannheim eğri çifti olduğu gösterilecektir.

(3.13) denkleminin s_1'e göre iki kez türevi alınırsa sırasıyla

$$T\frac{ds}{ds_1} = T_1 - \lambda\tau_1 N_1 \quad , \tag{3.20}$$

$$\kappa N\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + T\frac{d^2s}{{ds_1}^2} = \lambda\kappa_1\tau_1 T_1 + (\kappa_1 - \lambda\dot{\tau_1})N_1 - \lambda{\tau_1}^2 B_1 \tag{3.21}$$

denklemleri elde edilir.

(3.20) denkleminin (3.21) denklemi ile vektörel çarpımı yapılırsa,

$$\kappa B\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 = \lambda^2{\tau_1}^3 T_1 + \lambda{\tau_1}^2 N_1 + (\kappa_1 - \lambda\dot{\tau_1} + \lambda^2{\tau_1}^2\kappa_1)B_1 \tag{3.22}$$

elde edilir. $\kappa_1 - \lambda\dot{\tau_1} = -\lambda^2{\tau_1}^2\kappa_1$ eşitliği (3.22) de kullanılırsa,

$$\kappa B\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^3 = \lambda^2{\tau_1}^3 T_1 + \lambda{\tau_1}^2 N_1 \tag{3.23}$$

elde edilir.

(3.23) denkleminin (3.20) denklemi ile vektörel çarpımı yapılırsa,

$$\kappa N\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^4 = -\lambda{\tau_1}^2(1 + \lambda^2{\tau_1}^2)B_1$$

elde edilir.

Bu ise Γ: $x(\mathrm{s})$ eğrisinin asli normal doğrultusu N ile $\Gamma_1 : x_1(\mathrm{s}_1)$ eğrisinin binormal doğrultusunun B_1 aynı doğrultuda olduğu anlamına gelir. Böylece Γ: $x(s)$ eğrisi bir Mannheim eğri ve $\Gamma_1 : x_1(\mathrm{s}_1)$ eğrisi de bir Mannheim eğri çifti olur.

Uyarı 3.2.1. $\lambda\tau_1 = u$ dönüşümü ile (3.12) eşitliği

$$\frac{du}{1+u^2} = \kappa_1 ds_1 \tag{3.24}$$

olarak elde edilir. (3.24) eşitliğinin her iki tarafı integre edilirse,

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int \kappa_1 ds_1 \ ,$$

$$\operatorname{arc}\tan u = \left(\int \kappa_1 ds_1 + c_o\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\tau_1 = \frac{1}{\lambda}\tan\left(\int \kappa_1 ds_1 + c_o\right)$$

olarak bulunur [3].

Her bir Mannheim eğrisi için, bir tek Mannheim eğri çifti vardır.

Önerme 3.2.1. $\Gamma : x(\mathrm{s})$, s yay parametresine bağlı bir Mannheim eğri ve $\Gamma_1 : x_1(\mathrm{s}_1)$ eğrisi s_1 yay parametresine bağlı bir Mannheim eğri çifti olsun. Eğer $\Gamma : x(\mathrm{s})$ bir genel helis ise o zaman $\Gamma_1 : x_1(\mathrm{s}_1)$ bir doğrudur [3].

İspat. T, N, B $x(\mathrm{s})$ eğrisinin teğet, aslinormal ve binormal vektör alanları olsun. Tanım 2.1.14. ten $x(\mathrm{s})$ eğrisinin teğet vektörü T, sabit birim bir doğrultu ρ ile sabit açı yapar. Yani

$$\langle T, \rho\rangle = \cos\theta \tag{3.25}$$

yazılabilir. (3.25) denkleminin türevi alınırsa,

$$\langle N, \rho\rangle = 0 \tag{3.26}$$

elde edilir. Tanım 3.1. den, herhangi bir sabit ρ vektörü için (3.26) denklemi

$$\langle B_1, \rho \rangle = 0 \tag{3.27}$$

şeklinde yazılabilir. (3.27) denkleminden ρ sabit vektörünün B_1 vektörüne dik olduğu görülmektedir. Bu yüzden ρ sabit vektörü T_1 ve N_1 vektörlerinin gerdiği düzlemde yatmaktadır. Bu durumda ρ sabit vektörü,

$$\vec{\rho} = \cos\xi\, T_1 + \sin\xi\, N_1 \tag{3.28}$$

şeklinde yazılabilir. (3.28) denkleminin bir kez türevi alınır ve Frenet vektörleri kullanılırsa

$$0 = -\sin\xi\,(\kappa_1 + \xi')T_1 + \cos\xi(\kappa_1 + \xi')N_1 + (\sin\xi\tau_1)B_1 \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.29) denkleminde T_1, N_1, B_1 vektör alanları lineer bağımsız olduğu için

$$\cos\xi(\kappa_1 + \xi') = 0 \quad , \tag{3.30}$$

$$\sin\xi\,(\kappa_1 + \xi') = 0 \quad , \tag{3.31}$$

$$\sin\xi\tau_1 = 0 \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.30) ve (3.31) denkleminden

$$\kappa_1 + \xi' = 0 \quad , \kappa_1 = -\xi' \tag{3.33}$$

dır. Diğer taraftan (3.32) denkleminden $\sin\xi = 0$ veya $\tau_1 = 0$ elde edilir.

Eğer $\sin\xi = 0$ ise $\xi = \pi k$ =sbt tir. Bu ise (3.33) den $\kappa_1 = 0$ olduğu anlamına gelir ve Γ_1 eğrisi bir doğru olur. Eğer $\tau_1 = 0$ ise (3.12) denkleminden $\kappa_1 = 0$ bulunur ve Γ_1 eğrisi bir doğru olur.

Önerme 3.2.2. Herhangi $\Gamma : x(s)$ eğrisi için, eğrinin Mannheim eğri çifti bir helis ise sıfırdan farklı herhangi c_1 ve c_2 sabitleri için $x(s)$ eğrisinin eğriliği ve burulması arasındaki bağıntı aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{c_2}{2}e^{c_1 s} - \frac{1}{2c_2}e^{-c_1 s}$$

$c_1 = c_2 = 1$ olursa

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{e^{s} - e^{-s}}{2} = \sinh s$$

elde edilir [3].

İspat. T, N, B $x(\mathrm{s})$ eğrisinin tanjant, aslinormal ve binormal vektör alanları olsun. Tanım 2.1.14. den

$$< T_1, \rho >= \cos\mu \tag{3.34}$$

yazılabilir. (3.34) denkleminin türevi alınırsa,

$$< N_1, \rho >= 0 \tag{3.35}$$

bulunur. (3.35) denkleminden ρ sabit vektörünün N_1 vektörüne dik olduğu görülmektedir. Bu yüzden ρ sabit vektörü T_1 ve B_1 vektörlerinin gerdiği düzlemde yatmaktadır. Bu ifadeden ρ sabit vektörü,

$$\vec{\rho} = T_1 \cos\mu + B_1 \sin\mu \tag{3.36}$$

şeklinde yazılabilir. (3.36) denkleminin her iki tarafı B_1 vektörü ile iç çarpılırsa,

$$< B_1, \rho >= \sin\mu \tag{3.37}$$

elde edilir. Tanım 3.1. den

$$< B_1, \rho >=< N, \rho >= \sin\mu \tag{3.38}$$

olur. θ_o gibi sabit bir açı için (3.38) denklemi

$$< N, \rho >= \cos\theta_o \tag{3.39}$$

şeklinde yazılabilir. Önerme 3.2.1. den biliyoruz ki $x(s)$ bir helis ise $x_1(s_1)$ bir doğrudur. Diğer taraftan $x_1(s_1)$ bir doğru değilse $x(s)$ bir helis değildir. $x(s)$ doğru seçilmediği için helis seçildiği için $\cos\theta_o \neq 0$ ve $\frac{\tau}{\kappa} \neq sbt$ dir. (3.39) denkleminin s ye göre iki kez türevi alınırsa

$$-\kappa\langle T,\rho\rangle + \tau\langle B,\rho\rangle = 0 \quad , \tag{3.40}$$

$$-\kappa'\langle T,\rho\rangle + \tau'\langle B,\rho\rangle = (\kappa^2+\tau^2)\cos\theta_o \tag{3.41}$$

denklemleri elde edilir. (3.1) denklemi ve (3.40) denklemleri (3.41) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\langle T,\rho\rangle = \frac{\tau}{\lambda\kappa\frac{d(\tau/\kappa)}{ds}}\cos\theta_o \quad , \tag{3.42}$$

$$\langle B,\rho\rangle = \frac{1}{\lambda\frac{d(\tau/\kappa)}{ds}}\cos\theta_o \tag{3.43}$$

bulunur. (3.42) ve (3.43) denklemlerinin türevi alınırsa,

$$\kappa = \frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{\tau\frac{d^2(\tau/\kappa)}{ds^2}}{\kappa\left(\frac{d(\tau/\kappa)}{ds}\right)^2}\right) \quad , \tag{3.44}$$

$$\tau = \frac{\frac{d^2(\tau/\kappa)}{ds^2}}{\lambda\left(\frac{d(\tau/\kappa)}{ds}\right)^2} \tag{3.45}$$

elde edilir. (3.44) ve (3.45) denklemlerinden τ ve κ oranlanırsa

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\dfrac{d^2(\tau/\kappa)}{ds^2}}{\left(\dfrac{d(\tau/\kappa)}{ds}\right)^2 - \dfrac{\tau}{\kappa}\dfrac{d^2(\tau/\kappa)}{ds^2}} \tag{3.46}$$

elde edilir.

(3.46) denkleminde $\tau/\kappa = y(\mathrm{s})$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$(1+y^2)\frac{d^2y}{ds^2} - y\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklem bağımsız değişken içermeyen ikinci mertebeden lineer olmayan bir diferensiyel denklemdir. $y' = p$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{dp}{p} = \frac{y}{1+y^2}dy \tag{3.47}$$

elde edilir. (3.47) denkleminin her iki tarafı integre edilirse,

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{y}{1+y^2}dy$$

olup

$$\ln(p/c) = \ln\sqrt{1+y^2} \tag{3.48}$$

elde edilir. (3.48) denkleminden

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = c_1 ds \tag{3.49}$$

değişkenlerine ayrılabilir diferensiyel denklemi elde edilir. (3.49) denkleminin her iki tarafı integre edilirse,

$$\sinh^{-1} y = c_1 s + c_2 \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.50) denkleminden

$$y(\mathrm{s}) = c_o$$

$$y(\mathrm{s}) = \frac{c_2}{2} e^{c_1 \mathrm{s}} - \frac{1}{2c_2} e^{-\,c_1 \mathrm{s}}$$

olarak bulunur.

3.2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler ve Mannheim Eğri Çiftleri

Bu alt başlıkta bazı özel eğrilerin Mannheim eğri çifti olması durumları incelenerek eğrilerin eğrilikleri ve torsiyonları karakterize edilecektir.

Önerme 3.2.1.1. x_1 Mannheim eğri çifti bir genel helis ise eğrilik ve torsiyonları

$$\kappa_1 = \frac{e^{\frac{s_1}{\lambda c}}}{\sqrt{-e^{\frac{2s_1}{\lambda c}} \lambda^2 c^2 + d}},$$

$$\tau_1 = \frac{c e^{\frac{s_1}{\lambda c}}}{\sqrt{-e^{\frac{2s_1}{\lambda c}} \lambda^2 c^2 + d}}$$

olarak elde edilir. Burada c, d integral sabitleridir.

İspat. x_1 eğrisi bir genel helis olsun. Bu durumda x_1 in eğriliği κ_1 ve torsiyonu τ_1 olmak üzere Tanım 2.1.14. den

$$\frac{\tau_1}{\kappa_1} = c \tag{3.51}$$

eşitliğini sağlar. (3.51) denklemi

$$\tau_1 = c\kappa_1 \tag{3.52}$$

şeklinde yazılabilir. x_1 eğrisi aynı zamanda bir Mannheim eğrisi çifti de olduğundan (3.12) denklemini sağlar. (3.52) eşitliği (3.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\dot{\kappa_1} = \frac{\kappa_1}{c\lambda} + \lambda c {\kappa_1}^3$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklem bir Bernoulli diferensiyel denklemidir. $z = {\kappa_1}^{-2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\dot{z} + \frac{2z}{\lambda c} = -2\lambda c$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklem çözülürse

$$\kappa_1 = \frac{e^{\frac{s_1}{\lambda c}}}{\sqrt{-e^{\frac{2s_1}{\lambda c}}\lambda^2 c^2 + d}}$$

bulunur. (3.52) denkleminden

$$\tau_1 = \frac{c e^{\frac{s_1}{\lambda c}}}{\sqrt{-e^{\frac{2s_1}{\lambda c}}\lambda^2 c^2 + d}}$$

elde edilir.

Önerme 3.2.1.2. x_1 Mannheim eğri çifti bir rektifiyan eğri ise eğrilik ve torsiyonları

$$\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda^2 (as_1 + b\,)^2 + \frac{d}{(as_1 + b\,)^{\left(\frac{2}{\lambda a} - 2\right)}}}}\ ,$$

$$\tau_1 = \frac{(as_1 + b\,)}{\sqrt{-\lambda^2 (as_1 + b\,)^2 + \frac{d}{(as_1 + b\,)^{\left(\frac{2}{\lambda a} - 2\right)}}}}$$

olarak elde edilir. Burada d integral sabitidir.

İspat. x_1 eğrisi bir rektifiyan eğri olsun. Bu durumda x_1 in eğriliği κ_1 ve torsiyonu τ_1 olmak üzere Tanım 2.1.15. den

$$\frac{\tau_1}{\kappa_1} = as_1 + b \tag{3.53}$$

eşitliğini sağlar. (3.53) denklemi

$$\tau_1 = \kappa_1(as_1 + b\,) \tag{3.54}$$

şeklinde yazılabilir. x_1 eğrisi aynı zamanda bir Mannheim eğri çifti de olduğundan (3.12) denklemini sağlar. (3.54) eşitliği (3.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\dot{\kappa_1} = \kappa_1\left(\frac{1}{\lambda(as_1 + b\,)} - \frac{a}{(as_1 + b\,)}\right) + \lambda(as_1 + b\,)\kappa_1{}^3$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklem bir Bernoulli diferensiyel denklemidir. $z = \kappa_1{}^{-2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\dot{z} + \left(\frac{2}{\lambda(as_1 + b\,)} - \frac{2a}{(as_1 + b\,)}\right)z = -2\lambda(as_1 + b\,)$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklem çözülürse

$$\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda^2(as_1 + b\,)^2 + \dfrac{d}{(as_1 + b\,)^{\left(\frac{2}{\lambda a} - 2\right)}}}}$$

bulunur. (3.54) denkleminden

$$\tau_1 = \frac{(as_1 + b\,)}{\sqrt{-\lambda^2(as_1 + b\,)^2 + \dfrac{d}{(as_1 + b\,)^{\left(\frac{2}{\lambda a} - 2\right)}}}}$$

elde edilir.

Önerme 3.2.1.3. x_1 Mannheim eğri çifti bir Salkowski eğri ise burulma fonksiyonu

$$\tau_1 = \frac{\tan\left(cs_1 + \frac{d}{\lambda}\right)}{\lambda}$$

olarak elde edilir. Burada c, d integral sabitleridir.

İspat. x_1 eğrisi bir Salkowski eğrisi olsun. Bu durumda x_1 in eğriliği κ_1 ve torsiyonu τ_1 olmak üzere Tanım 2.1.16. dan

$$\kappa_1 = c \quad \text{ve} \quad \tau_1 = \tau_1(s_1) \tag{3.55}$$

eşitliğini sağlar. x_1 eğrisi aynı zamanda bir Mannheim eğri çifti de olduğundan (3.12) denklemini sağlar. (3.55) eşitliği (3.12) denklemleri birlikte ele alınırsa

$$\dot{\tau_1} = \frac{c}{\lambda} + c\lambda{\tau_1}^2$$

diferensiyel denklemi elde edilmiş olur. Bu diferensiyel denklemde değişkenlerine ayırma metodu uygulanırsa

$$\tau_1 = \frac{\tan\left(cs_1 + \frac{d}{\lambda}\right)}{\lambda}$$

bulunur.

Önerme 3.2.1.4. Anti-Salkowski Mannheim eğri çifti yoktur.

İspat. Kabul edelim ki x_1 eğrisi bir anti-Salkowski eğrisi olsun. Bu durumda Tanım 2.1.17. gereğince

$$\kappa_1 = \kappa_1(s_1), \qquad \tau_1 = c \tag{3.56}$$

dir. (3.56) ve (3.12) birlikte ele alınırsa x_1 in eğrilik fonksiyonu sabit olarak bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ MANNHEIM EĞRİLERİ

Bu bölümde Matsuda ve Yorozu tarafından tanımlanan [4] nolu çalışmadaki genelleştirilmiş Mannheim eğrilerinin karakterizasyonlarına yer verilecektir.

Tanım 4.1. *C* eğrisi $x : L \subset IR \to E^4$ regüler, diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri olsun. Eğer *C* eğrisi üzerindeki k_1, k_2, k_3 diferensiyellenebilir fonksiyonları ve *C* eğrisi boyunca tanımlı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı aşağıdaki özelliklerini sağlar ise *C* ye özel Frenet eğrisi adı verilir.

i) Her $s \in L$ için k_1, k_2, k_3 fonksiyonları ve $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı Teorem 2.1.1. ile verilen Frenet denklemlerini sağlar.
ii) $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatısı ortonormal pozitif yönlü çatı alanıdır.
iii) k_1, k_2 fonksiyonları pozitif, $k_3 \neq 0$ dır.
iv) $\{k_1, k_2, k_3\}$ fonksiyonları sırasıyla *C* eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü eğrilik fonksiyonları olarak adlandırılır. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatı alanı *C* üzerinde Frenet çatı alanı olarak adlandırılır [4].

Uyarı 4.1. $x : L \subset IR \to E^4$, s yay parametresiyle verilmiş bir eğri için $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ Frenet çatısı ve $\{k_1, k_2, k_3\}$ eğrilik fonksiyonları aşağıdaki adımlar yardımıyla bulunur.

Adım I $e_1(s) := x'(s)$

Adım II $k_1(s) := \|e_1'(s)\| > 0$

$$e_2(s) := \frac{1}{k_1(s)} e_1'(s)$$

Adım III $k_2(s) := \|e_2'(s) + k_1(s)e_1(s)\| > 0$

$$e_3(s) := \frac{1}{k_2(s)} \left(e_2'(s) + k_1(s)e_1(s)\right)$$

Adım IV $k_3(s) := \|e_3'(s) + k_2(s)e_2(s)\|$

$$e_4(\mathrm{s}) := \varepsilon \frac{1}{\|e_3'(\mathrm{s}) + k_2(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s})\|}\left(e_3'(\mathrm{s}) + k_2(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s})\right), \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

Pozitif yönlendirilmiş $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatı alanı yardımıyla ε nun işareti belirlenir [4].

4.1. E^4 TE GENELLEŞTİRİLMİŞ MANNHEIM EĞRİLERİ

Tanım 4.1.1. C ve Ĉ eğrileri E^4 te özel Frenet eğrileri ve $\Phi\colon \mathrm{C} \to \hat{\mathrm{C}}$, C nin her bir noktasını Ĉ nin her bir noktasıyla eşleyen birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer C eğrisinin her bir noktasındaki birinci normal doğrusu, Ĉ eğrisinin Φ dönüşümü altında karşılık gelen noktasındaki ikinci ve üçüncü normal doğrularının gerdiği düzlemde yatıyorsa, C eğrisine genelleştirilmiş Mannheim eğri, Ĉ eğrisine de C nin genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti adı verilir [4].

C eğrisi $x : L \subset IR \to E^4$ s yay parametresiyle verilmiş bir genelleştirilmiş Mannheim eğrisi olsun. Bu durumda Tanım 4.1.1. den $\hat{x} : L \to E^4$ dönüşümüyle verilen genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti Ĉ,

$$\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{s}) = \mathrm{x}(\mathrm{s}) + \alpha(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s}),\ \mathrm{s} \in \mathrm{L}$$

şeklinde yazılabilir. Burada α, L üzerinde tanımlı reel değerli, diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Ĉ eğrisinin yay parametresi ŝ,

$$f(\mathrm{s}) = \hat{\mathrm{s}} = \int_0^{\mathrm{S}} \left\|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{s})}{\mathrm{ds}}\right\| \mathrm{ds} \tag{4.1}$$

olarak bulunur. $f(\mathrm{s}) = \hat{\mathrm{s}}$ ile verilen $f\colon L \to \hat{L}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu ele alınsın. Bu durumda (4.1) eşitliğinden

$$f'(\mathrm{s}) = \sqrt{\{1 - \alpha(\mathrm{s})k_1(\mathrm{s})\}^2 + \{\alpha'(\mathrm{s})\}^2 + \{\alpha(\mathrm{s})k_2(\mathrm{s})\}^2}$$

elde edilir. $\Phi\ : \mathrm{C} \to \hat{\mathrm{C}},\ \Phi\left(\mathrm{x}(\mathrm{s})\right) = \hat{\mathrm{x}}\left(f(\mathrm{s})\right)$ olmak üzere $\hat{\mathrm{s}}$ yay parametresiyle verilen $\hat{\mathrm{C}}$ eğrisi $\hat{\mathrm{x}} : \hat{L} \to E^4$ ile gösterilsin. $\hat{\mathrm{C}}$ eğrisinin kendi yay parametresi cinsinden yazılırken kolaylık olması açısından yine "$\hat{\mathrm{x}}$" notasyonu kullanılacaktır. Böylece $\hat{\mathrm{C}}$ eğrisi

$$\hat{\mathrm{x}}\left(f(\mathrm{s})\right) = \mathrm{x}(\mathrm{s}) + \alpha(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s}) \tag{4.2}$$

olarak yazılabilir. (4.2) denkleminin s'e göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\hat{\mathrm{x}}\left(f(\mathrm{s})\right)}{ds} = \frac{d\hat{\mathrm{x}}\left(f(\mathrm{s})\right)}{d\hat{\mathrm{s}}}\frac{d\hat{\mathrm{s}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathrm{x}}(\hat{\mathrm{s}})}{d\hat{\mathrm{s}}}f'(\mathrm{s}) = f'(\mathrm{s})\widehat{e_1}\left(f(\mathrm{s})\right)$$

eşitliği elde edilir [4].

Teorem 4.1.1. E^4 te özel bir Frenet eğrisi olan C eğrisi genelleştirilmiş bir Mannheim eğrisi ise, α pozitif sabit olmak üzere, C eğrisinin birinci eğriliği k_1 ve ikinci eğriliği olan k_2 aşağıdaki eşitliği sağlar [4].

$$k_1(\mathrm{s}) = \alpha\left\{\left(k_1(\mathrm{s})\right)^2 + \left(k_2(\mathrm{s})\right)^2\right\}\ , \mathrm{s} \in L$$

İspat. E^4 te C eğrisi genelleştirilmiş bir Mannheim eğrisi ve $\hat{\mathrm{C}}$ eğrisi de C eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti olsun. Tanım 4.1.1.den

$$\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{s}) = \mathrm{x}(\mathrm{s}) + \alpha(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s})$$

olarak yazılır. Burada $\alpha : L \to IR$ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. $f : L \to \hat{L}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu

$$f(\mathrm{s}) = \int_0^{\mathrm{S}} \left\|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{s})}{\mathrm{ds}}\right\| \mathrm{ds} = \hat{\mathrm{s}}$$

şeklinde tanımlanır. Tanım 4.1.1.den $e_2(\mathrm{s})$ vektörü $\hat{\mathrm{e}}_3\left(f(\mathrm{s})\right)$ ve $\hat{\mathrm{e}}_4\left(f(\mathrm{s})\right)$ vektörlerinin lineer kombinasyonları olarak yazılabilir.

g ve h düzgün fonksiyonları için,

$$e_2(\mathrm{s}) = g(\mathrm{s})\hat{\mathrm{e}}_3\big(f(\mathrm{s})\big) + h(\mathrm{s})\hat{\mathrm{e}}_4\big(f(\mathrm{s})\big)$$

olarak yazılabilir. $\hat{\mathrm{x}}\big(f(\mathrm{s})\big) = \mathrm{x}(\mathrm{s}) + \alpha(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s})$ eşitliğinin her iki tarafının s' e göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} & f'(\mathrm{s})\hat{\mathrm{e}}_1\big(f(\mathrm{s})\big) = e_1(\mathrm{s}) + \alpha'(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s}) \\ & + \alpha(\mathrm{s})\big(-k_1(\mathrm{s})e_1(\mathrm{s}) \ + k_2(\mathrm{s})e_3(\mathrm{s})\big) \\ & = \big(1 - \alpha(\mathrm{s})k_1(\mathrm{s})\big)e_1(\mathrm{s}) + \alpha'(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s}) + \alpha(\mathrm{s})k_2(\mathrm{s})e_3(\mathrm{s}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir.

$< \hat{\mathrm{e}}_1\big(f(\mathrm{s})\big), g(\mathrm{s})\hat{\mathrm{e}}_3\big(f(\mathrm{s})\big) + h(\mathrm{s})\hat{\mathrm{e}}_4\big(f(\mathrm{s})\big) >= 0$ olduğundan (4.3) eşitliğinin her iki tarafı $e_2(\mathrm{s})$ vektörü ile iç çarpılırsa,

$$\alpha'(\mathrm{s}) =< f'(\mathrm{s})\hat{\mathrm{e}}_1\big(f(\mathrm{s})\big), e_2(\mathrm{s}) >= 0$$

elde edilir. Buradan $\alpha'(\mathrm{s}) = 0$ bulunur. Bu ise $\alpha(\mathrm{s})$ in sabit olduğu anlamına gelir. Böylece (4.3) denklemi

$$f'(\mathrm{s})\hat{\mathrm{e}}_1\big(f(\mathrm{s})\big) = \big(1 - \alpha k_1(\mathrm{s})\big)e_1(\mathrm{s}) + \alpha k_2(\mathrm{s})e_3(\mathrm{s}) \quad ,$$

$$\hat{\mathrm{e}}_1\big(f(\mathrm{s})\big) = \frac{1 - \alpha k_1(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}e_1(\mathrm{s}) + \frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}e_3(\mathrm{s}) \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir.

$f'(\mathrm{s}) = \sqrt{\big(1 - \alpha k_1(\mathrm{s})\big)^2 + \big(\alpha k_2(\mathrm{s})\big)^2}$ dir. (4.4) denkleminin her iki tarafının s e göre türevi alınırsa,

$$f'(\mathrm{s})\hat{k}_1(f(\mathrm{s}))\hat{\mathrm{e}}_2(f(\mathrm{s}))$$
$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)' e_1(\mathrm{s}) \\ &+ \left(\frac{(1-\alpha k_1(\mathrm{s}))k_1(\mathrm{s}) - \alpha(k_2(\mathrm{s}))^2}{f'(\mathrm{s})}\right) e_2(\mathrm{s}) \\ &+ \left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)' e_3(\mathrm{s}) + \left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})k_3(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right) e_4(\mathrm{s}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) denkleminin her iki tarafı $e_2(\mathrm{s})$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$(1-\alpha k_1(\mathrm{s}))k_1(\mathrm{s}) - \alpha(k_2(\mathrm{s}))^2 = 0 \quad , \mathrm{s} \in L$$

elde edilir.

$$k_1(\mathrm{s}) = \alpha\left\{(k_1(\mathrm{s}))^2 + (k_2(\mathrm{s}))^2\right\}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.1.2. E^4 te özel bir Frenet eğrisi olan C eğrisinin eğrilik fonksiyonları k_1 ve k_2, α pozitif sabiti için

$$k_1(\mathrm{s}) = \alpha\left\{(k_1(\mathrm{s}))^2 + (k_2(\mathrm{s}))^2\right\} \tag{4.6}$$

eşitliğini sağlasın. Eğer Ĉ özel Frenet eğrisi

$$\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{s}) = \mathrm{x}(\mathrm{s}) + \alpha e_2(\mathrm{s}) \tag{4.7}$$

eşitliği ile verilirse, o zaman C eğrisi bir genelleştirilmiş Mannheim eğri ve Ĉ eğrisi de C eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti olur [4].

İspat. Ĉ eğrisinin yay parametresi ŝ olsun. ŝ , her bir $\mathrm{s} \in L$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\hat{s} = \int_0^s \left\| \frac{d\hat{x}(s)}{ds} \right\| ds$$

$f : L \to \hat{L}$, $s \to f(s) = \hat{s}$ düzgün bir fonksiyon olsun. Her bir $s \in L$ için k_1 ve k_2 eğrilik fonksiyonları (4.6) denkleminin sağladığından

$$f'(s) = \sqrt{\big(1 - \alpha k_1(s)\big)^2 + \big(\alpha k_2(s)\big)^2} = \sqrt{1 - \alpha k_1(s)} \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir. $\hat{s}$ yay parametresiyle verilen $\hat{C}$ eğrisinin temsili $\hat{x}(\hat{s})$ ile gösterilirse

$$\hat{x}(\hat{s}) = \hat{x}\big(f(s)\big) = x(s) + \alpha e_2(s) \tag{4.9}$$

eşitliği kolayca yazılır. (4.9) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{d\hat{x}(\hat{s})}{ds} = \frac{d\hat{x}(\hat{s})}{d\hat{s}} f'(s) = f'(s)\hat{e}_1\big(f(s)\big)$$

$$\begin{aligned} f'(s)\hat{e}_1\big(f(s)\big) &= e_1(s) + \alpha\{-k_1(s)e_1(s) + k_2(s)e_3(s)\} \\ &= \big(1 - \alpha k_1(s)\big)e_1(s) + \alpha k_2(s)e_3(s) \end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.8) eşitliği (4.10) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\hat{e}_1\big(f(s)\big) = \sqrt{1 - \alpha k_1(s)}\, e_1(s) + \frac{\alpha k_2(s)}{\sqrt{1 - \alpha k_1(s)}} e_3(s) \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) eşitliğinin her iki tarafının s'e göre türevi alınırsa,

$$f'(\mathrm{s})\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{e}}_1(\hat{\mathrm{s}})}{\mathrm{d}\hat{\mathrm{s}}}$$
$$= \left(\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}\right)' e_1(\mathrm{s}) + \sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}k_1(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s})$$
$$+ \left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}}\right)' e_3(\mathrm{s}) \tag{4.12}$$
$$+ \frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}}\left(-k_2(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s}) + k_3(\mathrm{s})e_4(\mathrm{s})\right)$$

elde edilir.

$\hat{\mathrm{C}}$ eğrisi özel Frenet eğrisi olduğu için

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{e}}_1(\hat{\mathrm{s}})}{\mathrm{d}\hat{\mathrm{s}}} = \hat{k}_1\big(f(\mathrm{s})\big)\hat{\mathrm{e}}_2\big(f(\mathrm{s})\big) \tag{4.13}$$

dir. (4.13) denklemi (4.12) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$f'(\mathrm{s})\hat{k}_1\big(f(\mathrm{s})\big)\hat{\mathrm{e}}_2\big(f(\mathrm{s})\big)$$
$$= \left(\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}\right)' e_1(\mathrm{s})$$
$$+ \left(\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}k_1(\mathrm{s}) - \frac{\alpha\big(k_2(\mathrm{s})\big)^2}{\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}}\right) e_2(\mathrm{s}) \tag{4.14}$$
$$+ \left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}}\right)' e_3(\mathrm{s}) + \left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})k_3(\mathrm{s})}{\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}}\right) e_4(\mathrm{s})$$

elde edilir. (4.6) eşitliği ile verilen kabulden dolayı (4.14) denklemindeki $e_2(\mathrm{s})$ Frenet vektörünün katsayısı

$$\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}k_1(\mathrm{s}) + \frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}}\big(-k_2(\mathrm{s})\big)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}}\left(k_1(\mathrm{s}) - \alpha\big(k_1(\mathrm{s})\big)^2 - \alpha\big(k_2(\mathrm{s})\big)^2\right) = 0$$

elde edilir. Bu durumda (4.14) denkleminden her bir $s \in L$ için $\hat{e}_2(f(s))$ vektörü $e_1(s)$, $e_3(s)$ ve $e_4(s)$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılır. Bu durumda

$$\hat{e}_2(f(s)) = A(s)e_1(s) + B(s)e_3(s) + C(s)e_4(s)$$

eşitliği vardır. Ayrıca (4.11) denkleminden her bir $s \in L$ için $\hat{e}_1(f(s))$ vektörü $e_1(s)$, $e_3(s)$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazıldığından

$$\hat{e}_1(f(s)) = D(s)e_1(s) + E(s)e_3(s)$$

eşitliği vardır.

$\hat{C}$ eğrisi özel bir Frenet eğrisi olduğu için $e_2(s)$ vektörü

$$\begin{aligned} e_2(s) = {} & F(s)\hat{e}_1(f(s)) + G(s)\hat{e}_2(f(s)) + H(s)\hat{e}_3(f(s)) \\ & + K(s)\hat{e}_4(f(s)) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki eşitliklerden

$$< \hat{e}_1(f(s)), e_2(s) >= 0 = F(s)$$

ve

$$< \hat{e}_2(f(s)), e_2(s) >= 0 = G(s)$$

elde edilir. Böylece $e_2(s)$ vektörü $\hat{e}_3(f(s))$ ve $\hat{e}_4(f(s))$ vektörlerinin gerdiği düzlemde yatar. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.3. C eğrisi E^4 te üçüncü eğrilik fonksiyonu k_3 sıfırdan farklı özel bir Frenet eğrisi olsun. C eğrisinin k_1 ve k_2 eğrilik fonksiyonlarının sabit olması için gerek ve yeter şart C eğrisinin her bir noktasındaki birinci normal doğrusunun $\hat{C}$ eğrisinin $\Phi: C \to \hat{C}$ dönüşümü altında karşılık gelen noktasındaki üçüncü normal doğrusu olmasıdır [4].

İspat. i) C eğrisi E^4 te Frenet çatı alanı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve eğrilik fonksiyonları k_1, k_2, k_3 olan özel bir Frenet eğrisi olsun. C eğrisinin birinci ve ikinci eğrilik fonksiyonları k_1 ve k_2 pozitif sabitler olduğundan

$$\frac{k_1}{(k_1)^2 + (k_2)^2} = \alpha \tag{4.15}$$

bir pozitif sayıdır. Bu α pozitif sayısı yardımıyla Ĉ regüler diferensiyellenebilir eğrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$\hat{x}(s) = x(s) + \alpha e_2(s) \tag{4.16}$$

Ĉ eğrisinin yay parametresi ŝ olsun.
$f : L \to \hat{L}$, $s \to f(s) = \hat{s}$ fonksiyonu

$$\hat{s} = f(s) = \sqrt{(1 - \alpha k_1)^2 + (\alpha k_2)^2}s = \sqrt{1 - \alpha k_1}s$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$f'(s) = \sqrt{1 - \alpha k_1} \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.16) eşitliğinin her iki tarafının s' e göre türevi alınıp $f'(s)$ ifadesi kullanılırsa

$$f'(s)\hat{e}_1\big(f(s)\big) = e_1(s) + \alpha e_2{}'(s) = (1 - \alpha k_1)e_1(s) + \alpha k_2 e_3(s) \ ,$$

$$\hat{e}_1\big(f(s)\big) = \sqrt{1 - \alpha k_1}e_1(s) + \frac{\alpha k_2}{\sqrt{1 - \alpha k_1}}e_3(s) \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.18) eşitliğinin her iki tarafının s' e göre türevi alınırsa,

$$
\begin{aligned}
f'(\mathrm{s})\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{e}}_1(\hat{\mathrm{s}})}{\mathrm{d}\hat{\mathrm{s}}} &= \sqrt{1-\alpha k_1}e_1{}'(\mathrm{s}) + \frac{\alpha k_2}{\sqrt{1-\alpha k_1}}e_3{}'(\mathrm{s}) \\
&= \left(k_1\sqrt{1-\alpha k_1} - \frac{\alpha (k_2)^2}{\sqrt{1-\alpha k_1}}\right)e_2(\mathrm{s}) + \frac{\alpha k_2 k_3}{\sqrt{1-\alpha k_1}}e_4(\mathrm{s}) \qquad (4.19) \\
&= \frac{\alpha k_2 k_3}{\sqrt{1-\alpha k_1}}e_4(\mathrm{s})
\end{aligned}
$$

elde edilir. k_3 sıfırdan farklı olduğundan

$$
\hat{k}_1\big(f(\mathrm{s})\big) := \left\|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{e}}_1(\hat{\mathrm{s}})}{\mathrm{d}\hat{\mathrm{s}}}\right\| = sign(k_3)\frac{\alpha k_2 k_3}{1-\alpha k_1} > 0 \qquad (4.20)
$$

elde edilir. Burada $sign(k_3)$, k_3 fonksiyonunun işaretini temsil etmektedir. Eğer k_3 fonksiyonu pozitifse $sign(k_3) = +1,$ negatifse $sign(k_3) = -1$ dir.
Yani her bir s $\in L$ için $sign(k_3)k_3(\mathrm{s})$ ifadesi pozitiftir.
Frenet denklemlerinden

$$
\hat{\mathrm{e}}_2(\hat{\mathrm{s}}) := \frac{1}{\hat{k}_1(\hat{\mathrm{s}})}\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{e}}_1(\hat{\mathrm{s}})}{\mathrm{d}\hat{\mathrm{s}}} \qquad (4.21)
$$

eşitliği mevcuttur. (4.19), (4.20) ve (4.21) denklemleri birlikte düşünülürse,

$$
\hat{\mathrm{e}}_2\big(f(\mathrm{s})\big) = sign(k_3)e_4(\mathrm{s}) \qquad (4.22)
$$

(4.22) denkleminin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$
f'(\mathrm{s})\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{e}}_2(\hat{\mathrm{s}})}{\mathrm{d}\hat{\mathrm{s}}} = -sign(k_3)k_3(\mathrm{s})e_3(\mathrm{s})
$$

elde edilir ve

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{e}}_2(\hat{\mathrm{s}})}{\mathrm{d}\hat{\mathrm{s}}} + \hat{k}_1\big(f(\mathrm{s})\big)\hat{\mathrm{e}}_1\big(f(\mathrm{s})\big) \\
&\qquad = sign(k_3)\frac{\alpha k_2 k_3(\mathrm{s})}{\sqrt{1-\alpha k_1}}e_1(\mathrm{s}) - sign(k_3)k_3(\mathrm{s})\sqrt{1-\alpha k_1}e_3(\mathrm{s})
\end{aligned}
$$

dir. Her bir $s \in L$ için $sign(k_3)k_3(s)$ ifadesi pozitif olduğundan

$$\begin{aligned} \hat{k}_2(f(s)) &= \left\| \frac{d\hat{e}_2(\hat{s})}{d\hat{s}} + \hat{k}_1(f(s))\hat{e}_1(f(s)) \right\| \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^2 k_2{}^2 (k_3(s))^2}{1-\alpha k_1} + (1-\alpha k_1)(k_3(s))^2} = \sqrt{(k_3(s))^2} \\ &= sign(k_3)k_3(s) > 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_3(f(s)) &= \frac{1}{\hat{k}_2(f(s))}\left(\frac{d\hat{e}_2(\hat{s})}{d\hat{s}} + \hat{k}_1(f(s))\hat{e}_1(f(s))\right) \\ &= \frac{\alpha k_2}{\sqrt{1-\alpha k_1}} e_1(s) - \sqrt{1-\alpha k_1} e_3(s) \end{aligned} \tag{4.24}$$

eşitliği elde edilir. (4.24) denkleminin türevi alınırsa

$$f'(s)\frac{d\hat{e}_3(\hat{s})}{d\hat{s}} = \frac{k_2}{\sqrt{1-\alpha k_1}} e_2(s) - \sqrt{1-\alpha k_1} k_3(s) e_4(s) \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.25) , (4.23) ve (4.22) birlikte düşünülürse,

$$\frac{d\hat{e}_3(\hat{s})}{d\hat{s}} + \hat{k}_2(f(s))\hat{e}_2(f(s)) = \frac{k_2}{1-\alpha k_1} e_2(s) \tag{4.26}$$

elde edilir.

Uyarı 4.1. deki Adım IV den

$$\hat{e}_4(f(s)) := \varepsilon \frac{1}{\|\hat{k}_3(f(s))\|}\left(\hat{e}_3{}'(f(s)) + \hat{k}_2(f(s))\hat{e}_2(f(s))\right) \tag{4.27}$$

eşitliği vardır. (4.26) eşitliği (4.27) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\hat{e}_4(f(s)) = \varepsilon e_2(s)$$

elde edilir.

ε un işareti $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ Frenet çatısının determinantı hesaplanarak bulunur.

$\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ Frenet çatısı pozitif yönlü olduğundan

$det\{e_1(\mathrm{s}), e_2(\mathrm{s}), e_3(\mathrm{s}), e_4(\mathrm{s})\} = 1$ dir.

$$\begin{aligned} det\big[\hat{e}_1(f(\mathrm{s})), \hat{e}_2(f(\mathrm{s})), \hat{e}_3(f(\mathrm{s})), \hat{e}_4(f(\mathrm{s}))\big] \\ &= det\big[\sqrt{1-\alpha k_1}\, e_1(\mathrm{s}), sign(k_3) e_4(\mathrm{s}), -\sqrt{1-\alpha k_1}\, e_3(\mathrm{s}), \varepsilon e_2(\mathrm{s})\big] \\ &+ det\left[\frac{\alpha k_2}{\sqrt{1-\alpha k_1}} e_3(\mathrm{s}), sign(k_3) e_4(\mathrm{s}), \frac{\alpha k_2}{\sqrt{1-\alpha k_1}} e_1(\mathrm{s}), \varepsilon e_2(\mathrm{s})\right] \\ &= sign(k_3)\varepsilon\left((1-\alpha k_1) + \frac{\alpha^2 {k_2}^2}{1-\alpha k_1}\right) = sign(k_3)\varepsilon \end{aligned}$$

$det\big[\hat{e}_1(f(\mathrm{s})), \hat{e}_2(f(\mathrm{s})), \hat{e}_3(f(\mathrm{s})), \hat{e}_4(f(\mathrm{s}))\big] = 1$ olduğundan

$\varepsilon = sign(k_3)$ bulunur. Böylece her bir s ∈ L için

$$\hat{e}_4(f(\mathrm{s})) = sign(k_3) e_2(\mathrm{s})$$

ve

$$\hat{k}_3(f(\mathrm{s})) = \langle \frac{d\hat{e}_3(\hat{\mathrm{s}})}{d\hat{\mathrm{s}}}, \hat{e}_4(f(\mathrm{s}))\rangle = sign(k_3)\frac{k_2}{1-\alpha k_1}, \mathrm{s} \in \mathrm{L}$$

mevcuttur. Yukarıdaki durumlardan C eğrisinin birinci normali ile Ĉ eğrisinin üçüncü normali çakıştığı görülmektedir.

ii) C eğrisi E^4 te Frenet çatısı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve eğrilik fonksiyonları k_1, k_2, k_3 olan özel bir Frenet eğrisi olsun. Ĉ eğrisi de Frenet çatısı $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ ve eğrilik fonksiyonları $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3$ olan özel bir Frenet eğrisi olsun. C eğrisinin her bir noktasındaki birinci normalinin Φ dönüşümü altında Ĉ eğrisinin karşılık gelen noktasındaki üçüncü normali ile çakıştığı kabul edilsin. Ĉ eğrisi

$$\hat{x}(s) = x(s) + \alpha(s)e_2(s)\ , s \in L \tag{4.28}$$

ile verilsin.

$\hat{C}$ eğrisinin yay parametresi $\hat{s}$

$$\hat{s} = f(s) = \int_0^s \sqrt{\left(1-\alpha(s)k_1(s)\right)^2 + \left(\alpha'(s)\right)^2 + \left(\alpha(s)k_2(s)\right)^2}$$

dır. Burada $f : L \to \hat{L}, s \to f(s) = \hat{s}$ birebir ve örten dönüşümü $\Phi\big(x(s)\big) = \hat{x}\big(f(s)\big)$ ile verilsin.

(4.28) denkleminin türevi alınırsa

$$f'(s)\hat{e}_1\big(f(s)\big) = \big(1-\alpha(s)k_1(s)\big)e_1(s) + \alpha'(s)e_2(s) + \alpha(s)k_2(s)e_3(s) \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.29) denkleminin her iki tarafı $\hat{e}_4\big(f(s)\big)$ vektörü ile iç çarpılırsa,

$$\langle f'(s)\hat{e}_1\big(f(s)\big), \hat{e}_4\big(f(s)\big)\rangle = 0$$

bulunur. Diğer taraftan $\hat{e}_4\big(f(s)\big) = \pm e_2(s)$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\langle f'(s)\hat{e}_1\big(f(s)\big), \hat{e}_4\big(f(s)\big)\rangle \\ &= \langle\big(1-\alpha(s)k_1(s)\big)e_1(s) + \alpha'(s)e_2(s) \\ &+ \alpha(s)k_2(s)e_3(s), \pm e_2(s)\rangle = \pm\alpha'(s) \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha'(s) = 0$ olur. Bu ise $\alpha(s)$ in sabit olduğunu gösterir. Bundan sonraki kısımlarda $\alpha(s) = \alpha$ olarak alınabilir.

$$f'(s) = \sqrt{\left(1-\alpha k_1(s)\right)^2 + \left(\alpha k_2(s)\right)^2} > 0$$

ve (4.29) denklemi

$$\hat{e}_1\big(f(s)\big) = \left(\frac{1-\alpha k_1(s)}{f'(s)}\right)e_1(s) + \left(\frac{\alpha k_2(s)}{f'(s)}\right)e_3(s) \tag{4.30}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. (4.30) denkleminin türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
f'(\mathrm{s})\hat{k}_1\big(f(\mathrm{s})\big)\hat{\mathrm{e}}_2\big(f(\mathrm{s})\big)
&= \left(\frac{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)' e_1(\mathrm{s}) \\
&+ \left(\frac{k_1(\mathrm{s}) - \alpha\left\{\big(k_1(\mathrm{s})\big)^2 + \big(k_2(\mathrm{s})\big)^2\right\}}{f'(\mathrm{s})}\right) e_2(\mathrm{s}) \\
&+ \left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)' e_3(\mathrm{s}) + \left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s}) k_3(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right) e_4(\mathrm{s})
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

elde edilir. (4.31) denkleminin her iki tarafı $\hat{\mathrm{e}}_4\big(f(\mathrm{s})\big)$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$< f'(\mathrm{s})\hat{k}_1\big(f(\mathrm{s})\big)\hat{\mathrm{e}}_2\big(f(\mathrm{s})\big), \hat{\mathrm{e}}_4\big(f(\mathrm{s})\big) > = 0$$

elde edilir. $\hat{\mathrm{e}}_4\big(f(\mathrm{s})\big) = \pm e_2(\mathrm{s})$ olduğundan

$$k_1(\mathrm{s}) = \alpha\left\{\big(k_1(\mathrm{s})\big)^2 + \big(k_2(\mathrm{s})\big)^2\right\}$$

denklemi bulunur. Burada α pozitif sabittir. Böylece (4.31) denklemi

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathrm{e}}_2\big(f(\mathrm{s})\big) &= \frac{1}{f'(\mathrm{s})K(\mathrm{s})}\left(\frac{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)' e_1(\mathrm{s}) \\
&+ \frac{1}{f'(\mathrm{s})K(\mathrm{s})}\left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)' e_3(\mathrm{s}) \\
&+ \frac{1}{f'(\mathrm{s})K(\mathrm{s})}\left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s}) k_3(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right) e_4(\mathrm{s})
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada $K(\mathrm{s}) = \hat{k}_1\big(f(\mathrm{s})\big)$ dir. (4.32) denkleminin türevi alınırsa

$$f'(\mathrm{s})\{-\hat{k}_1(f(\mathrm{s}))\hat{\mathrm{e}}_1(f(\mathrm{s}))+\hat{k}_2(f(\mathrm{s}))\hat{\mathrm{e}}_3(f(\mathrm{s}))\}$$
$$\begin{aligned}
&= \left\{\frac{1}{f'(\mathrm{s})K(\mathrm{s})}\left(\frac{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)'\right\}' e_1(\mathrm{s}) \\
&+ \left\{\frac{k_1(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})K(\mathrm{s})}\left(\frac{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)' \right. \\
&\left. - \frac{k_2(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})K(\mathrm{s})}\left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)'\right\} e_2(\mathrm{s}) \\
&+ \left\{\left(\frac{1}{f'(\mathrm{s})K(\mathrm{s})}\left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)'\right)' \right. \\
&\left. - \frac{k_3(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})K(\mathrm{s})}\left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})k_3(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)\right\} e_3(\mathrm{s}) \\
&+ \left\{\left(\frac{1}{f'(\mathrm{s})K(\mathrm{s})}\left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})k_3(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)\right)' \right. \\
&\left. + \frac{k_3(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})K(\mathrm{s})}\left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)'\right\} e_4(\mathrm{s})
\end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir. Frenet denklemlerinden

$$< f'(\mathrm{s})\{-\hat{k}_1(f(\mathrm{s}))\hat{\mathrm{e}}_1(f(\mathrm{s}))+\hat{k}_2(f(\mathrm{s}))\hat{\mathrm{e}}_3(f(\mathrm{s}))\}, \hat{\mathrm{e}}_4(f(\mathrm{s})) > = 0$$

elde edilir ve $\hat{\mathrm{e}}_4(f(\mathrm{s})) = \pm e_2(\mathrm{s})$ olduğundan

$$k_1(\mathrm{s})\left(\frac{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)' - k_2(\mathrm{s})\left(\frac{\alpha k_2(\mathrm{s})}{f'(\mathrm{s})}\right)' = 0$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
&\alpha k_1(\mathrm{s})k_1{}'(\mathrm{s})f'(\mathrm{s}) + k_1(\mathrm{s})(1-\alpha k_1(\mathrm{s}))f''(\mathrm{s}) + \alpha k_2(\mathrm{s})k_2{}'(\mathrm{s})f'(\mathrm{s}) \\
&\quad - \alpha k_2(\mathrm{s})^2 f''(\mathrm{s}) = 0,
\end{aligned}$$

$$f'(\mathrm{s}) = \sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}$$

ve

$$f''(\mathrm{s}) = -\frac{\alpha {k_1}'(\mathrm{s})}{2\sqrt{1-\alpha k_1(\mathrm{s})}} = \frac{\alpha {k_1}'(\mathrm{s})}{2f'(\mathrm{s})}$$

eşitlikleri kullanılırsa ${k_1}'(\mathrm{s}) = 0$ bulunur. Bu ifade birinci eğrilik fonksiyonunun pozitif sabit olduğunu gösterir.
$k_1 = \alpha\{(k_1)^2 + (k_2)^2\}$ eşitliğinden k_2 fonksiyonunun da pozitif sabit olduğu görülür. Teorem böylece ispatlanmıştır.

Teorem 4.1.4. C eğrisi aşağıdaki gibi tanımlı bir eğri olsun.

$$\mathrm{x}(u) = \begin{bmatrix} \alpha \int f(u)\sin u \, du \\ \alpha \int f(u)\cos u \, du \\ \alpha \int f(u)g(u)\, du \\ \alpha \int f(u)h(u)\, du \end{bmatrix}, u \in U \subset IR$$

α pozitif sabit, g ve $h : U \to IR$ düzgün fonksiyonlar ve $f : U \to IR$ olmak üzere f fonksiyonu her bir $u \in U$ için aşağıdaki gibi verilsin.

$$
\begin{aligned}
f(u) = {} & \left(1+(g(u))^2+(h(u))^2\right)^{-\frac{3}{2}}.\Big\{1+(g(u))^2+(h(u))^2 \\
& +(\dot{g}(u))^2+\left(\dot{h}(u)\right)^2 \\
& +\left(g(u)\dot{h}(u)-\dot{g}(u)h(u)\right)^2\Big\}^{-\frac{5}{2}}.\Big[\Big\{1+(g(u))^2 \\
& +(h(u))^2+(\dot{g}(u))^2+\left(\dot{h}(u)\right)^2 \\
& +\left(g(u)\dot{h}(u)-\dot{g}(u)h(u)\right)^2\Big\}^3 \\
& +\left(1+(g(u))^2+(h(u))^2\right)^3.\Big\{(g(u)+\ddot{g}(u))^2 \\
& +\left(h(u)+\ddot{h}(u)\right)^2 \\
& +\Big(\left(g(u)\dot{h}(u)-\dot{g}(u)h(u)\right) \\
& -\left(\dot{g}(u)\ddot{h}(u)-\ddot{g}(u)\dot{h}(u)\right)\Big)^2 \\
& +\left(g(u)\ddot{h}(u)-\ddot{g}(u)h(u)\right)^2\Big\}\Big]
\end{aligned}
$$

Burada u ya göre türev $(\dot{\ })$ olarak gösterilmiştir. C eğrisinin her bir $\mathrm{x}(u)$ noktasında eğrinin birinci eğrilik fonksiyonu k_1 ve ikinci eğrilik fonksiyonu k_2 aşağıdaki eşitliği sağlarlar [4].

$$
k_1(u) = \alpha\left\{(k_1(u))^2+(k_2(u))^2\right\}
$$

İspat. C eğrisi aşağıdaki tanımlı bir eğri olsun. Burada α pozitif sabit, g ve $h : U \to IR$ düzgün fonksiyonlar ve $f : U \to IR$ pozitif değerli düzgün bir fonksiyondur.

$$\mathrm{x}(u) = \begin{bmatrix} \alpha \int f(u) \sin u \, du \\ \alpha \int f(u) \cos u \, du \\ \alpha \int f(u) g(u) \, du \\ \alpha \int f(u) h(u) \, du \end{bmatrix}, u \in U \subset IR \tag{4.34}$$

(4.34) eşitliğinin u ya göre türevi alınırsa

$$\dot{\mathrm{x}}(u) = \begin{bmatrix} \alpha f(u) \sin u \\ \alpha f(u) \cos u \\ \alpha f(u) g(u) \\ \alpha f(u) h(u) \end{bmatrix}, u \in U \tag{4.35}$$

elde edilir. *C* eğrisinin yay parametresi s olmak üzere,

$$\mathrm{s} = \psi(u) = \int_{u_o}^{u} \|\dot{\mathrm{x}}(u)\| \, du \tag{4.36}$$

(4.36) denkleminin türevi alınırsa ve (4.35) eşitliği kullanılırsa,

$$\|\dot{\mathrm{x}}(u)\| = \alpha f(u) \left\{1 + \left(g(u)\right)^2 + \left(h(u)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.37}$$

elde edilir.

$\psi : U \to L \subset IR$ fonksiyonunun tersi φ olsun. Bu durumdan

$$u = \varphi(\mathrm{s})$$

$$\varphi'(\mathrm{s}) = \left\| \frac{d\mathrm{x}(u)}{du} \right\|^{-1}, \mathrm{s} \in L$$

yazılır.

$$\frac{ds}{du} = \|\dot{\mathrm{x}}(u)\|, \quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\mathrm{x}}(u)\|} = \varphi'(\mathrm{s})$$

olarak bulunur.

Burada s'e göre türev ($'$) şeklinde gösterilmiştir. C eğrisinin her bir $\mathrm{x}\big(\varphi(\mathrm{s})\big)$ noktasındaki birim teğet vektörü olan $e_1(\mathrm{s})$,

$$e_1(\mathrm{s}) = \frac{d\mathrm{x}\big(\varphi(\mathrm{s})\big)}{ds} = \frac{d\mathrm{x}}{du}\frac{du}{ds} = \frac{d\mathrm{x}}{du}\varphi'(\mathrm{s}) = \frac{d\mathrm{x}}{du}\frac{1}{\|\dot{\mathrm{x}}(u)\|} = \frac{\dot{\mathrm{x}}(u)}{\|\dot{\mathrm{x}}(u)\|}$$

şeklindedir. (4.35) ve (4.37) eşitlikleri birlikte ele alınırsa,

$$e_1(\mathrm{s}) = \begin{bmatrix} \left\{1+\Big(g\big(\varphi(\mathrm{s})\big)\Big)^2+\Big(h\big(\varphi(\mathrm{s})\big)\Big)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\sin\big(\varphi(\mathrm{s})\big) \\ \left\{1+\Big(g\big(\varphi(\mathrm{s})\big)\Big)^2+\Big(h\big(\varphi(\mathrm{s})\big)\Big)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\cos\big(\varphi(\mathrm{s})\big) \\ \left\{1+\Big(g\big(\varphi(\mathrm{s})\big)\Big)^2+\Big(h\big(\varphi(\mathrm{s})\big)\Big)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}g\big(\varphi(\mathrm{s})\big) \\ \left\{1+\Big(g\big(\varphi(\mathrm{s})\big)\Big)^2+\Big(h\big(\varphi(\mathrm{s})\big)\Big)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}h\big(\varphi(\mathrm{s})\big) \end{bmatrix}, \mathrm{s} \in L \tag{4.38}$$

olarak bulunur. Aşağıda kolaylık olması açısından bazı terimlerin kısaltmaları verilmiştir.

$$f := f\big(\varphi(\mathrm{s})\big)\ , g := g\big(\varphi(\mathrm{s})\big), h := h\big(\varphi(\mathrm{s})\big)$$

$$\dot{g} := \dot{g}\big(\varphi(\mathrm{s})\big) = \frac{dg(u)}{du} \quad , \dot{h} := \dot{h}\big(\varphi(\mathrm{s})\big) = \frac{dh(u)}{du}$$

$$\ddot{g} := \ddot{g}\big(\varphi(\mathrm{s})\big) = \frac{d^2g(u)}{du^2} \quad , \ddot{h} := \ddot{h}\big(\varphi(\mathrm{s})\big) = \frac{d^2h(u)}{du^2}$$

$$\varphi' := \varphi'(\mathrm{s}) = \frac{d\varphi(\mathrm{s})}{ds}$$

$$A := 1 + g^2 + h^2\ , B := g\dot{g} + h\dot{h}\ , \quad C := \dot{g}^2 + \dot{h}^2$$

$$D := g\ddot{g} + h\ddot{h}\ , \ E := \dot{g}\ddot{g} + \dot{h}\ddot{h} \quad , \quad F := \ddot{g}^2 + \ddot{h}^2$$

Buradan u ya türev alınırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\dot{A} = 2B \quad , \dot{B} = C + D \quad , \dot{C} = 2E \quad , \varphi' = \alpha^{-1} f^{-1} A^{-1/2}$$

Kısaltmalar yerine yazılırsa (4.38) eşitliği

$$e_1 = e_1(\mathrm{s}) = \begin{bmatrix} A^{-1/2}\sin(\varphi(\mathrm{s})) \\ A^{-1/2}\cos(\varphi(\mathrm{s})) \\ A^{-1/2}\, g \\ A^{-1/2} h \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.39) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} {e_1}' &= \varphi' \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}A^{-\frac{3}{2}}\dot{A}\ \sin(\varphi(\mathrm{s})) + A^{-\frac{1}{2}}\cos(\varphi(\mathrm{s})) \\ -\frac{1}{2}A^{-\frac{3}{2}}\dot{A}\ \cos(\varphi(\mathrm{s})) - A^{-\frac{1}{2}}\sin(\varphi(\mathrm{s})) \\ -\frac{1}{2}A^{-\frac{3}{2}}\dot{A}\ g + A^{-\frac{1}{2}}\dot{g} \\ -\frac{1}{2}A^{-\frac{3}{2}}\dot{A}\ h + A^{-\frac{1}{2}}\dot{h} \end{bmatrix} \\ &= \varphi' \begin{bmatrix} -A^{-\frac{3}{2}}B\sin(\varphi(\mathrm{s})) + A^{-\frac{1}{2}}\cos(\varphi(\mathrm{s})) \\ -A^{-\frac{3}{2}}B\cos(\varphi(\mathrm{s})) - A^{-\frac{1}{2}}\sin(\varphi(\mathrm{s})) \\ -A^{-\frac{3}{2}}Bg + A^{-\frac{1}{2}}\dot{g} \\ -A^{-\frac{3}{2}}Bh + A^{-\frac{1}{2}}\dot{h} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.40}$$

elde edilir.

Frenet formüllerinden

$$k_1 := k_1(\mathrm{s}) = \|{e_1}'\| = \varphi' A^{-1}(A + AC - B^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.41}$$

dir.

$$e_2 = (k_1)^{-1} {e_1}'$$

(4.40) ve (4.41) eşitlikleri kullanılıp ve $(A + AC - B^2)^{-1/2} = T$ olarak alınırsa,

$$e_2 = \begin{bmatrix} -A^{-1/2}BT\sin\big(\varphi(\mathrm{s})\big) + A^{1/2}T\cos\big(\varphi(\mathrm{s})\big) \\ -A^{-1/2}BT\cos\big(\varphi(\mathrm{s})\big) - A^{1/2}T\sin\big(\varphi(\mathrm{s})\big) \\ -A^{-1/2}BTg + A^{1/2}T\dot{g} \\ -A^{-1/2}BTh + A^{1/2}T\dot{h} \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

elde edilir. (4.42) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} e_2{}' = \big(&\varphi' A^{-3/2}(A + AC - B^2)^{-1/2}(B^2 - AC - AD) \\ &+ \varphi' A^{-1/2}(A + AC - B^2)^{-3/2}B(B + AE - BD) \\ &- \varphi' A^{1/2}(A + AC - B^2)^{-1/2}\big)sin\big(\varphi(\mathrm{s})\big) \\ &- \Big(\varphi' A^{1/2}(A + AC - B^2)^{-3/2}(B + AE \\ &- BD)\Big)\cos\big(\varphi(\mathrm{s})\big), \big(\varphi' A^{-3/2}(A + AC - B^2)^{-1/2}(B^2 \\ &- AC - AD) \\ &+ \varphi' A^{-1/2}(A + AC - B^2)^{-3/2}B(B + AE - BD) \\ &- \varphi' A^{1/2}(A + AC - B^2)^{-1/2}\big)\cos\big(\varphi(\mathrm{s})\big) \\ &+ \Big(\varphi' A^{1/2}(A + AC - B^2)^{-3/2}(B + AE \\ &- BD)\Big)sin\big(\varphi(\mathrm{s})\big), \Big(\varphi' A^{-3/2}(A + AC - B^2)^{-1/2}(B^2 \\ &- AC - AD) \\ &+ \varphi' A^{-1/2}(A + AC - B^2)^{-3/2}B(B + AE - BD)\Big)\, g \\ &- \Big(\varphi' A^{1/2}(A + AC - B^2)^{-3/2}(B + AE - BD)\Big)\, \dot{g} \\ &+ \big(\varphi' A^{1/2}(A + AC - B^2)^{-1/2}\big)\ddot{g}, \Big(\varphi' A^{-3/2}(A + AC \\ &- B^2)^{-1/2}(B^2 - AC - AD) \\ &+ \varphi' A^{-1/2}(A + AC - B^2)^{-3/2}B(B + AE - BD)h \\ &- \Big(\varphi' A^{1/2}(A + AC - B^2)^{-3/2}(B + AE - BD)\Big)\, \dot{h} \\ &+ \big(\varphi' A^{1/2}(A + AC - B^2)^{-1/2}\big)\ddot{h}\Big) \end{aligned}$$

elde edilir. $(A + AC - B^2)^{-3/2} = \sigma$ olarak alınırsa,

$$e_2' + k_1 e_1 = \varphi' A^{-3/2} \sigma \begin{bmatrix} (P-Q)\sin(\varphi(\mathrm{s})) - R\cos(\varphi(\mathrm{s})) \\ (P-Q)\cos(\varphi(\mathrm{s})) + R\sin(\varphi(\mathrm{s})) \\ Pg - R\dot{g} + Q\ddot{g} \\ Ph - R\dot{h} + Q\ddot{h} \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$P = (A + AC - B^2)^2 + (A + AC - B^2)(B^2 - AC - AD) \\ + AB(B + AE - BD)$$

$$Q = A^2(A + AC - B^2)$$

$$R = A^2(B + AE - BD)$$

dir. P ifadesi aynı zamanda

$$P = A^2(1 + C + BE - D - CD)$$

dir. $e_2' + k_1 e_1$ eşitliği

$$e_2' + k_1 e_1 = \varphi' A^{1/2} \sigma \begin{bmatrix} (\tilde{P}-\tilde{Q})\sin(\varphi(\mathrm{s})) - \tilde{R}\cos(\varphi(\mathrm{s})) \\ (\tilde{P}-\tilde{Q})\cos(\varphi(\mathrm{s})) + \tilde{R}\sin(\varphi(\mathrm{s})) \\ \tilde{P}g - \tilde{R}\dot{g} + \tilde{Q}\ddot{g} \\ \tilde{P}h - \tilde{R}\dot{h} + \tilde{Q}\ddot{h} \end{bmatrix}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada

$$\tilde{P} = 1 + C + BE - D - CD$$

$$\tilde{Q} = A + AC - B^2$$

$$\tilde{R} = B + AE - BD$$

dir.

$$
\begin{aligned}
\|e_2' + k_1 e_1\|^2 = (\varphi')^2 A(A + AC - B^2)^{-3}\{&\tilde{P}^2 - 2\tilde{P}\tilde{Q} + \tilde{Q}^2 + \tilde{R}^2 \\
&+ \tilde{P}^2(g^2 + h^2) + \tilde{R}^2(\dot{g}^2 + \dot{h}^2) + \tilde{Q}^2(\ddot{g}^2 + \ddot{h}^2) \\
&- 2\tilde{P}\tilde{R}(g\dot{g} + h\dot{h}) - 2\tilde{R}\tilde{Q}(\dot{g}\ddot{g} + \dot{h}\ddot{h}) + 2\tilde{P}\tilde{Q}(g\ddot{g} + h\ddot{h})\} \\
&= (\varphi')^2 A(A + AC - B^2)^{-3}\{A(1 + C + BE - D - CD)^2 \\
&- 2(1 + C + BE - D - CD)(A + AC - B^2) \\
&+ (A + AC - B^2)^2 + (B + AE - BD)^2 \\
&+ C(B + AE - BD)^2 + F(A + AC - B^2)^2 \\
&- 2B(1 + C + BE - D - CD)(B + AE - BD) \\
&- 2E(B + AE - BD)(A + AC - B^2) \\
&+ 2D(1 + C + BE - D - CD)(A + AC - B^2)\} \\
&= (\varphi')^2 A(A + AC - B^2)^{-3}.\{(A + AC - B^2)^2(1 + F) \\
&+ 2(A + AC - B^2)(D - 1)(1 + C + BE - D - CD) \\
&- 2(A + AC - B^2)E(B + AE - BD) \\
&+ A(1 + C + BE - D - CD)^2 \\
&+ (B + AE - BD)^2(1 + C) \\
&- 2B(1 + C + BE - D - CD)(B + AE - BD)\}
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

(4.43) eşitliğinin son 3 terimi yeniden düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
A(1 + C + BE - D - CD)^2 &+ (B + AE - BD)^2(1 + C) \\
&- 2B(1 + C + BE - D - CD)(B + AE - BD) \\
&= (A + AC - B^2)(1 + C - 2D - 2CD + D^2 + CD^2 \\
&+ 2BE - 2BDE + AE^2)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
(k_2)^2 &= \|e_2' + k_1 e_1\|^2 \\
&= (\varphi')^2 A(A + AC - B^2)^{-2}.\{(A + AC - B^2)(1 + F) \\
&+ 2(D - 1)(1 + C + BE - D - CD) \\
&- 2E(B + AE - BD) + 1 + C - 2D - 2CD + D^2 \\
&+ CD^2 + 2BE - 2BDE + AE^2\}
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

dir.

$$(k_1)^2 = (\varphi')^2 A^{-2}(A + AC - B^2) \tag{4.45}$$

dir. (4.44) ve (4.45) denklemlerinden

$$\begin{aligned}(k_1)^2 + (k_2)^2 = (\varphi')^2 A^{-2}(A + AC - B^2)^{-2}.\{&(A + AC - B^2)^3 \\ &+ A^3(A + AC - B^2 + AF + ACF - B^2F - 1 - C + 2D \\ &+ 2CD - 2BE - AE^2 - D^2 - CD^2 + 2BDE)\}\end{aligned} \tag{4.46}$$

elde edilir. (4.46) denkleminde

$$\varphi' = \alpha^{-1} f^{-1} A^{-1/2}$$

ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}(k_1)^2 + (k_2)^2 = \alpha^{-2} f^{-2} A^{-3}(A + AC - B^2)^{-2}.\{&(A + AC - B^2)^3 \\ &+ A^3(A + AC - B^2 + AF + ACF - B^2F - 1 - C + 2D \\ &+ 2CD - 2BE - AE^2 - D^2 - CD^2 + 2BDE)\}\end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir.

$$k_1 = \alpha^{-1} f^{-1} A^{-3/2}(A + AC - B^2)^{1/2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}f = A^{-3/2}(A + AC - B^2)^{-5/2}.\{&(A + AC - B^2)^3 \\ &+ A^3(A + AC - B^2 + AF + ACF - B^2F - 1 - C + 2D \\ &+ 2CD - 2BE - AE^2 - D^2 - CD^2 + 2BDE)\}\end{aligned} \tag{4.48}$$

şeklinde verilen f fonksiyonu için

$$k_1 = \alpha\{(k_1)^2 + (k_2)^2\}$$

eşitliği sağlanır.

$$A = 1 + g^2 + h^2$$

$$A + AC - B^2 = 1 + g^2 + h^2 + \dot{g}^2 + \dot{h}^2 + \left(g\dot{h} - \dot{g}h\right)^2$$

$$\begin{aligned} A + AC - B^2 + AF + ACF - B^2F - 1 - C + 2D + 2CD - 2BE - AE^2 \\ - D^2 - CD^2 + 2BDE \\ = (g + \ddot{g})^2 + \left(h + \ddot{h}\right)^2 + \left\{\left(g\dot{h} - \dot{g}h\right) - \left(\dot{g}\ddot{h} - \ddot{g}\dot{h}\right)\right\}^2 \\ + \left(g\ddot{h} - \ddot{g}h\right)^2 \end{aligned}$$

ifadeleri (4.48) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f = (1 + g^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}}.\Big\{1 + g^2 + h^2 + \dot{g}^2 + \dot{h}^2 \\ + \left(g\dot{h} - \dot{g}h\right)^2\Big\}^{-\frac{5}{2}}.\Big[\Big\{1 + g^2 + h^2 + \dot{g}^2 + \dot{h}^2 \\ + \left(g\dot{h} - \dot{g}h\right)^2\Big\}^3 \\ + (1 + g^2 + h^2)^3.\Big\{(g + \ddot{g})^2 + \left(h + \ddot{h}\right)^2 \\ + \left(\left(g\dot{h} - \dot{g}h\right) - \left(\dot{g}\ddot{h} - \ddot{g}\dot{h}\right)\right)^2 + \left(g\ddot{h} - \ddot{g}h\right)^2\Big\}\Big] \end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

4.1.1. Genelleştirilmiş Mannheim Eğrilerine Örnek

(1) Teorem 4.1.4. te $g(u)$ ve $h(u)$ fonksiyonları α pozitif bir sabit olmak üzere $g(u) = \sin\mathrm{h}(u)$ ve $\mathrm{h}(u) = \cos\mathrm{h}(u)$ olarak alınsın. Buradan f fonksiyonu

$$f(u) = \frac{1 + \cosh^2 u}{\sqrt{2}\cosh^2 u}$$

şeklinde elde edilir.

E^4 te C eğrisi

$$\mathrm{x} : U \to E^4$$

$$\mathrm{x}(u)=\begin{bmatrix}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\int\frac{1+\cosh^2 u}{\cosh^2 u}\sin u\,du\\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\int\frac{1+\cosh^2 u}{\cosh^2 u}\cos u\,du\\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\int\frac{1+\cosh^2 u}{\cosh^2 u}\sinh u\,du\\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\int\frac{1+\cosh^2 u}{\cosh^2 u}\cosh u\,du\end{bmatrix},u\in U$$

olarak verilsin. *C* eğrisinin yay parametresi s olsun. $u=\varphi(\mathrm{s})$ olarak verilsin. Buradan

$$\frac{du}{ds}=\varphi'(\mathrm{s})=\frac{\cosh\varphi(\mathrm{s})}{\alpha\left(1+\cosh^2\varphi(\mathrm{s})\right)}\quad,s\in L$$

elde edilir. *C* eğrisinin yay parametresi $\mathrm{x}(\mathrm{s})=\mathrm{x}(\varphi(\mathrm{s}))$, şeklinde yeniden parametrize edilsin. Böylece *C* eğrisi

$$\mathrm{x}(\mathrm{s})=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\cosh g(\mathrm{s})}\sin g(\mathrm{s})\,d\,s\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\cosh g(\mathrm{s})}\cos g(\mathrm{s})\,ds\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sinh g(\mathrm{s})}{\cosh g(\mathrm{s})}ds\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\int 1ds\end{bmatrix},s\in L.$$

elde edilir. *C* eğrisi özel Frenet eğrisi olduğu için eğrilik fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur.

$$k_1(\mathrm{s})=\frac{1}{\alpha\left(1+\cosh^2 g(\mathrm{s})\right)},$$

$$k_2(\mathrm{s})=\frac{\cosh g(\mathrm{s})}{\alpha\left(1+\cosh^2 g(\mathrm{s})\right)},$$

$$k_3(\mathrm{s}) = \frac{1}{\alpha\left(1 + \cosh^2 g(\mathrm{s})\right)}.$$

Eğrilik fonksiyonlarının $k_1(s) = \alpha\left\{\left(k_1(s)\right)^2 + \left(k_2(s)\right)^2\right\}$, $s \in L$ eşitliğini sağladığı görülür. Regüler diferensiyellenebilir bir eğri olan Ĉ eğrisi

$$\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{s}) = \mathrm{x}(\mathrm{s}) + \alpha(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s}) \ \ , s \in L$$

şeklinde tanımlansın.

$$\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{s}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \displaystyle\int \frac{1}{\cosh g(\mathrm{s})}\sin g(\mathrm{s})\, d\,s - \alpha\frac{\sinh g(\mathrm{s})}{\cosh g(\mathrm{s})}\sin g(\mathrm{s}) \ + \alpha\cos g(\mathrm{s}) \\ \displaystyle\int \frac{1}{\cosh g(\mathrm{s})}\cos g(\mathrm{s})\, d\,s - \alpha\frac{\sinh g(\mathrm{s})}{\cosh g(\mathrm{s})}\cos g(\mathrm{s}) \ - \alpha\sin g(\mathrm{s}) \\ \displaystyle\int \frac{\sinh g(\mathrm{s})}{\cosh g(\mathrm{s})}ds + \alpha\frac{1}{\cosh g(\mathrm{s})} \\ \displaystyle\int 1ds \end{bmatrix},$$

elde edilir.

Ĉ eğrisinin özel bir Frenet eğrisi olduğunu ispatlanabilir. Buradan C eğrisi E^4 te genelleştirilmiş Mannheim eğrisi ve Ĉ eğrisi, C eğrisinin Mannheim eğri çiftidir [4].

(2) Teorem 4.1.4. ten her bir $u \in U \subset IR$ için $g(u)$ ve $h(u)$ fonksiyonları α pozitif bir sabit ve b değeri birden büyük bir sabit olmak üzere $g(u) = a\sin(bu)$ ve $h(u) = a\cos(bu)$ olarak alınsın. f fonksiyonu

$$f = \frac{1 + a^2b^4}{(1 + a^2b^2)^{3/2}}$$

olarak bulunur.

C eğrisi

$$\mathrm{x}(u)=\begin{bmatrix}\frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}}\int\sin(u)\,du\\ \frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}}\int\cos(u)\,du\\ \frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}}\int\sin(bu)\,du\\ \frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}}\int\cos(bu)\,du\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}}\cos(u)\\ \frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}}\sin(u)\\ -\frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}}\cos(bu)\\ \frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}}\sin(bu)\end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. *C* eğrisinin yay parametresi s olmak üzere

$$u=\frac{(a+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)}s$$

elde edilir.

C eğrisinin yay parametresi cinsinden ifadesi

$$\mathrm{x}(s)=\begin{bmatrix}-\frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{(a+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)}s\right)\\ \frac{\alpha(1+a^2b^4)}{(1+a^2b^2)^{3/2}}\sin\left(\frac{(a+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)}s\right)\\ -\frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{(a+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)}s\right)\\ \frac{\alpha a(1+a^2b^4)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}}\sin\left(\frac{(a+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)}s\right)\end{bmatrix},s\in L$$

dir. *C* eğrisi özel bir Frenet eğrisi ve $s\in L$ için eğriliklerin ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$k_1(\mathrm{s})=\frac{(1+a^2b^2)^2}{\alpha(1+a^2)(1+a^2b^4)}\ ,$$

$$k_2(\mathrm{s})=\frac{a(b^2-1)(1+a^2b^2)}{\alpha(1+a^2)(1+a^2b^4)}\ ,$$

$$k_3(\mathrm{s})=\frac{b(1+a^2b^2)}{\alpha(1+a^2b^4)}\ .$$

k_1, k_2, k_3 eğrilik fonksiyonları sabittir ve $k_1 = \alpha\{(k_1)^2 + (k_2)^2\}$ eşitliğini sağlarlar. Ĉ diferensiyellenebilen eğrisi

$$\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{s}) = \mathrm{x}(\mathrm{s}) + \alpha(\mathrm{s})e_2(\mathrm{s}), s \in L$$

olarak tanımlansın. Ĉ eğrisinin yay parametresi ŝ olsun.

$$s = \frac{(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)^{1/2}}{a(b^2-1)}\hat{\mathrm{s}}$$

elde edilir. Ĉ eğrisinin yay parametresi ile gösterimi

$$\hat{\mathrm{x}} \ : \hat{L} \to \ E^4$$

$$\hat{\mathrm{x}}(\hat{\mathrm{s}}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\alpha a^2b^2(b^2-1)}{(1+a^2b^2)^{3/2}}\cos\left(\dfrac{(1+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha a(b^2-1)(1+a^2b^4)^{1/2}}\hat{\mathrm{s}}\right) \\ \dfrac{\alpha a^2b^2(b^2-1)}{(1+a^2b^2)^{3/2}}\sin\left(\dfrac{(1+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha a(b^2-1)(1+a^2b^4)^{1/2}}\hat{\mathrm{s}}\right) \\ \dfrac{\alpha a(b^2-1)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}}\cos\left(\dfrac{b(1+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha a(b^2-1)(1+a^2b^4)^{1/2}}\hat{\mathrm{s}}\right) \\ -\dfrac{\alpha a(b^2-1)}{b(1+a^2b^2)^{3/2}}\sin\left(\dfrac{b(1+a^2b^2)^{3/2}}{\alpha a(b^2-1)(1+a^2b^4)^{1/2}}\hat{\mathrm{s}}\right) \end{bmatrix}, \hat{\mathrm{s}} \in \hat{L}$$

dir. Sonuç olarak Ĉ eğrisi E^4 te özel bir Frenet eğrisi ve

$\varphi \ : \mathrm{C} \to \hat{\mathrm{C}}$ olmak üzere $\varphi(\mathrm{x}(\mathrm{s})) = \hat{\mathrm{x}}(\hat{\mathrm{s}})$ birebir ve örten fonksiyonu mevcuttur ve

$$\hat{\mathrm{s}} = \frac{a(b^2-1)}{(1+a^2)^{1/2}(1+a^2b^4)^{1/2}}s$$

şeklindedir. *C* eğrisinin her bir noktadaki birinci normal doğrusu Φ dönüşümü altında karşılık gelen noktalarında Ĉ eğrisinin üçüncü normal doğrusuna karşılık gelir. Böylece *C* eğrisi E^4 te genelleştirilmiş bir Mannheim eğrisidir [4].

KAYNAKÇA

[1]. Mannheim, A.; Paris C. R. **1878**, 86, 1254-1256.

[2]. Blum, R. *A Remarkable Class of Mannheim-Curves*, Canad. Math. Bull. **1966**, 9, 223-228.

[3]. Liu, H. L.; Wang, F. *Mannheim partner curves in 3-space*, J. Geom, **2008**, 88, 120-126.

[4]. Matsuda, H.; Yorozu, S. *On Generalized Mannheim Curves in Euclidean 4-Space*, Nihonkai Math. J. **2009**, 20, 33-56.

[5]. Hacısalihoğlu, H. H. *Diferensiyel Geometri 1.* Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 1998.

[6]. Chen, B. Y. *When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?* Amer. Math. Monthly, **2003**, 110 147-152.

[7]. Salkowski, E. *Zur transformation von raumkurven. Mathematische Annalen.* **1909**, 66, 517–557.

[8]. Monterde, J. *Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion*, Comput. Aided Geomet. Design. **2009**, 26, 271–278.

[9]. Eisenhart, L. P. *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover Publication, New York, 1960.

[10]. Hsiung, C. C. A First Course in Differential Geometry, International Press, Massachusetts, 1997.

[11]. Otsuki, T. *Differential Geometry (Japanese)*, Asakura Shoten, Tokyo, 1961.

[12]. Sasaki, S. *Elementary Differential Geometry (Japanese)*, Hirokawa Shoten, Tokyo, 1965.

[13]. Do Carmo, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Pearson Publication, Taiwan, 1976.

[14]. Wang, F.; Liu, H. L. *Mannheim partner curves in 3-Euclidean space*, Math. Practice Theory, **2007**, 37, 141-143.

[15]. Struik, D. J. *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover Publication, 1988.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

ADI, SOYADI : FUNDA KAYMAZ

DOĞUM YERİ : KIRŞEHİR

DOĞUM TARİHİ : 15.01.1990

EĞİTİM BİLGİLERİ

LİSE : Kırşehir Hacı Fatma Erdemir Anadolu Lisesi

LİSANS : Erciyes Üniversitesi Ziya Eren Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü

YÜKSEK LİSANS : Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü

YABANCI DİL : İngilizce

GÖREVİ

Milli Eğitim Bakanlığı İlköğretim Matematik Öğretmeni