T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖKLİD VE İKİ İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDİYEN UZAYDA V_i VE (j,k) $-$TİP HELİSLER

HASAN ALTINBAŞ

DOKTORA TEZİ

KIRŞEHİR / 2020

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖKLİD VE İKİ İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDİYEN UZAYDA V_i VE $(j,k)-$TİP HELİSLER

HASAN ALTINBAŞ

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. LEVENT KULA

KIRŞEHİR / 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

HASAN ALTINBAŞ

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Doktoraya başlamamda ve doktora ders sürecinde kendisini tanıdığım günden bu yana gösterdiği sakin ve sabırlı hali ile her zaman bana örnek olmasının yanı sıra bir bilim adamının nasıl çalışması gerektiğini kendisinden öğrendiğim değerli danışmanım Prof. Dr. Levent KULA'ya büyük bir içtenlikle teşekkür ederim. Tezimin her aşamasında gerek sorularımla gerekse altı ayda bir yapılan tez izleme komitesi sunumlarında tezin şekillenmesinde ve nihai hale gelmesinde katkıları olan değerli jüri üyelerim Prof. Dr. Kazım İLARSLAN ve Doç. Dr. Bülent ALTUNKAYA'ya teşekkürlerimi içtenlikle sunarım.

Tezimi eşim Seda, çocuklarım Muhammed Berhan ve Yusuf Serhat'a ithaf ederim.

Eylül, 2020 HASAN ALTINBAŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{R}^n_\nu$	: n boyutlu ν indeksli yarı-Öklidiyen uzay
$\langle , \rangle$	: $\mathbb{R}^n$ deki Öklid iç çarpım
$\Vert \cdot \Vert$	: $\mathbb{R}^n$ deki Öklid norm
$g\left(, \right)$	: $\mathbb{R}^n_\nu$ deki skalar çarpım
$\Vert \cdot \Vert_s$	: $\mathbb{R}^n_\nu$ deki norm
V_i	: Serret Frenet vektör alanları $(1 \leq i \leq n)$
κ_i	: Bir eğrinin eğrilikleri $(1 \leq i \leq n-1)$
s	: Yay uzunluğu parametresi
$H_{(j,i)}$	: $\mathbb{R}^n$ de j.tip harmonik eğrilik fonksiyonu $(1 \leq i, j \leq n)$
$\mathbb{H}_{(j,i)}$	: $\mathbb{R}^n_\nu$ de j.tip harmonik eğrilik fonksiyonu $(1 \leq i, j \leq n)$

ÖZET

DOKTORA TEZİ

ÖKLİD VE İKİ İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDİYEN UZAYDA V_i VE $(j,k)-$TİP HELİSLER

HASAN ALTINBAŞ

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. LEVENT KULA

Bu tez çalışması, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmıdır. İkinci bölümde, tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, literatür bilgisi oluşturulmuştur. Dördüncü bölümde, $n-$boyutlu Öklid uzayda, V_{n-1} helis harmonik eğrilik fonksiyonuna bağlı olarak karakterize edilmiştir. İlaveten, $(j,k)-$tip helis tanımlanmış ve $4-$boyutlu Öklid uzayda bu tip eğrilere örnekler verilmiştir. Literatür bilgisi kullanılarak 4 ve 5 boyutlu Öklid uzayında bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, $5-$boyutlu Öklid uzayında V_3 helis eğrisi karakterize edilmiştir. Beşinci bölümde, n-boyutlu 2 indeksli yarı-Öklidiyen uzayda harmonik eğriliklere bağlı olarak V_1, V_2, V_{n-1} ve V_n helisler karakterize edilmiştir. Ayrıca, $n=4$ durumu için bazı sonuçlar elde edilip $(1,4)-$tip helis örneği verilmiştir. Son olarak, n-boyutlu 2 indeksli yarı-Öklidiyen uzayda uzaysı ve zamansı polinom helis aileleri verilmiştir.

Eylül 2020, 105 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Öklid uzay, yarı-Öklidiyen uzay, harmonik eğrilik, $(j,k)-$tip helis, polinom helis.

ABSTRACT

PhD THESIS

V_i AND (j, k) −TYPE HELICES IN EUCLIDEAN AND SEMI-EUCLIDEAN SPACE WITH INDEX TWO

HASAN ALTINBAŞ

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. LEVENT KULA

This thesis consists of five chapters. The first chapter is introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. In the third chapter consists of literature. In the fourth chapter, we characterize V_{n-1} helix depending on harmonic curvature function in n-dimensional Euclidean space. In addition, (j, k) −type helix is defined and we give examples of this type curves in 4-dimensional Euclidean space. Using earlier knowledge in literature, we get some results in 4 and 5-dimensional Euclidean space. Also, V_3 helix has been characterized in 5-dimensional Euclidean space. In the fifth chapter, we characterize V_1, V_2, V_{n-1} and V_n helices depending on harmonic curvature in n-dimensional semi-Euclidean space with index 2. Further, for the case $n = 4$, we obtain some results and give an example of $(1, 4)$ −type helix. Also, we obtain some families of spacelike and timelike polynomial helices polynomial helix are given in n-dimensional semi-Euclidean space with index 2.

September 2020, 105 Pages.

Keywords: Euclidean space, semi-Euclidean space, harmonic curvature, (j, k) −type helix, polynomial helix.

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride, eğriler teorisi önemli bir alandır. Eğriler teorisi Öklid ve Öklid olmayan uzaylarda yoğun olarak çalışılmış ve halen çalışılmaya devam etmektedir. Bu teoride iki kavram çok önemlidir. Bunlar; eğrinin Frenet denklemleri ve eğrilikleridir. Bu kavramların yardımı ile eğrinin geometrik özellikleri incelenmekte ve karakterizasyonlar verilmektedir. Eğriler teorisinde, başlıca özel eğrilere Mannheim, Bertrand, İnvolüt-evolüt ve helisler örnek olarak verilebilir.

Helisin karakterizasyon çalışmaları, diğer bilim dalları ve uygulamalarında önemli bir yer tutar. Örneğin; doğa bilimi, mimari, kinematik, mekanik, CAD vesaire gibi [1].

1802 yılında, M. A. Lancret 3-boyutlu Öklid uzayında genel helisi ifade etmiştir ve 1845 yılında, B. de Saint Venant tarafından bir karakterizasyonu verilmiştir [8]. Teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapan eğriye genel helis denir. Bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = sbt$ olmasıdır [3]. Burada κ_1 eğrinin eğriliği, κ_2 eğrinin torsiyonudur.

Izumiya ve Takeuchi, 3-boyutlu Öklid uzayında slant helisi (eğrinin asli normali V_2 ile, sabit bir vektörün sabit açı yapması) tanımlamış ve bazı karakterizasyonlar elde etmiştir [6]. Slant helislerin farklı uzaylarda bir çok yazar tarafından karakterizasyonları incelenmiştir [5, 8, 14]. Örneğin; Kula ve Yaylı, 3-boyutlu Öklid uzayında bir slant helis eğrisinin teğetler ve binormaller göstergelerinin küresel helis olduğunu göstermişlerdir [11].

Özdamar ve Hacısalihoğlu, n-boyutlu Öklid uzayında harmonik eğrilikleri tanımlamış ve genel helis eğrisi için harmonik eğriliklerine bağlı bir karakterizasyon vermiştir [7]. Ambiant uzaylarda genel helislerin karakterizasyonları bir çok yazar tarafından incelenmiştir. Örneğin, n-boyutlu Öklid uzayında [9, 1], de Sitter ve anti de Sitter uzayında [16], Galile uzayında [17, 18], Lie grubunda [19] ve n-boyutlu Minkowski uzayında [20, 21, 22].

n-boyutlu Öklid uzayında Gök ve diğ. V_n slant helis (V_n helis) için yeni bir harmonik eğrilik fonksiyonu tanımlayıp buna bağlı bir karakterizasyon vermişlerdir [13]. Ali ve Turgut 2. tip harmonik eğrilik fonksiyonunu tanımlayıp, slant helisler (V_2 helis) için n-boyutlu Öklid uzayda bazı karakterizasyonlar vermişlerdir [5].

Bu tezde, ilk olarak n-boyutlu Öklid uzayda V_{n-1} slant helis (V_{n-1} helis) için harmonik eğrilik fonksiyonu tanımlanıp buna bağlı olarak V_{n-1} slant helis için bazı karakterizasyonlar verilmiştir. $n = 3$ ve $n = 4$ için V_i helislerin $(1 \leq i \leq n)$ karakterizasyonları elde edilmiştir. Ayrıca, n-boyutlu Öklid uzayda (j, k) $-$tip helisler tanımlanmış ve $n = 4$ için bu tip helislere örnekler verilmiştir. $n = 5$ için V_3 helis karakterize edilmiştir. $n = 4$ için yapılan V_i helis karakterizasyonları $n = 5$ içinde yapılmıştır $(1 \leq i \leq 5)$.

Tezin son bölümünde, n-boyutlu 2 indeksli yarı-Öklidiyen uzayında V_1, V_2, V_{n-1} ve V_n helis eğrilerinin herbiri için harmonik eğrilik fonksiyonu tanımlanmış ve buna bağlı olarak bu tip helis eğrileri için karakterizasyonlar verilmiştir.

Son olarak, n-boyutlu 2 indeksli yarı-Öklidiyen uzayında uzaysı ve zamansı polinom helis eğri aileleri verilip $n = 4$ ve $n = 5$ için örnekler sunulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremler tanıtılacaktır.

2.1. Öklid Uzay

Tanım 2.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ (1 \leq i \leq n)\}$$

vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

eşitliğiyle tanımlanan,

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir. $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|,\| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\to \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre, $\mathbb{R}^n$ uzayı bu metrik ile tanımlı normlu bir vektör uzayıdır.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

biçiminde tanımlanan $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla, bu metrik ile $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzay olur. Bu uzaya Öklid uzayı denir [10].

Tanım 2.2. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\alpha : I \to \mathbb{R}^n \\ &\quad t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

biçiminde verilen düzgün bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ de bir eğri denir [10].

Tanım 2.3. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha^{'}(t) \neq 0$ ise α eğrisine düzenli (regüler) eğri denir [10].

Tanım 2.4. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ bir eğri olsun.

$$\begin{aligned} &\|\alpha'\| : I \to \mathbb{R} \\ &\qquad t \to \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir [4].

Tanım 2.5. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise bu eğriye birim hızlı eğri denir. Bu durumda $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verlir [4].

Tanım 2.6. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ bir eğri olsun. $\Psi = \{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall k,\ k > r$ için; $\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$ olmak üzere, Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ ortonormal sisteme α eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $s \in I$ için $\{V_1(t), V_2(t), \ldots, V_r(t)\}$ ye ise $s \in I$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. Ayrıca $V_i(t)$, $(1 \leq i \leq r < n)$ vektörlerine Serret-Frenet vektörleri adı verilir [4].

Bu tez de $r = n$ durumundaki eğriler ele alınacaktır.

Tanım 2.7. $\mathbb{R}^n$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eğrisi için

$$\begin{aligned} &\kappa_i : I \to \mathbb{R}, \quad (1 \leq i < r) \\ &\quad s \to \kappa_i(s) = \langle V'{}_i(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanan κ_i fonksiyonuna, α eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa_i(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğriliği adı verilir [4].

Teorem 2.8. $\mathbb{R}^n$ uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Bu durumda $t \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki Serret Frenet r-ayaklısı $\{V_1(t), V_2(t), \ldots, V_r(t)\}$ ve $F_i(t) = \alpha^i(t) - \sum\limits_{j<i} \langle \alpha^i(t), V_j(t) \rangle V_j(t)$ olmak üzere, $\kappa_i(t)$ i-yinci eğriliği

$$\kappa_i(t) = \frac{\|F_{i+1}(t)\|}{\|F_1(t)\| \, \|F_i(t)\|}, \ (1 \leq i \leq r) \tag{2.1}$$

dir [4].

Tüm eğrilikleri sıfırdan farklı olan eğriye non-dejenere eğri denir. Bu tez de bahsedilen eğriler non-dejenere eğrilerdir.

Tanım 2.9. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ bir eğri, $\{V_1, V_2, \ldots V_n\}$ eğrinin Serret-Frenet vektörleri ve κ_i eğrinin i-yinci eğrilik fonksiyonu olsun$(1 < i \leq n)$. $\|\alpha'\| = \nu$ ise Serret-Frenet vektörlerinin α eğrisi boyunca türevleri ile eğrilikleri arasındaki bağıntı,

$$\begin{aligned} &V_1{}' = \nu\kappa_1 V_2 \\ &V_i' = -\nu\kappa_{i-1}V_{i-1} + \nu\kappa_i V_{i+1}, \quad (1 < i < n-1) \\ &V_n{}' = -\nu\kappa_{n-1}V_{n-1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

biçimindedir [4].

Tanım 2.10. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$ eğrisi eğer $1 \leq i \leq n$ için $\alpha_i(t)$, katsayıları reel sayı olan bir polinomsal fonksiyon ise bu eğriye polinom eğrisi denir [1].

Tanım 2.11. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eğrisi için V_1, sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa bu eğriye genel helis denir [7].

Tanım 2.12. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında

$$S^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) | \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = r^2, r \in \mathbb{R}, r = sbt \right\}$$

nokta cümlesine bir 2- boyutlu küre denir. Eğer bir α eğrisi küre üzerinde yatıyorsa α eğrisine küresel eğri adı verilir [4].

Tanım 2.13. $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eğrisi için V_2, sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa bu eğriye slant helis denir [6].

$n = 3$ için Izumiya ve Takeuchi slant helisin aşağıdaki karakterizasyonu elde etmişlerdir.

Teorem 2.14. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında birim hızlı bir eğri β ve bu eğrinin eğriliği $\kappa_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda, β bir slant helistir gerek ve yeter şart

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa_1^2}{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)' \right)(s)$$

sabit bir fonksiyondur [6].

2.2. İki İndeksli Yarı-Öklidiyen Uzay

Tanım 2.15. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to R$$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için,

1. $g(u, v) = g(v, u)$
2. $g(au + bv, w) = a\, g(u, w) + b\, g(v, w)$
   $g(u, av + bw) = a\, g(u, v) + b\, g(u, w)$

özeliklerine sahip ise g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir [2].

Tanım 2.16. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun,

1. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ $(g(v,v) < 0)$ ise g ye pozitif (negatif) tanımlı,
2. $\forall v \in V$ için $g(v,v) \geq 0$ $(g(v,v) \leq 0)$ ise g ye pozitif (negatif) yarı-tanımlı,

denir [2].

Tanım 2.17. Bir V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun, $\forall v \in V$ için $g(u,v) = 0 \Rightarrow u = 0$ önermesi sağlanıyor ise g non-dejeneredir denir [2].

Tanım 2.18. g, V üzerinde simetrik bilineer form ve $W \subset V$ olsun. $g|_W : W \times W \to R$ negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu bir W alt uzayının boyutuna g nin indeksi denir ve ν ile gösterilir. Burada $0 \leq \nu \leq boyV$ dir [2].

Tanım 2.19. Bir $v \in V$ vektörü için;

1. $g(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne uzaysı (spacelike) vektör,
2. $g(v,v) < 0$ ise v vektörüne zamansı (timelike) vektör,
3. $g(v,v) = 0$ ve v $\neq 0$ ise v vektörüne boşluksu (null) vektör,

denir [2].

Tanım 2.20. Bir V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı g non-dejenere simetrik bilineer formuna V üzerinde bir skalar çarpım, V ye de skalar çarpım uzayı denir [2].

Tanım 2.21. V bir skalar çarpım uzayı olsun. $u, v \in V$ için $g(u,v) = 0$ ise u ve v vektörlerine diktirler denir ve $u \perp v$ şeklinde gösterilir [2].

Tanım 2.22. V bir skalar çarpım uzayı olsun. $v \in V$ vektörünün normu

$$\|\mathrm{v}\|_s = \sqrt{|g(v,v)|}$$

olarak tanımlanır. Normu, 1 birim olan vektöre birim vektör denir. Yani, $g(v,v) = \pm 1$ dir. Elemanları ikişer ikişer birbirine dik birim vektörlerden oluşan bir kümeye ortonormaldir denir [2].

Teorem 2.23. $V \neq \{0\}$ olmak üzere, V skalar çarpımlı bir vektör uzayı ise V nin bir ortonormal bazı vardır [2].

Teorem 2.24. V skalar çarpım uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ olmak üzere $\forall v \in V$ vektörü,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir [2].

Teorem 2.25. V skalar çarpım uzayının bir $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormal bazı için $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ deki negatif sayıların sayısı olan ν, V nin indeksidir [2].

Tanım 2.26. $V = \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun.
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$g(x, y) = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} x_i y_i, \quad 1 \leq \nu \leq n$$

biçiminde tanımlanan g fonksiyonu bir skalar çarpımdır. Bu skalar çarpım ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına yarı-Öklidiyen uzay denir ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir.

Özel olarak $\nu = 1$ ise $\mathbb{R}^n_1$ uzayına Minkowski uzayı denir [15]. $\nu = 2$ ise $\mathbb{R}^n_2$ uzayına n-boyutlu 2 indeksli yarı-Öklidiyen uzay denir.

Tanım 2.27. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to \mathbb{R}^n_2 \\ t &\to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

biçiminde verilen düzgün bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n_2$ de bir eğri denir [2].

Tanım 2.28. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n_2$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri adı verilir [2].

Tanım 2.29. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n_2$ bir eğri ve $\alpha'(t)$ hız vektörü olmak üzere $\forall t \in I$ için;

1. $g\left(\alpha^{'}(t), \alpha^{'}(t)\right) > 0$ ise, bu durumda α eğrisine uzaysı eğri,

2. $g\left(\alpha^{'}(t), \alpha^{'}(t)\right) < 0$ ise, bu durumda α eğrisine zamansı eğri,

3. $g\left(\alpha^{'}(t), \alpha^{'}(t)\right) = 0$ ise, bu durumda α eğrisine boşluksu eğri,

denir [2].

Tanım 2.30. $\alpha : I \to \mathbb{R}_2^n$ bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için, $g\left(\alpha'(s), \alpha'(s)\right) = \pm 1$ ise bu eğriye birim hızlı eğri denir. Bu durumda $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir [2].

Teorem 2.31. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^n$ null olmayan bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki null olmayan Serret Frenet ayaklısı $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1}$ ve $\varepsilon_i = g\left(V_i, V_i\right)$ olmak üzere, $\left\|\alpha'\right\|_s = \nu$ ise Serret-Frenet vektörlerinin α eğrisi boyunca türevleri ile eğrilikleri arasındaki bağıntı,

$$
\begin{aligned}
&{V_1}' = \nu\varepsilon_2\kappa_1 V_2 \\
&V_i' = -\nu\varepsilon_{i-1}\kappa_{i-1}V_{i-1} + \nu\varepsilon_{i+1}\kappa_i V_{i+1}, \quad (1 < i \leq n-1) \\
&{V_n}' = -\nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1}V_{n-1}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

biçimindedir [12].

(2.3) denklemlerini aşağıdaki gibi matris formundada yazabiliriz.

$$
\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{n-1}' \\ V_n' \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & \nu\varepsilon_2\kappa_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-\nu\varepsilon_1\kappa_1 & 0 & \nu\varepsilon_3\kappa_2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -\nu\varepsilon_2\kappa_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\nu\varepsilon_n\kappa_{n-1} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{pmatrix}
\tag{2.4}
$$

(2.3) denklemleri ile aynı şey demek olan (2.4) eşitliklerine Frenet formülleri denir [4].

3. $\mathbb{R}^n$ ÖKLİD UZAYINDA HELİSLERİN HARMONİK EĞRİLİKLERİNE BAĞLI KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde, $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında harmonik eğrilik fonksiyonu kullanılarak karakterize edilen genel helis, slant helis ve V_n slant helislerle ilgili literatürde bulunan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İlk olarak, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında harmonik eğrilik fonksiyonu kullanılarak karakterize edilen genel helisden bahsedilecektir.

Tanım 3.1. α, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir eğri olsun.

$$H_{(1,i)} = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i = 2 \\ \frac{1}{\kappa_{i-1}}\left(\frac{1}{\nu}H'_{(1,i-1)} + \kappa_{i-2}H_{(1,i-2)}\right), & 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $H_{(1,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(1 \leq i \leq n)$ fonksiyonuna α eğrisinin 1. tip harmonik eğrilik fonksiyonu denir [1, 7].

Teorem 3.2. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir α eğrisinin Frenet vektörleri ve harmonik eğrilikleri, sırasıyla, $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ ve $\left\{H_{(1,1)}, H_{(1,2)}, H_{(1,3)}, \ldots, H_{(1,n)}\right\}$ olsun.

$$\alpha \text{ eğrisi bir genel helistir } \Leftrightarrow H'_{(1,n)} + \nu\kappa_{n-1}H_{(1,n-1)} = 0$$

dır [1, 7].

Teorem 3.3. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında birim hızlı bir α genel helis eğrisinin Frenet vektörleri ve harmonik eğrilikleri, sırasıyla, $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ ve $\left\{H_{(1,1)}, H_{(1,2)}, H_{(1,3)}, \ldots, H_{(1,n)}\right\}$ olsun. Bu durumda α genel helis eğrisinin ekseni U olmak üzere,

$$\langle V_i, U \rangle = H_{(1,i)} \langle V_1, U \rangle, \ \ 1 \leq i \leq n$$

dir [7].

Sonuç 3.4. Eğer $U,\ \alpha$ genel helisinin ekseni ise $U = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n$ biçiminde yazılır. Teorem 3.3. den

$$\lambda_j = \langle V_j, U\rangle = H_{(1,j)} \langle V_1, U\rangle\,, \;\; 1 \leq j \leq n$$

elde edilir. Burada $\langle V_1, U\rangle = \cos\theta = sbt$ dir. Tanım 3.1. den

$$U = \cos\theta \left(H_{(1,1)} V_1 + H_{(1,2)} V_2 + \cdots + H_{(1,n)} V_n\right) \tag{3.1}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$D = H_{(1,1)} V_1 + H_{(1,2)} V_2 + \cdots + H_{(1,n)} V_n$$

de α genel helisin bir eksenidir ve bu eksene genel Darboux vektörü denir [9].

Teorem 3.5. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında, $\left\{H_{(1,1)}, H_{(1,2)}, H_{(1,3)}, \ldots, H_{(1,n)}\right\}$ harmonik eğrilikli birim hızlı bir eğri α olsun. Bu durumda, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ için,

$$\alpha \text{ bir genel helis ise } \sum_{i=1}^{n} H_{(1,i)}^2 = \sec^2\theta$$

dir. Burada θ, genel helisin ekseni ile V_1 teğet vektör alanı arasındaki sabit açıdır [7].

Teorem 3.6. α, $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan bir birim hızlı bir genel helis olsun. Bu durumda $a \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = a \sin \int_0^t \kappa_3 \, du$$

dir [14].

Şimdi, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında harmonik eğrilik fonksiyonu kullanılarak karakterize edilen slant helisten bahsedilecektir.

Tanım 3.7. $\beta,\ \mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir eğri olsun.

$$H_{(2,i)} = \begin{cases} \int \nu\kappa_1 dt, & i=1 \\ 1, & i=2 \\ \frac{1}{\kappa_{i-1}}\left(\frac{1}{\nu}H'_{(2,i-1)} + \kappa_{i-2}H_{(2,i-2)}\right), & 3 \leq i \leq n \end{cases},$$

biçiminde tanımlı $H_{(2,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (1 \leq i \leq n)$ fonksiyonuna β eğrisinin $2.$ tip harmonik eğrilik fonksiyonu denir [5].

Teorem 3.8. $\beta,\ \mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin $2.$ tip harmonik eğrilikleri $\left\{H_{(2,1)}, H_{(2,2)}, H_{(2,3)}, \ldots, H_{(2,n)}\right\}$ olmak üzere,

$$\beta \text{ bir slant helistir } \Leftrightarrow H'_{(2,n)} + \nu\kappa_{n-1}H_{(2,n-1)} = 0$$

dır [5].

Teorem 3.9. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında birim hızlı bir β slant helisin Frenet vektörleri ve $2.$ tip harmonik eğrilikleri, sırasıyla, $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ ve $\left\{H_{(2,1)}, H_{(2,2)}, H_{(2,3)}, \ldots, H_{(2,n)}\right\}$ olsun. Bu durumda β slant helisinin ekseni U olmak üzere,

$$\langle V_i, U\rangle = H_{(2,i)}\langle V_2, U\rangle\,,\ 1 \leq i \leq n$$

dir [5].

Sonuç 3.10. Eğer U, β slant helisinin ekseni ise $U = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n$ biçiminde yazılır. Teorem 3.9. dan

$$\lambda_i = \langle V_i, U\rangle = H_{(2,i)}\langle V_1, U\rangle\,,\ \ 1 \leq i \leq n$$

elde edilir. Burada $\langle V_2, U\rangle = \cos\theta = sbt$ dir. Tanım 3.7. den

$$U = \cos\theta\left(H_{(2,1)}V_1 + H_{(2,2)}V_2 + \cdots + H_{(2,n)}V_n\right) \tag{3.2}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$D = H_{(2,1)}V_1 + H_{(2,2)}V_2 + \cdots + H_{(2,n)}V_n$$

de β slant helisinin bir eksenidir ve bu eksene 2. tip Darboux vektörü denir [5].

Teorem 3.11. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında, $\left\{H_{(2,1)}, H_{(2,2)}, H_{(2,3)}, \ldots, H_{(2,n)}\right\}$ harmonik eğrilikli birim hızlı bir eğri β olsun. Bu durumda, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ için,

$$\beta \text{ bir slant helis ise } \sum_{i=1}^{n} H_{(2,i)}^2 = \sec^2\theta$$

dir. Burada θ, slant helisin ekseni ile V_2 normal vektör alanı arasındaki sabit açıdır [5].

Son olarak, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında harmonik eğrilik fonksiyonu kullanılarak karakterize edilen V_n slant helisden bahsedilecektir.

Tanım 3.12. α, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir eğri olsun.

$$H_{(n,i)} = \begin{cases} \frac{1}{\kappa_i}\left(\kappa_{i+1}H_{(n,i+2)} - \frac{1}{\nu}H'_{(n,i+1)}\right), & 1 \leq i \leq n-2 \\ 0, & i = n-1 \\ 1, & i = n \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $H_{(n,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(1 \leq i \leq n)$ fonksiyonuna α eğrisinin n. tip harmonik eğrilik fonksiyonu denir [13].

Teorem 3.13. α, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin n. tip harmonik eğrilikleri $H_{(n,1)}$ ve $H_{(n,2)}$ olmak üzere,

$$\alpha \text{ bir } V_n \text{ slant helistir } \Leftrightarrow H'_{(n,1)} - \nu\kappa_1 H_{(n,2)} = 0$$

dır [13].

Sonuç 3.14. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında α birim hızlı bir V_n slant helisinin Frenet vektörleri ve n. tip harmonik eğrilikleri, sırasıyla, $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ ve $\left\{H_{(n,1)}, H_{(n,2)}, H_{(n,3)}, \ldots, H_{(n,n)}\right\}$ olsun. Bu durumda α, V_n slant helisinin ekseni U olmak üzere,

$$\langle V_i, U\rangle = H_{(n,i)}\langle V_n, U\rangle, \ 1 \leq i \leq n$$

dir [13].

Sonuç 3.15. Eğer $U,\ \alpha\ V_n$ slant helisinin ekseni ise $U = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n$ biçiminde yazılır. Sonuç 3.14. den

$$\lambda_i = \langle V_i, U \rangle = H_{(n,i)} \langle V_n, U \rangle\,,\ \ 1 \leq i \leq n$$

dir. Burada $\langle V_n, U \rangle = \cos\theta = sbt$ dir. Tanım 3.12. den

$$U = \cos\theta \left(H_{(n,1)} V_1 + H_{(n,2)} V_2 + \cdots + H_{(n,n)} V_n \right) \tag{3.3}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$D = H_{(n,1)} V_1 + H_{(n,2)} V_2 + \cdots + H_{(n,n)} V_n$$

de α, V_n slant helisinin bir eksenidir ve bu eksene genelleştirilmiş Darboux vektörü denir [13]. Biz, literatürdeki karmaşayı önleme açısından bu eksene $n.$ tip Darboux vektörü adı vereceğiz.

Teorem 3.16. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında, $\left\{ H_{(n,1)}, H_{(n,2)}, H_{(n,3)}, \ldots, H_{(n,n)} \right\}$ $n.$ tip harmonik eğrilikli birim hızlı bir eğri α olsun. Bu durumda, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ için,

$$\alpha \text{ bir } V_n \text{ slant helis ise } \sum_{i=1}^{n} H_{(n,i)}^2 = \sec^2\theta$$

dir. Burada $\theta,\ V_n$ slant helisin ekseni ile V_n Frenet vektör alanı arasındaki sabit açıdır [13].

4. ÖKLİD UZAYINDA V_i HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Literatürdeki karmaşayı ortadan kaldırmak ve kısalığın hatırı için bu tezde, α eğrisinin V_i , $(1 \leq i \leq n)$ Frenet vektör alanı bir U sabit birim vektörü ile sabit açı $\left(0 < \theta < \pi,\ \ \theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$ yapıyorsa bu eğriye V_i helis adı verilecektir.

Bu bölümde, ilk olarak; $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında V_{n-1} helisin bazı karakterizasyonları verildi. Ayrıca, $n = 3$ için, Teorem 4.2. de ifade edilen, Izumiya ve Takeuchi tarafından sunulan [6] ve tezde Teorem 2.14. ve Ali ve Turgut tarafından sunulan [5] ve tezde Teorem 3.8. ve ile ifade edilen önermelerin denk olduğu gösterildi. $n = 3$ için bazı sonuçlar elde edildi ve bir örnek verildi.

Sonra; $\mathbb{R}^4, 4-$boyutlu Öklid uzayında V_1, V_2, V_3 ve V_4 helislerin bazı karakterizasyonları verildi. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında (j,k) $-$tip helis eğrisi tanımlandı ve $n = 4$ için (j,k) $-$tip helis eğrilerine örnekler verildi.

Son olarak; $\mathbb{R}^5,\ 5-$boyutlu Öklid uzayında V_3 helis karakterize edildi ve V_1, V_2, V_3, V_4 ve V_5 helislerin bazı karakterizasyonları verildi.

4.1. $\mathbb{R}^n$ Öklid Uzayında V_{n-1} Helisin Karakterizasyonları

Bu kısımda, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayda harmonik eğrilik fonksiyonu tanımlandı ve harmonik eğriliğe bağlı V_{n-1} helisin karakterizasyonları verildi. Ayrıca, $n = 3$ için bazı sonuçlar elde edildi.

Tanım 4.1. α, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir eğri olsun.

$$H_{(n-1,i)} = \begin{cases} \frac{1}{\kappa_i}\left(\kappa_{i+1}H_{(n-1,i+2)} - \frac{1}{\nu}H'_{(n-1,i+1)}\right), & 1 \leq i \leq n-2 \\ 1, & i = n-1 \\ -\int \nu\kappa_{n-1}dt, & i = n \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $H_{(n-1,i)} : I \to \mathbb{R},\ (1 \leq i \leq n)$ fonksiyonuna α eğrisinin $(n-1)$. tip harmonik eğrilik fonksiyonu denir.

Teorem 4.2. α, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin $(n-1)$. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $H_{(n-1,i)}$, $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere,

$$\alpha \text{ bir } V_{n-1} \text{ helistir } \Leftrightarrow H'_{(n-1,1)} - \nu\kappa_1 H_{(n-1,2)} = 0$$

dır.

İspat. Farz edelim ki, α bir V_{n-1} helis olsun. Bu durumda V_{n-1} ile sabit θ açısı yapan bir sabit U vektörü vardır.

$\forall t \in I$ için $U = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) V_i(t)$ eşitliğini sağlayan a_i, $(1 \leq i \leq n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları ele alalım. Dolayısıyla,

$$a_i = \langle V_i, U \rangle, (1 \leq i \leq n) \tag{4.1}$$

dir. α bir V_{n-1} helis olduğundan $a_{n-1} = \langle V_{n-1}, U \rangle = \cos\theta$ dır. (4.1) denkleminin türevi alınıp (2.2) sistemi ile birlikte kullanılırsa,

$i = 1$ için, yani $a_1 = \langle V_1, U \rangle$ olduğundan,

$$a_1' = \langle V_1', U \rangle = \nu\kappa_1 \langle V_2, U \rangle = \nu\kappa_1 a_2$$

ve

$$a_1' - \nu\kappa_1 a_2 = 0$$

dır. Benzer şekilde $(2 \leq i \leq n-1)$ olduğu durum için,

$$a_i' = \langle V_i', U \rangle = -\nu\kappa_{i-1} \langle V_{i-1}, U \rangle + \nu\kappa_i \langle V_{i+1}, U \rangle = -\nu\kappa_{i-1} a_{i-1} + \nu\kappa_i a_{i+1}$$

ve

$$a_i' + \nu\kappa_{i-1} a_{i-1} - \nu\kappa_i a_{i+1} = 0$$

dır. Burada $a'_{n-1} = 0$ dır. Son olarak, $i = n$ durumu için, yani $a_n = \langle V_n, U \rangle$ olduğundan,

$$a'_n = \langle V'_n, U \rangle = -\nu\kappa_{n-1} \langle V_{n-1}, U \rangle = -\nu\kappa_{n-1} a_{n-1}$$

ve

$$a'_n + \nu\kappa_{n-1} a_{n-1} = 0$$

dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} & a'_1 - \nu\kappa_1 a_2 = 0 \\ & a'_i + \nu\kappa_{i-1} a_{i-1} - \nu\kappa_i a_{i+1} = 0, \quad (2 \leq i \leq n-1) \\ & a'_n + \nu\kappa_{n-1} a_{n-1} = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

$a_{n-1} = \cos\theta$ olduğundan $H_{(n-1,i)},\ (1 \leq i \leq n)\ (n-1)$. tip harmonik eğrilik fonksiyonu a_i fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$H_{(n-1,i)} = \frac{a_i}{a_{n-1}},\ (1 \leq i \leq n)\,. \tag{4.3}$$

Üstelik, (4.3) denkleminin türevi alınıp (4.2) denklem sisteminin ilk denklemi haricinde birlikte kullanılmasıyla $(n-1)$. tip harmonik egrilik fonksiyonu elde edilir. (4.3) denkleminin türevi alınıp (4.2) denklem sisteminin ilk denklemiyle birlikte kullanılmasıyla V_{n-1} helis olma şartı elde edilir.

Yani, (4.2) denklem sisteminin son denklemi a_{n-1} ile bölünüp, (4.3) denkleminin türevi alınarak kullanıldığında,

$$\frac{a'_n}{a_{n-1}} + \nu\kappa_{n-1} = 0 \Rightarrow H'_{(n-1,n)} + \nu\kappa_{n-1} = 0$$

elde edilir. O halde,

$$H_{(n-1,n)} = -\int \nu\kappa_{n-1} dt$$

ve

$$H_{(n-1,n-1)} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} = 1$$

dır. Benzer şekilde (4.2) denklem sisteminin ikinci denklemi a_{n-1} ile bölünüp, (4.3) denklemi ile birlikte kullanılırsa,

$$\frac{a_i'}{a_{n-1}} + \nu\kappa_{i-1}H_{(n-1,i-1)} - \nu\kappa_i H_{(n-1,i+1)} = 0, \quad (2 \leq i \leq n-1)$$

dır. Bu denklem ile (4.3) denkleminin türevi alınarak kullanılırsa,

$$H'_{(n-1,i)} + \nu\kappa_{i-1}H_{(n-1,i-1)} - \nu\kappa_i H_{(n-1,i+1)} = 0$$

dır. Buradan

$$H_{(n-1,i-1)} = \frac{1}{\kappa_{i-1}}\left(\kappa_i H_{(n-1,i+1)} - \frac{1}{\nu}H'_{(n-1,i)}\right), \quad (2 \leq i \leq n-1)$$

dir. $(i = i+1)$ indis düzenlemesiyle,

$$H_{(n-1,i)} = \frac{1}{\kappa_i}\left(\kappa_{i+1} H_{(n-1,i+2)} - \frac{1}{\nu}H'_{(n-1,i+1)}\right), \quad (1 \leq i \leq n-2)$$

olarak bulunur.

(4.2) denklem sisteminin ilk denkleminin a_{n-1} ile bölünmesiyle

$$\frac{{a_1}'}{a_{n-1}} - \nu\kappa_1\frac{a_2}{a_{n-1}} = 0$$

elde edilir. Bu denklemde (4.3) denklemi kullanılırsa

$$H'_{(n-1,1)} - \nu\kappa_1 H_{(n-1,2)} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece gerek şart sağlanır.

Tersine olarak, α bir eğri ve bu eğrinin $(n-1)$. tip harmonik eğrilikleri $H_{(n-1,i)}$ fonksiyonları ve $H'_{(n-1,1)} - \nu\kappa_1 H_{(n-1,2)} = 0$ olsun. U vektörü θ bir sabit olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$U = \cos\theta \left(\sum_{i=1}^{n} H_{(n-1,i)} V_i \right). \tag{4.4}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\langle V_{n-1}, U \rangle &= \left\langle V_{n-1}, \cos\theta \left(\sum_{i=1}^{n} H_{(n-1,i)} V_i \right) \right\rangle = \cos\theta \left(\sum_{i=1}^{n} H_{(n-1,i)} \langle V_{n-1}, V_i \rangle \right) \\
&= \cos\theta \, (0 + 0 + \cdots + 0 + 1 + 0) \\
&= \cos\theta
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla, U vektörü V_{n-1} Frenet vektörü ile sabit açı yapar. Şimdi, U vektörünün, sabit bir vektör olduğu gösterilecektir. Bunun için $U' = 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. (4.4) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\theta} U' = {} & H'_{(n-1,1)} V_1 + H_{(n-1,1)} V_1' + H'_{(n-1,2)} V_2 + H_{(n-1,2)} V_2' \\
& + H'_{(n-1,3)} V_3 + H_{(n-1,3)} V_3' + H'_{(n-1,4)} V_4 + H_{(n-1,4)} V_4' \\
& \vdots \\
& + H'_{(n-1,n-1)} V_{n-1} + H_{(n-1,n-1)} V_{n-1}' + H'_{(n-1,n)} V_n + H_{(n-1,n)} V_n'
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem, (2.2) sistemi ile birlikte kullanırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\theta} U' = {} & H'_{(n-1,1)} V_1 + \nu\kappa_1 H_{(n-1,1)} V_2 + H'_{(n-1,2)} V_2 + \nu\kappa_2 H_{(n-1,2)} V_3 \\
& - \nu\kappa_1 H_{(n-1,2)} V_1 + H'_{(n-1,3)} V_3 - \nu\kappa_2 H_{(n-1,3)} V_2 + \nu\kappa_3 H_{(n-1,3)} V_4 \\
& + H'_{(n-1,4)} V_4 - \nu\kappa_3 H_{(n-1,4)} V_3 + \nu\kappa_4 H_{(n-1,4)} V_5 \\
& \vdots \\
& + H(n-1,n-1)' V_{n-1} + \nu\kappa_{n-1} H_{(n-1,n-1)} V_n - \nu\kappa_{n-2} H_{(n-1,n-1)} V_{n-2} \\
& + H'_{(n-1,n)} V_n - \nu\kappa_{n-1} H_{(n-1,n)} V_{n-1}
\end{aligned}$$

elde edilen bu denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\theta}U' = & \left(H'_{(n-1,1)} - \nu\kappa_1 H_{(n-1,2)}\right) V_1 \\
& + \left(\nu\kappa_1 H_{(n-1,1)} + H'_{(n-1,2)} - \nu\kappa_2 H_{(n-1,3)}\right) V_2 \\
& + \left(\nu\kappa_2 H_{(n-1,2)} + H'_{(n-1,3)} - \nu\kappa_3 H_{(n-1,4)}\right) V_3 \\
& \vdots \\
& + \left(\nu\kappa_{n-2} H_{(n-1,n-2)} + H'_{(n-1,n-1)} - \nu\kappa_{n-1} H_{(n-1,n)}\right) V_{n-1} \\
& + \left(\nu\kappa_{n-1} H_{(n-1,n-1)} + H'_{(n-1,n)}\right) V_n
\end{aligned}$$

elde edilir ki Tanım 4.1. ve yeter şartdan $U' = 0$ olduğu açıkca görülebilir. O halde, U vektörü sabitdir.

Dolayısıyla, α eğrisi bir V_{n-1} helistir. ■

Teorem 4.3. α, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında birim hızlı bir V_{n-1} helis, bu V_{n-1} helisin Frenet vektörleri ve $(\mathrm{n}-1)$. tip harmonik eğrilikleri, sırasıyla, $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ ve $\left\{H_{(n-1,1)}, H_{(n-1,2)}, H_{(n-1,3)}, \ldots, H_{(n-1,n)}\right\}$ olsun. Bu durumda V_{n-1} helisin ekseni U olmak üzere,

$$\langle V_i, U\rangle = H_{(n-1,i)} \langle V_{n-1}, U\rangle\,,\ 1 \le i \le n$$

dir.

İspat. (4.4) den eşitliğin sağlandığı kolaylıkla görülür. ■

Sonuç 4.4. Eğer $U,\ V_{n-1}$ helisin ekseni ise $U = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n$ biçiminde yazılır. Teorem 4.3. den

$$\lambda_i = \langle V_i, U\rangle = H_{(n-1,i)} \langle V_{n-1}, U\rangle\,,\ \ 1 \le i \le n$$

elde edilir. Burada $\langle V_{n-1}, U\rangle = \cos\theta = sbt$ dir. Tanım 4.1. den

$$U = \cos\theta \left(V_1 H_{(n-1,1)} + V_2 H_{(n-1,2)} + \cdots + V_n H_{(n-1,n)}\right) \tag{4.5}$$

dir. Ayrıca,

$$D = V_1 H_{(n-1,1)} + V_2 H_{(n-1,2)} + \cdots + V_n H_{(n-1,n)}$$

de V_{n-1} helisinin bir eksenidir ve bu eksene $(\mathrm{n}-1)$. tip Darboux vektörü denir.

Teorem 4.5. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında, $\left\{H_{(n-1,1)}, H_{(n-1,2)}, H_{(n-1,3)}, \ldots, H_{(n-1,n)}\right\}$ harmonik eğrilikli birim hızlı bir eğri α olsun. Bu durumda,

$$\alpha \text{ bir } V_{n-1} \text{ helis ise } \sum_{i=1}^{n} H^2_{(n-1,i)} = \sec^2\theta$$

dir. Burada $\theta,\ V_{n-1}$ helisin ekseni ile V_{n-1} Frenet vektör alanı arasındaki sabit açıdır.

İspat. V_{n-1} helisin ekseni U, (4.5) denklemi formundadır. U birim vektör olduğundan basit bir hesaplama ile ispat tamamlanır. ■

$n = 3$ için, Teorem 4.2., Teorem 2.14. ve Teorem 3.8. den birim hızlı bir eğri ve için aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.6. $\alpha,\ \mathbb{R}^3$ uzayında eğrilikleri κ_1 ve κ_2 olan birim hızlı bir V_2 helis olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

1. $\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\left(-\int \kappa_2\right)\right)' - \kappa_1 = 0.$
2. $\sigma(s) = \left(\frac{\kappa_1^2}{(\kappa_1^2+\kappa_2^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'\right)(s)$ sabit bir fonksiyondur.
3. $\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left(\int \kappa_1\right)\right)' + \kappa_2 = 0.$

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\left(-\int \kappa_2\right)\right)' - \kappa_1 = 0$$

denklemin her iki tarafı $-2\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\int \kappa_2$ ile çarpılıp, integrali alındığı zaman c bir sabit olmak üzere,

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\int \kappa_2\right)^2+\left(\int \kappa_2\right)^2=c^2$$

elde edilir. Buradan,

$$\int \kappa_2=\sqrt{\frac{c^2{\kappa_1}^2}{{\kappa_1}^2+{\kappa_2}^2}}$$

dir. Her iki tarafın türevi alınıp gerekli düzenleme yapıldığında,

$$\frac{1}{c}=\frac{\left({\kappa_1}'\kappa_2-{\kappa_2}'\kappa_1\right)}{\left({\kappa_1}^2+{\kappa_2}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dir. Buradan,

$$\frac{{\kappa_1}^2}{\left({\kappa_1}^2+{\kappa_2}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'=sbt$$

elde edilir ki 2 denklemine ulaşılmış olur.

$(2)\Rightarrow(3)$

$$\frac{{\kappa_1}^2}{\left({\kappa_1}^2+{\kappa_2}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)'=sbt$$

olsun. Doğrudan hesaplama ile

$$1=\frac{c\left({\kappa_2}'\kappa_1-{\kappa_1}'\kappa_2\right)}{\left({\kappa_1}^2+{\kappa_2}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Pay ve payda $2c\kappa_1\kappa_2$ ile çarpılır ve düzenlenirse,

$$\kappa_1=\frac{2c^2\kappa_1\kappa_2\left({\kappa_2}'\kappa_1-{\kappa_1}'\kappa_2\right)}{2c\kappa_2\left({\kappa_1}^2+{\kappa_2}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Paya $2c^2\kappa_2{\kappa_2}'{\kappa_2}^2$ eklenip çıkarılırsa,

$$\kappa_1 = \frac{2c^2\kappa_2{\kappa_2}'\left({\kappa_1}^2+{\kappa_2}^2\right) - c^2{\kappa_2}^2\left(2\kappa_1{\kappa_1}'+2\kappa_2{\kappa_2}'\right)}{2\sqrt{\frac{c^2{\kappa_2}^2}{{\kappa_1}^2+{\kappa_2}^2}}\left({\kappa_1}^2+{\kappa_2}^2\right)^2}$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafının integrali alındığında

$$\int \kappa_1 = \sqrt{\frac{c^2{\kappa_2}^2}{{\kappa_1}^2+{\kappa_2}^2}}$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın karesi alınır c^2 çekilirse

$$\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1\right)^2 + \left(\int \kappa_1\right)^2 = c^2$$

elde edilir. Eşitliğin türevi alındıktan sonra $2\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1$ ile bölünürse

$$\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1\right)' + \kappa_2 = 0$$

bulunur.

$(3) \Rightarrow (1)$

$$\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1\right)' + \kappa_2 = 0$$

eşitliği $2\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1$ ile çarpılıp integrali alınırsa

$$\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1\right)^2 + \left(\int \kappa_1\right)^2 = c^2$$

elde edilir ki Teorem 3.11. ve Teorem 4.5. den

$$\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \kappa_1\right)^2 + \left(\int \kappa_1\right)^2 = \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\int \kappa_2\right)^2 + \left(\int \kappa_2\right)^2 = c^2$$

dir. $\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\int \kappa_2\right)^2 + \left(\int \kappa_2\right)^2 = c^2$ türevi alınıp $-2\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\int \kappa_2$ ile bölünürse

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\left(-\int \kappa_2\right)\right)' - \kappa_1 = 0$$

elde edilir. ■

Teorem 4.7. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında α eğrisi, bir V_1 helistir gerek ve yeter şart α bir V_3 helistir.

İspat. Farz edelim ki, α bir V_1 helis olsun. Bu durumda $\langle V_1, U\rangle = \cos\theta$ olacak şekilde sabit bir U vektörü vardır. $\langle V_1, U\rangle = \cos\theta$ eşitliğinin türevi alınıp (2.2) denklem sistemi ile birlikte kullanılırsa, $\langle V_2, U\rangle = 0$ elde edilir ki bu eşitlik ve (2.2) denklem sistemi kullanılarak $\langle V_3, U\rangle = \sin\theta$ olduğu elde edilir. Burada U vektörü V_1 ile θ sabit açısı yaparken, V_3 ile $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ sabit açısı yaptığı açıktır. ■

Sonuç 4.8. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında, α eğrilikleri $\kappa_1 = \kappa_2$ olan bir V_1 helis olsun, Bu durumda, V_1 helisin ekseni U hem V_1 hemde V_3 ile $\frac{\pi}{4}$ radyanlık açı yapar.

İspat. α bir V_1 helis olsun. Bu durumda $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \tan\theta$ dır [10]. $\kappa_1 = \kappa_2$ olduğundan $\theta = \frac{\pi}{4}$ olduğu kolayca görülebilir. ■

Örnek 4.9. $\mathbb{R}^3$ uzayında,

$$\alpha(t) = \left(\frac{\sin t \cos\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} - \cos t \sin\sqrt{2}t, \frac{\sin t \sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} + \cos t \cos\sqrt{2}t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)$$

eğrisi verilsin. Bu eğrinin eğrilikleri $\kappa_1(t) = \kappa_2(t) = \sec t$ dır. Bu V_1 helisin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \left(-\frac{\cos\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ V_2(t) &= \left(\sin\sqrt{2}t, -\cos\sqrt{2}t, 0\right) \\ V_3(t) &= \left(\frac{\cos\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ki $U = (0, 0, 1)$ vektörü hem V_1 hemde V_3 ile $\frac{\pi}{4}$ radyanlık açı yapar.

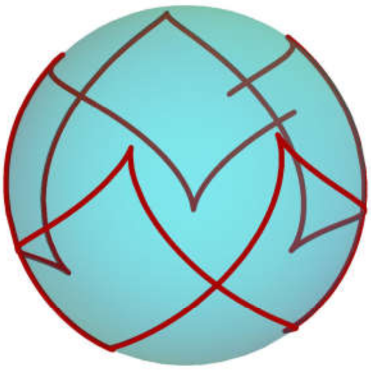
Ayrıca, 1. tip harmonik eğrilikleri

$$H_{(1,1)} = 1, \qquad H_{(1,2)} = 0, \qquad H_{(1,3)} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 1,$$

ve 4. tip harmonik eğrilikleri

$$H_{(3,1)}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}=1,\qquad H_{(3,2)}=0,\qquad H_{(3,3)}=1$$

olup Teorem 3.2. den V_1 helis olma şartı $H'_{(1,3)}+\nu\kappa_2 H_{(1,2)}=0$ ve Teorem 3.13. den V_3 helis olma şartı $H'_{(3,1)}-\nu\kappa_1 H_{(3,2)}=0$ şartı sağlanır. Bakınız Şekil 4.1



Şekil 4.1. $\kappa_1(t)=\kappa_2(t)=\sec t$ eğriliklerine sahip küresel helis

4.2. $\mathbb{R}^4$ Öklid Uzayında V_1, V_2, V_3 ve V_4 Helislerin Karakterizasyonları

[1] ve [7] nolu kaynaklarda ispatlanan ve tezde Teorem 3.2. ile sunulan karakterizasyon $n = 4$ için açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 4.10. α, $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin $1.$ tip harmonik eğrilik fonksiyonu $H_{(1,i)}, (1 \leq i \leq 4)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ bir } V_1 \text{ helistir } &\Leftrightarrow H'_{(1,4)} + \nu\kappa_3 H_{(1,3)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)' + \nu\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\kappa_1\kappa_2^2\kappa_3^3\nu^3 - \kappa_2\left(\kappa_2\kappa_1{}' - \kappa_1\kappa_2{}'\right)\left(\nu\kappa_3{}' + \kappa_3\nu'\right)}{\nu^2\kappa_3^2\kappa_2^3} \\
&\quad + \frac{\kappa_3\nu\left[2\kappa_1(\kappa_2{}')^2\kappa_1{}'' - \kappa_2\left(2\kappa_1{}'\kappa_2{}' + \kappa_1\kappa_2{}''\right)\right]}{\nu^2\kappa_3^2\kappa_2^3} = 0
\end{aligned}$$

dır.

Örnek 4.11. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında,

$$\alpha(t) = \left(\cos t, \ln\left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right) - \ln\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right), \sin t, -\ln\cos t\right)$$

eğrisininin eğrilikleri,

$$\kappa_1(t) = \frac{1}{4}\sqrt{(1+\cos 2t)(3+\cos 2t)}$$

$$\kappa_2(t) = \frac{\sqrt{(1+\cos 2t)(290 - 15\cos 2t - 18\cos 4t - \cos 6t)}}{8(3+\cos 2t)}$$

$$\kappa_3(t) = \frac{96\sqrt{2}\cos^2 t\sqrt{3+\cos 2t}}{15\cos 2t + 18\cos 4t + \cos 6t - 290}$$

dir. Ayrıca, 1. tip harmonik eğrilikleri

$$H_{(1,1)} = 1, \qquad H_{(1,2)} = 0, \qquad H_{(1,3)} = \frac{2(\cos 2t + 3)^{3/2}}{\sqrt{290 - 15\cos 2t - 18\cos 4t - \cos 6t}}$$

ve

$$H_{(1,4)} = \frac{2(9\sin t + \sin 3t)}{\sqrt{290 - 15\cos 2t - 18\cos 4t - \cos 6t}}$$

olup Teorem 3.2. den V_1 helis olma şartı $H'_{(1,4)} + \nu\kappa_3 H_{(1,3)} = \left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)' + \nu\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0$

olduğundan α eğrisi bir V_1 helistir. Bir başka ifadeyle, $U = (0,1,0,0)$ birim vektörü, α eğrisinin,

$$V_1(t) = \left(-\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\cos^2 t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)$$

teğet vektörü ile sabit açı yapar. Dolayısıyla, α eğrisi bir V_1 helistir.

Örnek 4.12. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında,

$$\alpha(t) = \left(2t, t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right)$$

eğrisininin eğrilikleri,

$$\kappa_1(t) = \frac{2\sqrt{1+4t^2}}{(2+t^2+t^4)^2}$$

$$\kappa_2(t) = \frac{2\sqrt{5+12t^2+36t^4+64t^6+9t^8}}{(1+4t^2)(2+t^2+t^4)^2}$$

$$\kappa_3(t) = \frac{12t\sqrt{1+4t^2}}{5+12t^2+36t^4+64t^6+9t^8}$$

dir. Ayrıca, $\left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)' + \nu\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0$ olduğundan α eğrisi bir V_1 helistir. Bir başka ifadeyle, $U = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ birim vektörü, α eğrisinin,

$$V_1(t) = \left(\frac{2}{2+t^2+t^4}, \frac{2t}{2+t^2+t^4}, \frac{2t^2}{2+t^2+t^4}, 1 - \frac{2}{2+t^2+t^4}\right)$$

teğet vektörü ile sabit açı yapar. Dolayısıyla, α eğrisi bir V_1 helistir.

Teorem 3.6. da İlarslan ve diğ. tarafından sunulan birim hızlı bir V_1 helis için verilen karekterizasyon birim hızlı olmayan bir V_1 helis için aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 4.13. $\mathbb{R}^4$ uzayında eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan bir V_1 helis α olsun. $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = c \sin \int \nu\kappa_3$$

dir [14].

İspat. $\mathbb{R}^4$ uzayında α eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan bir V_1 helis olsun. Bu durumda, Sonuç 4.10. dan

$$\left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)' + \nu\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0$$

dır. Denklemin her iki tarafı $2\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)^2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2 = c^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\nu\kappa_3 = \frac{\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2}}$$

dir. Bu denklemin her iki tarafın integrali alınıp doğrudan bir hesaplama ile,

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = c \sin \int \nu\kappa_3$$

eşitliği elde edilebilir [14]. ■

[5] nolu kaynakta ispatlanan ve tezde Teorem 3.8. ile sunulan karakterizasyon $n = 4$ için açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 4.14. β, $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin 2. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $H_{(2,i)}, \quad (1 \leq i \leq 4)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \beta \text{ bir } V_2 \text{ helistir } &\Leftrightarrow H'_{(2,4)} + \nu\kappa_3 H_{(2,3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\kappa_3}\left(\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)\right)' + \nu\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1 = 0 \end{aligned}$$

dır.

Teorem 4.15. $\mathbb{R}^4$ uzayında eğrilikleri $\kappa_1, \ \kappa_2$ ve κ_3 olan bir V_2 helis β olsun. $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\kappa_3 = \pm\frac{\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)^2 - \left(\int \nu\kappa_1\right)^2}}$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}^4$ uzayında β eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan bir V_2 helis olsun. Bu durumda, Sonuç 4.14. den

$$\left(\frac{1}{\kappa_3}\left(\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)\right)' + \nu\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1 = 0$$

dir. Denklemin her iki tarafı $2\frac{1}{\kappa_3}\left(\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{1}{\kappa_3}\left(\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)\right)^2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)^2 + \left(\int \nu\kappa_1\right)^2 = c^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\kappa_3 = \pm \frac{\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)^2 - \left(\int \nu\kappa_1\right)^2}}$$

dir. ■

$n = 4$ için Teorem 4.2. açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 4.16. α, $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin 3. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $H_{(3,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (1 \leq i \leq 4)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha \text{ bir } V_3 \text{ helistir } &\Leftrightarrow H'_{(3,1)} - \nu\kappa_1 H_{(3,i)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\kappa_1}\left(\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3\right)'\right)\right)' + \nu\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3 = 0 \end{aligned}$$

dır.

Teorem 4.17. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan bir V_3 helis α olsun. $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\kappa_1 = \pm \frac{\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3\right)^2 - \left(\int \nu\kappa_3\right)^2}}$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında α eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan bir V_3 helis olsun. Bu durumda, Sonuç 4.16. dan

$$\left(\frac{1}{\kappa_1}\left(\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3\right)'\right)\right)' + \nu\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3 = 0$$

dır. Denklemin her iki tarafı $2\frac{1}{\kappa_1}\left(\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3\right)'\right)$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{1}{\kappa_1}\left(\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3\right)'\right)\right)^2 + \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3\right)^2 + \left(\int \nu\kappa_3\right)^2 = c^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\kappa_1 = \pm \frac{\kappa_2 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3\right)^2 - \left(\int \nu\kappa_3\right)^2}}$$

dir. ■

[13] nolu kaynakta ispatlanan ve tezde Teorem 3.13. ile sunulan karakterizasyon $n = 4$ için açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 4.18. α, $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin 4. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $H_{(4,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (1 \leq i \leq 4)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha \text{ bir } V_4 \text{ helistir } &\Leftrightarrow H'_{(4,1)} - \nu\kappa_1 H_{(4,2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)' + \nu\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2} = 0 \end{aligned}$$

dır.

Teorem 4.19. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan bir V_4 helis α olsun. $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\frac{\kappa_3}{\kappa_2} = c \sin \int \nu\kappa_1$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}^4$ uzayında α eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan bir V_4 helis olsun. Bu durumda, Sonuç 4.18. den

$$\left(\frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)' + \nu\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2} = 0$$

dir. Denklemin her iki tarafı $2\frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)^2 + \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2 = c^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\nu\kappa_1 = \frac{\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2}}$$

dir. Bu denklemin her iki tarafın integrali alınıp doğrudan bir hesaplama ile,

$$\frac{\kappa_3}{\kappa_2} = c \sin \int \nu\kappa_1$$

eşitliği elde edilir. ■

Tanım 4.20. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında α eğrisi, Serret-Frenet vektörleri $\{V_1, V_2, V_3, \ldots V_n\}$ olan bir eğri olsun. U ve V, $\mathbb{R}^n$ de iki sabit birim vektör, $1 \leq j < k \leq n$ olmak üzere $\langle V_j, U\rangle = c_j(sbt)$ ve $\langle V_k, V\rangle = c_k(sbt)$ ise α eğrisine (j,k) $-$tip helis denir.

Birim hızlı olmayan bir eğri için (2.1) eşitliği ile tanımlı κ_i eğrilik fonksiyonları pozitif değerli fonksiyonlardır. Tezin bundan sonraki kısmında eğriliklerin eşitlikleri ile verilen teoremler eğrinin birim hızlı olması durumunu da içereceğinden eğriliklerin eşitliklerinde $\pm$ işareti kullanılmıştır.

Teorem 4.21. $\alpha, \mathbb{R}^4$ uzayında κ_1, κ_2 ve κ_3 eğrilikli bir eğri ve $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ olsun. Bu durumda,

α bir V_1 helistir $\Leftrightarrow$ α bir V_4 helistir.

Başka bir deyişle, α bir $(1,4)$-tip helistir.

İspat. Kabul edelim ki, α bir V_1 helis olsun. Bu durumda Sonuç 4.10. dan;

$$\left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)' + \nu\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0$$

dır. Bu denklemde $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)' + \nu\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2} = 0$$

denklemi elde edilir ki Sonuç 4.18. den α bir V_4 helistir.

Yeter şartı da, benzer şekilde ispat edilebilir. ■

Teorem 4.22. $\alpha,\ \mathbb{R}^4$ Öklid uzayında κ_1, κ_2 ve κ_3 eğrilikli ve $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ olan bir $(1,4)$-tip helis olsun. Bu durumda V_1 helisin ekseni, V_4 helisin eksenine diktir. Aynı zamanda, $\theta_1 = \theta_2$ veya $\theta_1 = \pi - \theta_2$ dir. Burada $\theta_1,\ V_1$ ile V_1 helis ekseninin yaptığı açı, $\theta_2,\ V_2$ ile V_2 helis ekseninin yaptığı açıdır.

İspat. $\alpha,\ V_1$ helisinin ekseni (3.1) eşitliğinden

$$U_1 = \cos\theta_1 \left(H_{(1,1)}V_1 + H_{(1,2)}V_2 + H_{(1,3)}V_3 + H_{(1,4)}V_4\right)$$

biçimindedir. Tanım 3.1. kullanılarak

$$U_1 = \cos\theta_1 \left(V_1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}V_3 + \frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)' V_4\right)$$

formunda elde edilir. Benzer şekilde,

$\alpha,\ V_4$ helisinin ekseni (3.3) eşitliğinden

$$U_2 = \cos\theta_2 \left(H_{(4,1)}V_1 + H_{(4,2)}V_2 + H_{(4,3)}V_3 + H_{(4,4)}V_4\right)$$

biçimindedir. Tanım 3.12. kullanılarak

$$U_2 = \cos\theta_2 \left(-\frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)' V_1 + \frac{\kappa_3}{\kappa_2}V_2 + V_4\right)$$

elde edilir.

$$\langle U_1, U_2\rangle = \cos\theta_1\cos\theta_2 \left(-\frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)' + \frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)$$

eşitliğinde $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ yazılırsa $\langle U_1, U_2\rangle = 0$ dır. Dolayısıyla, V_1 helisin ekseni U_1 ile V_4 helisin ekseni U_2 birbirine diktir. Ayrıca, U_1 ve U_2 birer sabit birim vektör olduğundan

$$1 = \cos^2\theta_1 \left(1 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)^2\right)$$

ve

$$1=\cos^2\theta_2\left(1+\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2+\left(\frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)^2\right)$$

eşitlikleri elde edilir. $\kappa_3=\pm\kappa_1$ eşitliği kullanılırsa $\cos^2\theta_1=\cos^2\theta_2$ dir. Buradan $\theta_1=\theta_2$ veya $\theta_1=\pi-\theta_2$ dir. ■

Örnek 4.23. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında;

$$\alpha(\mathrm{t})=(\cos t,\sin t,\cosh t,\sinh t)$$

eğrisi bir $(1,4)$-tip helistir. Çünkü α eğrisinin

$$V_1\left(t\right)=\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{1+\cosh 2t}},\frac{\cos t}{\sqrt{1+\cosh 2t}},\frac{\mathrm{sinht}}{\sqrt{1+\cosh 2t}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Frenet vektörü ile $(0,0,0,1)$ birim vektörü sabit bir açı yapar. Ayrıca

$$V_4\left(t\right)=\left(\frac{\mathrm{sech}(t)\mathrm{cos}t}{\sqrt{2}},\frac{\mathrm{sech}(t)\sin t}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\mathrm{tanh}t}{\sqrt{2}}\right)$$

Frenet vektörü ile $(0,0,1,0)$ birim vektörü sabit bir açı yapar. Tanım 4.20. den α bir $(1,4)$-tip helistir. Teorem 4.21. de $\kappa_1\left(t\right)=\kappa_3\left(t\right)=\frac{\mathrm{Sech}^2t}{\sqrt{2}}$ şartı sağlanmaktadır. Ayrıca, Teorem 4.22. de $\theta_1=\theta_2$ sağlanmaktadır. Bu örnekte açı $\theta_1=\theta_2=\frac{\pi}{4}$ dür.

Teorem 4.24. β, $\mathbb{R}^4$ uzayında κ_1,κ_2 ve κ_3 eğrilikli bir eğri ve $\kappa_3=\pm\kappa_1$ olsun. Bu durumda,

β bir V_2 helistir $\Leftrightarrow$ β bir V_3 helistir.

Başka bir deyişle, β bir $(2,3)$-tip helistir.

İspat. Kabul edelim ki, α bir V_2 helis olsun. Bu durumda Sonuç 4.14. den;

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3}+\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\nu\kappa_1\right)'\right)'+\nu\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\nu\kappa_1=0$$

dır. Bu denklemde $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ yazılırsa,

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} + \frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3\right)'\right)' + \nu\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_3 = 0$$

denklemi elde edilir ki Sonuç 4.16. den α bir V_3 helistir.

Yeter şartı da, benzer şekilde ispat edilebilir. ■

Teorem 4.25. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında α eğrilikleri $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ olan bir $(2,3)$-tip helis olsun. Bu durumda V_2 helisin ekseni, V_3 helisin eksenine diktir. Aynı zamanda, $\theta_1 = \theta_2$ veya $\theta_1 = \pi - \theta_2$ dir. Burada $\theta_1,\ V_2$ ile V_2 helis ekseninin yaptığı açı, $\theta_2,\ V_3$ ile V_3 helis ekseninin yaptığı açıdır.

İspat. α, V_2 helisinin ekseni (3.2) eşitliğinden

$$U_1 = \cos\theta_1 \left(V_1 H_{(2,1)} + V_2 H_{(2,2)} + V_3 H_{(2,3)} + V_4 H_{(2,4)}\right)$$

biçimindedir. Tanım 3.7. kullanılarak

$$U_1 = \cos\theta_1 \left(\left(\int \nu\kappa_1 dt\right) V_1 + V_2 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left(\int \nu\kappa_1 dt\right) V_3 + \frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1 dt\right)' + \kappa_2\right) V_4\right)$$

formunda elde edilir. Benzer şekilde,

α, V_3 helisinin ekseni (4.5) eşitliğinden

$$U_2 = \cos\theta_2 \left(V_1 H_{(3,1)} + V_2 H_{(3,2)} + V_3 H_{(3,3)} + V_4 H_{(3,4)}\right)$$

biçimindedir. Tanım 4.1. kullanılarak

$$U_2 = \cos\theta_2 \left(\frac{1}{\kappa_1}\left(\kappa_2 - \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int -\nu\kappa_3 dt\right)'\right) V_1 - \frac{\kappa_3}{\kappa_2}\left(\int \nu\kappa_3 dt\right) V_2 + V_3 - \left(\int \nu\kappa_3 dt\right) V_4\right)$$

elde edilir.

$$\langle U_1, U_2\rangle = \cos\theta_1\cos\theta_2\begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa_1}\left(\kappa_2+\frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\nu\kappa_3 dt\right)'\right)\left(\int\nu\kappa_1 dt\right)-\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\left(\int\nu\kappa_3 dt\right) \\ +\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left(\int\nu\kappa_1 dt\right)-\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\nu\kappa_1 dt\right)'+\kappa_2\right)\left(\int\nu\kappa_3 dt\right)\end{pmatrix}$$

eşitliğinde $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ yazılırsa $\langle U_1, U_2\rangle = 0$ dır. Dolayısıyla, V_2 helisin ekseni U_1 ile V_3 helisin ekseni U_2 birbirine diktir. U_1 ve U_2 birer sabit birim vektör olduğundan

$$1 = \cos^2\theta_1\left(\left(\int\nu\kappa_1 dt\right)^2+1+\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left(\int\nu\kappa_1 dt\right)\right)^2+\left(\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\nu\kappa_1 dt\right)'+\kappa_2\right)\right)^2\right)$$

ve

$$1 = \cos^2\theta_2\left(\left(\frac{1}{\kappa_1}\left(\kappa_2+\frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\nu\kappa_3 dt\right)'\right)\right)^2+\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\left(\int\nu\kappa_3 dt\right)\right)^2+1+\left(\int\nu\kappa_3 dt\right)^2\right)$$

eşitlikleri elde edilir. $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ göz önüne alındığında $\cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_2$ elde edilir. Buradan $\theta_1 = \theta_2$ veya $\theta_1 = \pi - \theta_2$ dir. ∎

Şimdi, $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında (j,k)-tip helislere örnekler verilecektir.

Örnek 4.26. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında;

$$\alpha(t) = \left(\frac{2\sqrt{2}\sin t\sin\sqrt{2}t+3\cos t\cos\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}, \frac{3\cos t\sin\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\sin t\cos\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{3}}, -\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)$$

eğrisi bir $(1,2)$-tip helistir. Gerçekten α eğrisinin

$$V_1(t) = \left(\frac{\sin t\cos\sqrt{2}t-\sqrt{2}\cos t\sin\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}, \frac{\sin t\sin\sqrt{2}t+\sqrt{2}\cos t\cos\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sin t}{\sqrt{3}}\right)$$

Frenet vektörü ile $(0,0,1,0)$ birim vektörü sabit bir açı yapar. Ayrıca

$$V_2(t) = \left(-\frac{\cos\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Frenet vektörü ile $(0,0,0,1)$ birim vektörü sabit bir açı yapar. Dolayısıyla, Tanım 4.20. den α bir $(1,2)$-tip helistir.

Örnek 4.27. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında;

$$\alpha(\mathrm{t})=\left(\int \frac{\sqrt{2}\cos\sqrt{5}t}{\sqrt{35-25\cos 2t}}dt, \int \frac{\sqrt{2}\sin\sqrt{5}t}{\sqrt{35-25\cos 2t}}dt, -\int \frac{\sqrt{10}\sin t}{\sqrt{7-5\cos 2t}}dt, \int \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35-25\cos 2t}}dt\right)$$

eğrisi bir $(3,4)$-tip helistir. Gerçekten α eğrisinin

$$V_3(t)=\left(-\frac{2\cos\sqrt{5}t}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sin\sqrt{5}t}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Frenet vektörü ile $(0,0,0,1)$ birim vektörü sabit bir açı yapar. Ayrıca

$$V_4(t)=\left(\frac{\sqrt{5}\cos(t)\sin\sqrt{5}t-\sin(t)\cos\sqrt{5}t}{\sqrt{6}}, -\frac{\sin(t)\sin\sqrt{5}t+\sqrt{5}\cos(t)\cos\sqrt{5}t}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\sin t\right)$$

Frenet vektörü ile $(0,0,1,0)$ birim vektörü sabit bir açı yapar. Dolayısıyla, Tanım 4.20. den α bir $(3,4)$-tip helistir.

4.3. $\mathbb{R}^5$ Öklid Uzayda V_1, V_2, V_3, V_4 ve V_5 Helislerin Karakterizasyonları

[1] ve [7] nolu kaynaklarda ispatlanan ve tezde Teorem 3.2. ile sunulan karakterizasyon $n=5$ için açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 4.28. α, $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin 1. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $H_{(1,i)}, (1\leq i\leq 5)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\alpha \text{ bir } V_1 \text{ helistir } &\Leftrightarrow H'_{(1,5)}+\nu\kappa_4 H_{(1,4)}=0\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}+\frac{1}{\nu\kappa_4}\left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)'\right)'+\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'=0\end{aligned}$$

dır.

Teorem 4.29. $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve κ_4 olan bir V_1 helis α olsun. $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\kappa_4 = \pm \frac{\frac{\kappa_3\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)^2}}$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında α eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve κ_4 olan bir V_1 helis olsun. Bu durumda, Sonuç 4.28. den

$$\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4}\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_4}\left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)'\right)' + \frac{\kappa_4}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)' = 0$$

dır. Denklemin her iki tarafı $2\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4}\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_4}\left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)'\right)$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4}\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_4}\left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)'\right)^2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)^2 = c^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\kappa_4 = \pm \frac{\frac{\kappa_3\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)^2}}$$

dir. ∎

[5] nolu kaynakta ispatlanan ve tezde Teorem 3.8. ile sunulan karakterizasyon $n = 5$ için açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 4.30. $\beta,\ \mathbb{R}^5$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin 2. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $H_{(2,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (1 \leq i \leq 5)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\beta \text{ bir } V_2 \text{ helistir } &\Leftrightarrow H'_{(2,5)} + \nu\kappa_4 H_{(2,4)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1 + \frac{1}{\nu\kappa_4}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)'\right)' \\ &+ \frac{\kappa_4}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)' + \nu\frac{\kappa_4\kappa_2}{\kappa_3} = 0\end{aligned}$$

dır.

Teorem 4.31. $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında eğrilikleri $\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3$ ve κ_4 olan bir V_2 helis β olsun. $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\kappa_4 = \pm\frac{\frac{\kappa_1\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)^2 - \left(\int \nu\kappa_1\right)^2 - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)^2}}$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında α eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve κ_4 olan bir V_2 helis olsun. Bu durumda, Sonuç 4.30. dan

$$\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1 + \frac{1}{\nu\kappa_4}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)'\right)' + \frac{\kappa_4}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)' + \nu\frac{\kappa_4\kappa_2}{\kappa_3} = 0$$

dır. Denklemin her iki tarafı $2\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1 + \frac{1}{\nu\kappa_4}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)'\right)$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1 + \frac{1}{\nu\kappa_4}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)'\right)^2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)^2 + \left(\int \nu\kappa_1\right)^2 + \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)^2 = c^2$$

elde edilir. Buradan,

$$\kappa_4 = \pm \frac{\frac{\kappa_1\kappa_3}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)^2 - \left(\int \nu\kappa_1\right)^2 - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int \nu\kappa_1\right)'\right)^2}}$$

dir. ■

Bu kısımda, $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında harmonik eğrilik fonksiyonu tanımlanıp, V_3 helisin harmonik eğrilik fonksiyonuna bağlı bazı karakterizasyonları verilecektir.

Tanım 4.32. $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında eğrilikleri $\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3$ ve κ_4 olan bir eğri γ olsun.

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int \nu\kappa_1 dt \\
G(t) &= \int \nu\kappa_4 dt \\
A(t) &= -\int \nu\kappa_3 \sin G(t)\, dt \\
B(t) &= -\int \nu\kappa_3 \cos G(t)\, dt \\
C(t) &= \int \nu\kappa_2 \cos F(t)\, dt \\
D(t) &= -\int \nu\kappa_2 \sin F(t)\, dt
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$H_{(3,i)} = \begin{cases} D(t)\cos(F(t)) + C(t)\sin(F(t)), & i=1 \\ C(t)\cos(F(t)) - D(t)\sin(F(t)), & i=2 \\ 1, & i=3 \\ B(t)\cos(G(t)) + A(t)\sin(G(t)), & i=4 \\ A(t)\cos(G(t)) - B(t)\sin(G(t)), & i=5 \end{cases},$$

biçiminde tanımlanan $H_{(3,i)} : I \to \mathbb{R},\ (1 \leq i \leq 5)$ fonksiyonuna γ eğrisinin 3. tip harmonik eğrilik fonksiyonu denir.

Teorem 4.33. $\mathbb{R}^5$ uzayında γ bir eğri olsun. Bu eğrinin 3. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $H_{(3,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (1 \leq i \leq 5)$ olmak üzere,

γ bir V_3 helistir $\Leftrightarrow \kappa_2 H_{(3,2)} - \kappa_3 H_{(3,4)} = 0$

dır.

İspat. Farz edelim ki, γ bir V_3 helis olsun. Bu durumda V_3 ile sabit θ açısı yapan bir sabit U vektörü vardır.

$\forall t \in I$ için $U = \sum_{i=1}^{5} a_i(t) V_i(t)$ sağlayan $a_i, \ (1 \leq i \leq 5)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları ele alalım. Dolayısıyla,

$$a_i = \langle V_i, U \rangle, (1 \leq i \leq 5) \tag{4.6}$$

dir. γ bir V_3 helis olduğundan $a_3 = \langle V_3, U \rangle = \cos\theta$ sabitine eşittir. (4.6) denkleminin türevi alınıp (2.2) sistemi ile birlikte kullanırsa,

$$\begin{aligned}
&a_1{}' - \nu\kappa_1 a_2 = 0 \\
&a_2{}' + \nu\kappa_1 a_1 - \nu\kappa_2 a_3 = 0 \\
&\kappa_2 a_2 - \kappa_3 a_4 = 0 \\
&a_4{}' + \nu\kappa_3 a_3 - \nu\kappa_4 a_5 = 0 \\
&a_5{}' + \nu\kappa_4 a_4 = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. $a_3 = \cos\theta$ olduğundan $H_{(3,i)}, \ (1 \leq i \leq 5)$ 3. tip harmonik eğrilik fonksiyonu a_i fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$H_{(3,i)} = \frac{a_i}{a_3}, \ (1 \leq i \leq 5) \tag{4.8}$$

Üstelik, (4.8) denklemini türetip (4.7) denklem sistemi ile kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&H'_{(3,1)} - \nu\kappa_1 H_{(3,2)} = 0 \\
&H'_{(3,2)} + \nu\kappa_1 H_{(3,1)} - \nu\kappa_2 = 0 \\
&\kappa_2 H_{(3,2)} - \kappa_3 H_{(3,4)} = 0 \\
&H'_{(3,4)} + \nu\kappa_3 - \nu\kappa_4 H_{(3,5)} = 0 \\
&H'_{(3,5)} + \nu\kappa_4 H_{(3,4)} = 0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

denklem sistemi elde edilir. Tanım 4.32. dan (4.9) denklem sisteminin ilk iki ve son iki denklemi sağlanır. (4.9) denklem sisteminin üçüncü denkleminden ise gerek şart $\kappa_2 H_{(3,2)} - \kappa_3 H_{(3,4)} = 0$ elde edilir.

Tersine olarak γ bir eğri ve bu eğrinin 3. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $H_{(3,i)}$ olsun ve $\kappa_2 H_{(3,2)} - \kappa_3 H_{(3,4)} = 0$ şartı sağlansın. U vektörü θ sabit olacak şekilde aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$U = \cos\theta \left(\sum_{i=1}^{5} H_{(3,i)} V_i \right). \tag{4.10}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} \langle V_3, U \rangle &= \left\langle V_3, \cos\theta \left(\sum_{i=1}^{5} H_{(3,i)} V_i \right) \right\rangle = \cos\theta \left(\sum_{i=1}^{5} H_{(3,i)} \langle V_3, V_i \rangle \right) \\ &= \cos\theta \, (0 + 0 + 1 + 0 + 0) \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla, U vektörünün V_3 Frenet vektörü ile sabit açı yapar.

Şimdi U vektörünün sabit bir vektör olduğunu gösterilecektir. Bunun için $U' = 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. 4.10 denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos\theta} U' = {} & H'_{(3,1)} V_1 + H_{(3,1)} {V_1}' + H'_{(3,2)} V_2 + H_{(3,2)} {V_2}' + H'_{(3,3)} V_3 + H_{(3,3)} {V_3}' \\ & + H'_{(3,4)} V_4 + H_{(3,4)} {V_4}' + H'_{(3,5)} V_5 + H_{(3,5)} {V_5}' \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem, (2.2) sistemi ile birlikte kullanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos\theta} U' = {} & H'_{(3,1)} V_1 + \nu\kappa_1 H_{(3,1)} V_2 + H'_{(3,2)} V_2 + \nu\kappa_2 H_{(3,2)} V_3 - \nu\kappa_1 H_{(3,2)} V_1 \\ & + H'_{(3,3)} V_3 - \nu\kappa_2 H_{(3,3)} V_2 + \nu\kappa_3 H_{(3,3)} V_4 + H'_{(3,4)} V_4 - \nu\kappa_3 H_{(3,4)} V_3 \\ & + \nu\kappa_4 H_{(3,4)} V_5 + H'_{(3,5)} V_5 - \nu\kappa_4 H_{(3,5)} V_4 \end{aligned}$$

elde edilen bu denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos\theta} U' = {} & \left(H'_{(3,1)} - \nu\kappa_1 H_{(3,2)} \right) V_1 + \left(H'_{(3,2)} + \nu\kappa_1 H_{(3,1)} - \nu\kappa_2 H_{(3,3)} \right) V_2 \\ & + \left(\nu\kappa_2 H_{(3,2)} + H'_{(3,3)} - \nu\kappa_3 H_{(3,4)} \right) V_3 + \left(\nu\kappa_3 H_{(3,3)} + H'_{(3,4)} - \nu\kappa_4 H_{(3,5)} \right) V_4 \\ & + \left(\nu\kappa_4 H_{(3,4)} + H'_{(3,5)} \right) V_5 \end{aligned}$$

elde edilirki Tanım 4.32. ve yeter şartdan $U' = 0$ olduğu açıkca görülebilir. Dolayısıyla U vektörü sabitdir.

Böylece, γ eğrisi bir V_3 helistir. ■

Teorem 4.34. $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında, $\{H_{(3,1)}, H_{(3,2)}, H_{(3,3)}, H_{(3,4)}, H_{(3,5)}\}$ harmonik eğrilikli birim hızlı bir eğri α olsun.

$$\alpha \text{ bir } V_3 \text{ helis ise } \sum_{i=1}^{5} H_{(3,i)}^2 = \sec^2\theta$$

dir.

İspat. α, V_3 helis eksenini U, (4.10) denklemi formundadır. U birim vektör olduğundan ispat kolayca görülebilir. ■

$n = 5$ için Teorem 4.2. açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 4.35. α, $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin 4. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $H_{(4,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (1 \leq i \leq 5)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ bir } V_4 \text{ helistir } &\Leftrightarrow H'_{(4,1)} - \nu\kappa_1 H_{(4,2)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{\kappa_4}{\kappa_3} \int \nu\kappa_4 + \frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)'\right)'\right)' \\
&+ \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)' + \nu\frac{\kappa_3\kappa_1}{\kappa_2} = 0
\end{aligned}$$

dır.

Teorem 4.36. $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında eğrilikleri $\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3$ ve κ_4 olan bir V_4 helis α olsun. $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\kappa_1 = \pm \frac{\frac{\kappa_4\kappa_2}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)'\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)^2 - \left(\int \nu\kappa_4\right)^2 - \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)'\right)^2}}$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında α eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve κ_4 olan bir V_4 helis olsun. Bu durumda, Sonuç 4.35. den

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4 + \frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)'\right)'\right)' + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)' + \nu\frac{\kappa_3\kappa_1}{\kappa_2} = 0$$

dır. Denklemin her iki tarafı $2\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4 + \frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)'\right)'\right)$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4 + \frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)'\right)'\right)^2 + \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)^2 + \left(\int \nu\kappa_4\right)^2 + \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)'\right)^2 = c^2$$

elde edilir. Buradan,

$$\kappa_1 = \pm\frac{\frac{\kappa_2\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)'\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)^2 - \left(\int \nu\kappa_4\right)^2 - \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} + \frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int \nu\kappa_4\right)'\right)^2}}$$

dir. ■

[13] nolu kaynakta ispatlanan ve tezde Teorem 3.13. ile sunulan karakterizasyon $n = 5$ için açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 4.37. α, $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin 5. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $H_{(5,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (1 \leq i \leq 5)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\alpha \text{ bir } V_5 \text{ helistir } &\Leftrightarrow H'_{(5,1)} - \nu\kappa_1 H_{(5,2)} = 0\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{\kappa_4}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)'\right)'\right)' + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)' = 0\end{aligned}$$

dır.

Teorem 4.38. $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve κ_4 olan bir V_5 helis α olsun. $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\kappa_1 = \pm \frac{\frac{\kappa_2 \kappa_4}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)'\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)^2 - \left(\frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)'\right)^2}}$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}^5$ Öklid uzayında α eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve κ_4 olan bir V_5 helis olsun. Bu durumda, Sonuç 4.37. dan

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{\kappa_4}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)'\right)'\right)' + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)' = 0$$

dır. Denklemin her iki tarafı $2\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{\kappa_4}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)'\right)'\right)$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{\kappa_4}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)'\right)'\right)^2 + \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)'\right)^2 = c^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\kappa_1 = \pm \frac{\frac{\kappa_2 \kappa_4}{\kappa_3} + \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)'\right)'}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)^2 - \left(\frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)'\right)^2}}$$

dir. ■

Teorem 4.39. $\alpha, \mathbb{R}^5$ Öklid uzayında $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve κ_4 eğrilikli bir eğri olsun. $\kappa_4 = \kappa_1$ ve $\kappa_3 = \kappa_2$ $(\kappa_4 = -\kappa_1$ ve $\kappa_3 = -\kappa_2)$ şartı sağlansın. Bu durumda,

α bir V_1 helistir $\Leftrightarrow$ α bir V_5 helistir.

Başka bir deyişle, α bir $(1,5)$-tip helistir.

İspat. Kabul edelim ki, α bir V_1 helis olsun. Bu durumda Sonuç 4.28. den;

$$\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}+\frac{1}{\nu\kappa_4}\left(\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)'\right)'+\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'=0$$

dır. Bu denklemde $\kappa_1=\kappa_4$ ve $\kappa_2=\kappa_3$ $(\kappa_4=-\kappa_1$ ve $\kappa_3=-\kappa_2)$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{\kappa_4}{\kappa_3}+\frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)'\right)'\right)'+\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)'=0$$

denklemi elde edilir ki Sonuç 4.37. den α bir V_5 helistir.

Yeter şartı da, benzer şekilde ispat edilebilir.

■

Teorem 4.40. $\alpha, \mathbb{R}^5$ Öklid uzayında $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve κ_4 eğrilikli bir eğri olsun. $\kappa_4=\kappa_1$ ve $\kappa_3=\kappa_2$ $(\kappa_4=-\kappa_1$ ve $\kappa_3=-\kappa_2)$ şartı sağlansın. Bu durumda,

α bir V_2 helistir $\Leftrightarrow$ α bir V_4 helistir.

Başka bir deyişle, α eğrisi bir $(2,4)$-tip helistir.

İspat. Kabul edelim ki, α bir V_2 helis olsun. Bu durumda Sonuç 4.30. den;

$$\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4}\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\nu\kappa_1+\frac{1}{\nu\kappa_4}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3}+\frac{1}{\nu\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\nu\kappa_1\right)'\right)'\right)'+\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\nu\kappa_1\right)'+\nu\frac{\kappa_4\kappa_2}{\kappa_3}=0$$

dır. Bu denklemde varsayımımız olan $\kappa_1=\kappa_4$ ve $\kappa_2=\kappa_3$ $(\kappa_4=-\kappa_1$ ve $\kappa_3=-\kappa_2)$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int\nu\kappa_4+\frac{1}{\nu\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}+\frac{1}{\nu\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int\nu\kappa_4\right)'\right)'\right)'+\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\int\nu\kappa_4\right)'+\nu\frac{\kappa_3\kappa_1}{\kappa_2}=0$$

denklemi elde edilir ki Sonuç 4.35. den α bir V_4 helistir.

Yeter şartı da, benzer şekilde ispat edilir. ■

5. İKİ İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDİYEN UZAYDA HARMONİK EĞRİLİKLERLE V_i HELİSLERİN VE POLİNOM HELİSİN KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde, ilk olarak $\mathbb{R}_2^n, n-$boyutlu 2 indeksli yarı-Öklidiyen uzayında V_1, V_2, V_{n-1} ve V_n helislerin harmonik eğrilik fonksiyonuna bağlı karakterizasyonları verildi ve $n = 4$ için bazı sonuçlar elde edildi. Sonra, $\mathbb{R}_2^n$ uzayında zamansı ve uzaysı polinom helisler karakterize edildi.

Bu bölüm de null olmayan Serret Frenet vektörlerine sahip eğriler ele alınmıştır.

5.1. $\mathbb{R}_2^n$ Yarı-Öklidiyen Uzayda V_1, V_2, V_{n-1} ve V_n helislerin Karakterizasyonları

Tanım 5.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^n$ eğrisi için Serret Frenet vektörü $V_i,\ (1 \le i \le n)$ ile sabit bir U vektörünün skalar çarpımı sıfırdan farklı bir sabitse bu eğriye V_i helis denir.

Tanım 5.2. $\alpha,\ \mathbb{R}_2^n$ uzayında bir eğri olsun.

$$\mathbb{H}_{(1,i)} = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i = 2 \\ \frac{1}{\kappa_{i-1}}\left(\kappa_{i-2}\mathbb{H}_{(1,i-2)} + \frac{1}{\nu\varepsilon_{i-1}}\mathbb{H}'_{(1,i-1)}\right), & 3 \le i \le n \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $\mathbb{H}_{(1,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (1 \le i \le n)$ fonksiyonuna α eğrisinin 1. tip harmonik eğrilik fonksiyonu denir.

Teorem 5.3. $\mathbb{R}_2^n$ uzayında α bir eğri olsun. Bu eğrinin 1. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(1,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (1 \le i \le n)$ olmak üzere,

$$\alpha \text{ bir } V_1 \text{ helistir } \Leftrightarrow \mathbb{H}'_{(1,n)} + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(1,n-1)} = 0$$

dır.

İspat. Farz edelim ki, α bir V_1 helis olsun. Bu durumda Tanım 5.1. den V_1 ile skalar çarpımı sıfırdan farklı olan bir sabit U vektörü vardır.

$\forall t \in I$ için $U = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t) V_i(t)$ eşitliğini sağlayan $a_i,\ (1 \leq i \leq n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlarını ele alalım. Dolayısıyla,

$$a_i = \varepsilon_i g(V_i, U),\ (1 \leq i \leq n) \tag{5.1}$$

dir. α bir V_1 helis olduğundan $a_1 = \varepsilon_1 g(V_1, U) = \varepsilon_1 c,\ c \neq 0$ dır. (5.1) denkleminin türevi alınıp (2.3) sistemi ile birlikte kullanılırsa,

$$a_1' = \varepsilon_1 g(V_1', U) = \nu\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa_1 g(V_2, U) = \nu\varepsilon_1\kappa_1 a_2 = 0$$

ve

$$a_2 = 0$$

dır. Benzer şekilde $(2 \leq i \leq n-1)$ olduğu durum için,

$$\begin{aligned} a_i' &= \varepsilon_i g(V_i', U) = -\nu\varepsilon_i\varepsilon_{i-1}\kappa_{i-1} g(V_{i-1}, U) + \nu\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\kappa_i g(V_{i+1}, U) \\ &= -\nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}a_{i-1} + \nu\varepsilon_i\kappa_i a_{i+1} \end{aligned}$$

ve

$$a_i' + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}a_{i-1} - \nu\varepsilon_i\kappa_i a_{i+1} = 0$$

dır. Son olarak $i = n$ durumu için, yani $a_n = \varepsilon_n g(V_n, U)$ olduğundan,

$$a_n' = \varepsilon_n g(V_n', U) = -\nu\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1} g(V_{n-1}, U) = -\nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}a_{n-1}$$

ve

$$a_n' + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}a_{n-1} = 0$$

dır. Dolayısıyla, $a_2 = 0$ ve

$$\begin{aligned} &a_1' = 0 \\ &a_i' + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}a_{i-1} - \nu\varepsilon_i\kappa_i a_{i+1} = 0, \quad (2 \leq i \leq n-1) \\ &a_n' + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}a_{n-1} = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

$a_1 = \varepsilon_1 c \neq 0$ olduğundan $\mathbb{H}_{(1,i)},\ (1 \leq i \leq n)$ $1.$ tip harmonik eğrilik fonksiyonu a_i fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\mathbb{H}_{(1,i)} = \frac{a_i}{a_1},\ (1 \leq i \leq n)\,. \tag{5.3}$$

Üstelik, (5.3) denkleminin türevi alınıp (5.2) denklem sisteminin son denklemi haricinde birlikte kullanılmasıyla $1.$ tip harmonik eğrilik fonksiyonu elde edilir. (5.3) denkleminin türevi alınıp (5.2) denklem sisteminin son denklemiyle birlikte kullanılmasıyla V_1 helis olma şartı elde edilir.

Yani, (5.2) denklem sisteminin ilk denklemi (5.3) denklemi birlikte kullanıldığında,

$$\mathbb{H}_{(1,1)} = \frac{a_1}{a_1} = 1$$

ve

$$\mathbb{H}_{(1,2)} = \frac{a_2}{a_1} = 0$$

dır. Yine, benzer şekilde (5.2) denklem sisteminin ikinci denklemi a_1 ile bölünüp (5.3) denklemi birlikte kullanıldığında,

$$\frac{a_i'}{a_1} + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}\mathbb{H}_{(1,i-1)} - \nu\varepsilon_i\kappa_i\mathbb{H}_{(1,i+1)} = 0, \quad (2 \leq i \leq n-1)$$

dır. Bu denklem ile (5.3) denkleminin türevi alınarak kullanılırsa,

$$\mathbb{H}_{(1,i)}' + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}\mathbb{H}_{(1,i-1)} - \nu\varepsilon_i\kappa_i\mathbb{H}_{(1,i+1)} = 0$$

dır. Buradan

$$\mathbb{H}_{(1,i+1)} = \frac{1}{\kappa_i}\left(\kappa_{i-1}\mathbb{H}_{(1,i-1)} + \frac{1}{\nu\varepsilon_i}\mathbb{H}'_{(1,i)}\right), \quad (2 \leq i \leq n-1)$$

olarak bulunur.

(5.2) denklem sisteminin son denkleminin a_1 ile bölünmesiyle

$$\frac{{a_n}'}{a_1} + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_1} = 0$$

elde edilir. Bu denklemde (5.3) denklemi kullanılarak

$$\mathbb{H}'_{(1,n)} + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(1,n-1)} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece gerek şart sağlanır.

Tersine olarak α bir eğri ve bu eğrinin 1. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(1,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(1 \leq i \leq n)$ ve $\mathbb{H}'_{(1,n)} + \varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(1,n-1)} = 0$ olsun. U vektörü c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$U = \varepsilon_1 c\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{H}_{(1,i)}V_i\right). \tag{5.4}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} g\left(V_1, U\right) &= g\left(V_1, \varepsilon_1 c\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{H}_{(1,i)}V_i\right)\right) = \varepsilon_1 c\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{H}_{(1,i)}g\left(V_1, V_i\right)\right) \\ &= \varepsilon_1 c\left(\varepsilon_1 + 0 + \cdots + 0\right) \\ &= c \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla U vektörünün V_1 ile skalar çarpımı sıfırdan farklı bir sabittir. Şimdi, U vektörünün, sabit bir vektör olduğu gösterilecektir. Bunun için $U' = 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. 5.4 denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_1 c}U' &= \mathbb{H}'_{(1,1)}V_1 + \mathbb{H}_{(1,1)}V_1' + \mathbb{H}'_{(1,2)}V_2 + \mathbb{H}_{(1,2)}V_2' \\ &+ \mathbb{H}'_{(1,3)}V_3 + \mathbb{H}_{(1,3)}V_3' + \mathbb{H}'_{(1,4)}V_4 + \mathbb{H}_{(1,4)}V_4' \\ &\vdots \\ &+ \mathbb{H}'_{(1,n-1)}V_{n-1} + \mathbb{H}_{(1,n-1)}V_{n-1}' + \mathbb{H}'_{(1,n)}V_n + \mathbb{H}_{(1,n)}V_n'\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem, (2.3) sistemi ile birlikte kullanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_1 c}U' &= \mathbb{H}'_{(1,1)}V_1 + \nu\varepsilon_2\kappa_1\mathbb{H}_{(1,1)}V_2 + \mathbb{H}'_{(1,2)}V_2 - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(1,2)}V_1 \\ &+ \nu\varepsilon_3\kappa_2\mathbb{H}_{(1,2)}V_3 + \mathbb{H}'_{(1,3)}V_3 - \nu\varepsilon_2\kappa_2\mathbb{H}_{(1,3)}V_2 + \nu\varepsilon_4\kappa_3\mathbb{H}_{(1,3)} \\ &\vdots \\ &+ \mathbb{H}'_{(1,n-1)}V_{n-1} - \nu\varepsilon_{n-2}\kappa_{n-2}\mathbb{H}_{(1,n-1)}V_{n-2} + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(1,n-1)}V_n \\ &+ \mathbb{H}'_{(1,n)}V_n - \nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(1,n)}V_{n-1}\end{aligned}$$

elde edilen bu denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_1 c}U' &= \left(\mathbb{H}'_{(1,1)} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(1,2)}\right)V_1 \\ &+ \left(\nu\varepsilon_2\kappa_1\mathbb{H}_{(1,1)} + \mathbb{H}'_{(1,2)} - \nu\varepsilon_2\kappa_2\mathbb{H}_{(1,3)}\right)V_2 \\ &+ \left(\nu\varepsilon_3\kappa_2\mathbb{H}_{(1,2)} + \mathbb{H}'_{(1,3)} - \nu\varepsilon_3\kappa_3\mathbb{H}_{(1,4)}\right)V_3 \\ &\vdots \\ &+ \left(\nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-2}\mathbb{H}_{(1,n-2)} + \mathbb{H}'_{(1,n-1)} - \nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(1,n)}\right)V_{n-1} \\ &+ \left(\nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(1,n-1)} + \mathbb{H}'_{(1,n)}\right)V_n\end{aligned}$$

elde edilir ki Tanım 5.2. ve yeter şartdan $U' = 0$ olduğu açıkca görülebilir. O halde, U vektörü sabitdir.

Dolayısıyla, α eğrisi bir V_1 helistir. ■

Tanım 5.4. $\beta,\ \mathbb{R}_2^n$ uzayında bir eğri olsun.

$$\mathbb{H}_{(2,i)} = \begin{cases} \varepsilon_1 \int \nu\kappa_1, & i=1 \\ 1, & i=2 \\ \frac{1}{\kappa_{i-1}}\left[\frac{1}{\nu\varepsilon_{i-1}}\mathbb{H}'_{(2,i-1)} + \kappa_{i-2}\mathbb{H}_{(2,i-2)}\right], & 3 \leq i \leq n \end{cases},$$

biçiminde tanımlı $\mathbb{H}_{(2,i)} : I \to \mathbb{R},\ (1 \leq i \leq n)$ fonksiyonuna β eğrisinin 2. tip harmonik eğrilik fonksiyonu denir.

Teorem 5.5. $\mathbb{R}_2^n$ uzayında β bir eğri olsun. Bu eğrinin 2. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(2,i)} : I \to \mathbb{R},\ (1 \leq i \leq n)$ olmak üzere,

$$\beta \text{ bir } V_2 \text{ helistir } \Leftrightarrow \mathbb{H}'_{(2,n)} + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(2,n-1)} = 0$$

dır.

İspat. Farz edelim ki, β bir V_2 helis olsun. Bu durumda Tanım 5.1. den V_2 ile skalar çarpımı sıfırdan farklı olan bir sabit U vektörü vardır.

$\forall t \in I$ için $U = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t)\, V_i(t)$ eşitliğinin sağlayan $a_i,\ (1 \leq i \leq n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları ele alalım. Dolayısıyla,

$$a_i = \varepsilon_i g\left(V_i, U\right),\ (1 \leq i \leq n) \tag{5.5}$$

dir. α bir V_2 helis olduğundan $a_2 = \varepsilon_2 g\left(V_2, U\right) = \varepsilon_2 c,\ c \neq 0$ dır. (5.5) denkleminin türevi alınıp (2.3) sistemi ile birlikte kullanılırsa,

$$a'_1 = \varepsilon_1 g\left(V'_1, U\right) = \nu\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa_1 g\left(V_2, U\right) = \nu\varepsilon_1\kappa_1 a_2$$

ve

$$a_1 = \varepsilon_1 a_2 \int \nu\kappa_1 \tag{5.6}$$

dır. Benzer şekilde $(2 \leq i \leq n-1)$ olduğu durum için,

$$\begin{aligned} a_i' &= \varepsilon_i g\left(V_i', U\right) = -\nu\varepsilon_i\varepsilon_{i-1}\kappa_{i-1} g\left(V_{i-1}, U\right) + \nu\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\kappa_i g\left(V_{i+1}, U\right) \\ &= -\nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}a_{i-1} + \nu\varepsilon_i\kappa_i a_{i+1} \end{aligned}$$

ve

$$a_i' + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}a_{i-1} - \nu\varepsilon_i\kappa_i a_{i+1} = 0$$

dır. Burada $a_2' = 0$ dır. Son olarak $i = n$ durumu için, yani $a_n = \varepsilon_n g\left(V_n, U\right)$ olduğundan,

$$a_n' = \varepsilon_n g\left(V_n', U\right) = -\nu\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1} g\left(V_{n-1}, U\right) = -\nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}a_{n-1}$$

ve

$$a_n' + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}a_{n-1} = 0$$

dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} & a_1' = \nu\varepsilon_1\kappa_1 a_2 \\ & a_i' + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}a_{i-1} - \nu\varepsilon_i\kappa_i a_{i+1} = 0, \quad (2 \leq i \leq n-1) \\ & a_n' + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}a_{n-1} = 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

$a_2 = \varepsilon_2 c \neq 0$ olduğundan $\mathbb{H}_{(2,i)}$, $(1 \leq i \leq n)$ 2. tip harmonik eğrilik fonksiyonu a_i fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\mathbb{H}_{(2,i)} = \frac{a_i}{a_2}, \ (1 \leq i \leq n). \tag{5.8}$$

Üstelik, (5.8) denkleminin türevi alınıp (5.7) denklem sisteminin son denklemi haricinde birlikte kullanılmasıyla 2. tip harmonik eğrilik fonksiyonu elde edilir. (5.8) denkleminin türevi alınıp (5.7) denklem sisteminin son denklemiyle birlikte kullanılmasıyla V_2 helis olma şartı elde edilir.

Yani, (5.7) denklem sisteminin ilk denklemiyle (5.8) denklemi birlikte kullanıldığında,

$$\mathbb{H}_{(2,1)} = \frac{a_1}{a_2} = \varepsilon_1 \int \nu\kappa_1$$

ve

$$\mathbb{H}_{(2,2)} = \frac{a_2}{a_2} = 1$$

dir. Benzer şekilde, (5.7) denklem sisteminin ikinci denklemi a_2 ile bölünüp, (5.8) denklemi ile birlikte kullanılırsa

$$\frac{a_i'}{a_2} + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}\mathbb{H}_{(2,i-1)} - \nu\varepsilon_i\kappa_i\mathbb{H}_{(2,i+1)} = 0, \quad (2 \leq i \leq n-1)$$

dır. Bu denklem ile (5.8) denkleminin türevi alınarak kullanılırsa,

$$\mathbb{H}'_{(2,i)} + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}\mathbb{H}_{(2,i-1)} - \nu\varepsilon_i\kappa_i\mathbb{H}_{(2,i+1)} = 0$$

dır. Buradan

$$\mathbb{H}_{(2,i+1)} = \frac{1}{\kappa_i}\left(\kappa_{i-1}\mathbb{H}_{(2,i-1)} + \frac{1}{\nu\varepsilon_i}\mathbb{H}'_{(2,i)}\right), \quad (2 \leq i \leq n)$$

olarak bulunur. (5.7) denklem sisteminin son denkleminin a_2 ile bölünmesiyle

$$\frac{{a_n}'}{a_2} + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_2} = 0$$

elde edilir. Bu denklemde (5.8) denklemi kullanılarak

$$\mathbb{H}'_{(2,n)} + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(2,n-1)} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece gerek şart sağlanır.

Tersine olarak, β bir eğri ve bu eğrinin $2.$ tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(2,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (1 \leq i \leq n)$ ve $\mathbb{H}'_{(2,n)} + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(2,n-1)} = 0$ olsun. U vektörü c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$U = \varepsilon_2 c \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{H}_{(2,i)} V_i \right). \tag{5.9}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} g(V_2, U) &= g\left(V_2, \varepsilon_2 c \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{H}_{(2,i)} V_i \right)\right) = \varepsilon_2 c \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{H}_{(2,i)} g(V_2, V_i) \right) \\ &= \varepsilon_2 c \left(0 + \varepsilon_2 + 0 + \cdots + 0\right) \\ &= c \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla U vektörünün V_2 ile skalar çarpımı sıfırdan farklı bir sabittir. Şimdi, U vektörünün, sabit bir vektör olduğunu gösterilecektir. Bunun için $U' = 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. (5.9) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_2 c} U' &= \mathbb{H}'_{(2,1)} V_1 + \mathbb{H}_{(2,1)} V'_1 + \mathbb{H}'_{(2,2)} V_2 + \mathbb{H}_{(2,2)} V'_2 \\ &\quad + \mathbb{H}'_{(2,3)} V_3 + \mathbb{H}_{(2,3)} V'_3 + \mathbb{H}'_{(2,4)} V_4 + \mathbb{H}_{(2,4)} V'_4 \\ &\qquad \vdots \\ &\quad + \mathbb{H}'_{(2,n-1)} V_{n-1} + \mathbb{H}_{(2,n-1)} V'_{n-1} + \mathbb{H}'_{(2,n)} V_n + \mathbb{H}_{(2,n)} V'_n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem, (2.3) sistemi ile birlikte kullanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_2 c} U' &= \mathbb{H}'_{(2,1)} V_1 + \nu \varepsilon_2 \kappa_1 \mathbb{H}_{(2,1)} V_2 + \mathbb{H}'_{(2,2)} V_2 - \nu \varepsilon_1 \kappa_1 \mathbb{H}_{(2,2)} V_1 \\ &\quad + \nu \varepsilon_3 \kappa_2 \mathbb{H}_{(2,2)} V_3 + \mathbb{H}'_{(2,3)} V_3 - \nu \varepsilon_2 \kappa_2 \mathbb{H}_{(2,3)} V_2 + \nu \varepsilon_4 \kappa_3 \mathbb{H}_{(2,3)} \\ &\qquad \vdots \\ &\quad + \mathbb{H}'_{(2,n-1)} V_{n-1} - \nu \varepsilon_{n-2} \kappa_{n-2} \mathbb{H}_{(2,n-1)} V_{n-2} + \nu \varepsilon_n \kappa_{n-1} \mathbb{H}_{(2,n-1)} V_n \\ &\quad + \mathbb{H}'_{(2,n)} V_n - \nu \varepsilon_{n-1} \kappa_{n-1} \mathbb{H}_{(2,n)} V_{n-1} \end{aligned}$$

elde edilen bu denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon_2 c}U' = & \left(\mathbb{H}'_{(2,1)} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(2,2)}\right)V_1 \\
& + \left(\nu\varepsilon_2\kappa_1\mathbb{H}_{(2,1)} + \mathbb{H}'_{(2,2)} - \nu\varepsilon_2\kappa_2\mathbb{H}_{(2,3)}\right)V_2 \\
& + \left(\nu\varepsilon_3\kappa_2\mathbb{H}_{(2,2)} + \mathbb{H}'_{(2,3)} - \nu\varepsilon_3\kappa_3\mathbb{H}_{(2,4)}\right)V_3 \\
& \qquad \vdots \\
& + \left(\nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-2}\mathbb{H}_{(2,n-2)} + \mathbb{H}'_{(2,n-1)} - \nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(2,n)}\right)V_{n-1} \\
& + \left(\nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(2,n-1)} + \mathbb{H}'_{(2,n)}\right)V_n
\end{aligned}$$

elde edilir ki Tanım 5.4. ve yeter şartdan $U' = 0$ olduğu açıkca görülür. Öyleyse U vektörü sabitdir.

Dolayısıyla, β eğrisi bir V_2 helistir. ■

Tanım 5.6. γ, $\mathbb{R}_2^n$ uzayında bir eğri olsun.

$$\mathbb{H}_{(n-1,i)} = \begin{cases} \frac{1}{\kappa_i}\left[\kappa_{i+1}\mathbb{H}_{(n-1,i+2)} - \frac{1}{\nu\varepsilon_{i+1}}\mathbb{H}'_{(n-1,i+1)}\right], & 1 \le i \le n-2 \\ 1, & i = n-1 \\ -\varepsilon_n \int \nu\kappa_{n-1}, & i = n \end{cases},$$

biçiminde tanımlı $\mathbb{H}_{(n-1,i)} : I \to \mathbb{R}, (1 \le i \le n)$ fonksiyonuna γ eğrisinin $(n-1)$. tip harmonik eğrilik fonksiyonu denir.

Teorem 5.7. $\mathbb{R}_2^n$ uzayında γ bir eğri olsun. Bu eğrinin $(n-1)$. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(n-1,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (1 \le i \le n)$ olmak üzere,

$$\gamma \text{ bir } V_{n-1} \text{ helistir } \Leftrightarrow \mathbb{H}'_{(n-1,1)} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(n-1,2)} = 0$$

dır.

İspat. Farz edelim ki, γ bir V_{n-1} helis olsun. Bu durumda Tanım 5.1. den V_{n-1} ile skalar çarpımı sıfırdan farklı olan bir sabit U vektörü vardır.

$\forall t \in I$ için $U = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(t) V_i(t)$ eşitliğini sağlayan $a_i, \ (1 \leq i \leq n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları ele alalım. Dolayısıyla,

$$a_i = \varepsilon_i g(V_i, U), \ (1 \leq i \leq n) \tag{5.10}$$

dir. γ bir V_{n-1} helis olduğundan $a_{n-1} = \varepsilon_{n-1} g(V_{n-1}, U) = \varepsilon_{n-1} c, c \neq 0$ dır. (5.10) denkleminin türevi alınıp (2.3) sistemi ile birlikte kullanılırsa,

$i = n$ için,

$$a_n' = \varepsilon_n g(V_n', U) = -\nu \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \kappa_{n-1} g(V_{n-1}, U) = -\nu \varepsilon_n \kappa_{n-1} a_{n-1}$$

ve

$$a_n = -\varepsilon_n a_{n-1} \int \nu \kappa_{n-1}$$

dir. Benzer şekilde $(2 \leq i \leq n-1)$ olduğu durum için,

$$\begin{aligned} a_i' &= \varepsilon_i g(V_i', U) = -\nu \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \kappa_{i-1} g(V_{i-1}, U) + \nu \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \kappa_i g(V_{i+1}, U) \\ &= -\nu \varepsilon_i \kappa_{i-1} a_{i-1} + \nu \varepsilon_i \kappa_i a_{i+1} \end{aligned}$$

ve

$$a_i' + \nu \varepsilon_i \kappa_{i-1} a_{i-1} - \nu \varepsilon_i \kappa_i a_{i+1} = 0$$

dır. Burada $a_{n-1}' = 0$ dır. Son olarak $i = 1$ durumu için, yani $a_1 = \varepsilon_1 g(V_1, U)$ olduğundan,

$$a_1' = \varepsilon_1 g(V_1', U) = \nu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_1 g(V_2, U) = \nu \varepsilon_1 \kappa_1 a_2$$

ve

$$a_1' - \nu \varepsilon_1 \kappa_1 a_2 = 0$$

dır. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
& a_n' = -\nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}a_{n-1} \\
& a_i' + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}a_{i-1} - \nu\varepsilon_i\kappa_i a_{i+1} = 0, \quad (2 \leq i \leq n-1) \\
& a_1' - \nu\varepsilon_1\kappa_1 a_2 = 0
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

$a_{n-1} = \varepsilon_{n-1}c \neq 0$ olduğundan $\mathbb{H}_{(n-1,i)}, \ (1 \leq i \leq n)$ $(n{-}1)$. tip harmonik eğrilik fonksiyonu a_i fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$
\mathbb{H}_{(n-1,i)} = \frac{a_i}{a_{n-1}}, \ (1 \leq i \leq n). \tag{5.12}
$$

Üstelik, (5.12) denkleminin türevi alınıp (5.11) denklem sisteminin son denklemi haricinde birlikte kullanılmasıyla $(n{-}1)$. tip harmonik eğrilik fonksiyonu elde edilir. (5.12) denkleminin türevi alınıp (5.11) denklem sisteminin son denklemiyle birlikte kullanılmasıyla V_{n-1} helis olma şartı elde edilir.

Yani, (5.11) denklem sisteminin ilk denklemiyle (5.12) denklemi birlikte kullanıldığında,

$$
\mathbb{H}_{(n-1,n)} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = -\varepsilon_n \int \nu\kappa_{n-1}
$$

ve

$$
\mathbb{H}_{(n-1,n-1)} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} = 1
$$

dır. Benzer şekilde, (5.11) denklem sisteminin ikinci denklemi a_{n-1} ile bölünüp, (5.12) denklemi ile birlikte kullanılırsa,

$$
\frac{a_i'}{a_{n-1}} + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}\mathbb{H}_{(n-1,i-1)} - \nu\varepsilon_i\kappa_i\mathbb{H}_{(n-1,i+1)} = 0, \quad (2 \leq i \leq n-1)
$$

dır. Bu denklem ile (5.12) denkleminin türevi alınarak kullanılırsa,

$$
\mathbb{H}_{(n-1,i)}' + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}\mathbb{H}_{(n-1,i-1)} - \nu\varepsilon_i\kappa_i\mathbb{H}_{(n-1,i+1)} = 0
$$

dır. Buradan

$$\mathbb{H}_{(n-1,i-1)} = \frac{1}{\kappa_{i-1}}\left(\kappa_i \mathbb{H}_{(n-1,i+1)} - \frac{1}{\nu\varepsilon_i}\mathbb{H}'_{(n-1,i)}\right), \quad (2 \leq i \leq n-1)$$

olarak bulunur.

(5.11) denklem sisteminin son denklemini a_{n-1} ile bölünmesiyle

$$\frac{a_1{}'}{a_{n-1}} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\frac{a_2}{a_{n-1}} = 0$$

elde edilir. Bu denklemde (5.12) denklemi kullanılarak

$$\mathbb{H}'_{(n-1,1)} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(n-1,2)} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece gerek şart sağlanır.

Tersine olarak γ bir eğri ve bu eğrinin $(n-1)$. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(n-1,i)}$: $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(1 \leq i \leq n)$ ve $\mathbb{H}'_{(n-1,1)} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(n-1,2)} = 0$ olsun. U vektörü c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$U = \varepsilon_{n-1}c\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{H}_{(n-1,i)}V_i\right). \tag{5.13}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} g\left(V_{n-1}, U\right) &= g\left(V_{n-1}, \varepsilon_{n-1}c\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{H}_{(n-1,i)}V_i\right)\right) = \varepsilon_{n-1}c\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{H}_{(n-1,i)}g\left(V_{n-1}, V_i\right)\right) \\ &= \varepsilon_{n-1}c\left(0 + 0 + \cdots + 0 + \varepsilon_{n-1} + 0\right) \\ &= c \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla U vektörünün V_{n-1} ile skalar çarpımı sıfırdan farklı bir sabittir. Şimdi, U vektörünün, sabit bir vektör olduğu gösterilecektir. Bunun için $U' = 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. (5.13) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_{n-1}c}U' &= \mathbb{H}'_{(n-1,1)}V_1 + \mathbb{H}_{(n-1,1)}V_1' + \mathbb{H}'_{(n-1,2)}V_2 + \mathbb{H}_{(n-1,2)}V_2' \\ &+ \mathbb{H}'_{(n-1,3)}V_3 + \mathbb{H}_{(n-1,3)}V_3' + \mathbb{H}'_{(n-1,4)}V_4 + \mathbb{H}_{(n-1,4)}V_4' \\ &\vdots \\ &+ \mathbb{H}'_{(n-1,n-1)}V_{n-1} + \mathbb{H}_{(n-1,n-1)}V_{n-1}' + \mathbb{H}'_{(n-1,n)}V_n + \mathbb{H}_{(n-1,n)}V_n'\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem, (2.3) sistemi ile birlikte kullanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_{n-1}c}U' &= \mathbb{H}'_{(n-1,1)}V_1 + \nu\varepsilon_2\kappa_1\mathbb{H}_{(n-1,1)}V_2 + \mathbb{H}'_{(n-1,2)}V_2 - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(n-1,2)}V_1 \\ &+ \nu\varepsilon_3\kappa_2\mathbb{H}_{(n-1,2)}V_3 + \mathbb{H}'_{(n-1,3)}V_3 - \nu\varepsilon_2\kappa_2\mathbb{H}_{(n-1,3)}V_2 + \nu\varepsilon_4\kappa_3\mathbb{H}_{(2,3)} \\ &\vdots \\ &+ \mathbb{H}'_{(n-1,n-1)}V_{n-1} - \nu\varepsilon_{n-2}\kappa_{n-2}\mathbb{H}_{(n-1,n-1)}V_{n-2} + \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(n-1,n-1)}V_n \\ &+ \mathbb{H}'_{(n-1,n)}V_n - \nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(n-1,n)}V_{n-1}\end{aligned}$$

elde edilen bu denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_{n-1}c}U' &= \left(\mathbb{H}'_{(n-1,1)} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(n-1,2)}\right)V_1 \\ &+ \left(\nu\varepsilon_2\kappa_1\mathbb{H}_{(n-1,1)} + \mathbb{H}'_{(n-1,2)} - \nu\varepsilon_2\kappa_2\mathbb{H}_{(n-1,3)}\right)V_2 \\ &+ \left(\nu\varepsilon_3\kappa_2\mathbb{H}_{(n-1,2)} + \mathbb{H}'_{(n-1,3)} - \nu\varepsilon_3\kappa_3\mathbb{H}_{(n-1,4)}\right)V_3 \\ &\vdots \\ &+ \left(\nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-2}\mathbb{H}_{(n-1,n-2)} + \mathbb{H}'_{(n-1,n-1)} - \nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(n-1,n)}\right)V_{n-1} \\ &+ \left(\nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(n-1,n-1)} + \mathbb{H}'_{(n-1,n)}\right)V_n\end{aligned}$$

elde edilir ki Tanım 5.6. ve yeter şartdan $U' = 0$ olduğu açıkca görülebilir. Öyleyse U vektörü sabitdir.

Dolayısıyla, γ eğrisi bir V_{n-1} helistir. ∎

Tanım 5.8. $\alpha,\ \mathbb{R}_2^n$ uzayında bir eğri olsun.

$$\mathbb{H}_{(n,i)} = \begin{cases} \frac{1}{\kappa_i}\left[\kappa_{i+1}\mathbb{H}_{(n,i+2)} - \frac{1}{\nu\varepsilon_{i+1}}\mathbb{H}'_{(n,i+1)}\right], & 1 \leq i \leq n-2 \\ 0, & i = n-1 \\ 1, & i = n \end{cases},$$

biçiminde tanımlı $\mathbb{H}_{(n,i)} : I \to \mathbb{R},\ (1 \leq i \leq n)$ fonksiyonuna α eğrisinin $n.$ tip harmonik eğrilik fonksiyonu denir.

Teorem 5.9. $\mathbb{R}_2^n$ uzayında α bir eğri olsun. Bu eğrinin $n.$ tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(n,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (1 \leq i \leq n)$ olmak üzere,

$$\alpha \text{ bir } V_n \text{ helistir } \Leftrightarrow \mathbb{H}'_{(n,1)} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(n,2)} = 0$$

dır.

İspat. Farz edelim ki, α bir V_n helis olsun. Bu durumda Tanım 5.1. den V_n ile skalar çarpımı sıfırdan farklı olan bir sabit U vektörü vardır.

$\forall t \in I$ için $U = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, V_i(t)$ eşitliğini sağlayan $a_i,\ (1 \leq i \leq n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları ele alalım. Dolayısıyla,

$$a_i = \varepsilon_i g(V_i, U),\ (1 \leq i \leq n) \tag{5.14}$$

dir. α bir V_n helis olduğundan $a_n = \varepsilon_n g(V_n, U) = \varepsilon_n c,\ c \neq 0$ dır. (5.14) denkleminin türevi alınıp (2.3) sistemi ile birlikte kullanılırsa,

$i = n$ durumu için, yani $a_n = \varepsilon_n g(V_n, U) = \varepsilon_n c$ olduğundan

$$a'_n = \varepsilon_n g(V'_n, U) = -\nu\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1}g(V_{n-1}, U) = \nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}a_{n-1} = 0$$

ve

$$a_{n-1} = 0$$

dır. Benzer şekilde $(2 \leq i \leq n-1)$ için,

$$\begin{aligned} a_i' &= \varepsilon_i g\left(V_i', U\right) = -\nu\varepsilon_i\varepsilon_{i-1}\kappa_{i-1} g\left(V_{i-1}, U\right) + \nu\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\kappa_i g\left(V_{i+1}, U\right) \\ &= -\nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}a_{i-1} + \nu\varepsilon_i\kappa_i a_{i+1} \end{aligned}$$

ve

$$a_i' + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}a_{i-1} - \nu\varepsilon_i\kappa_i a_{i+1} = 0$$

dır. Son olarak $i = 1$ için, yani $a_1 = \varepsilon_1 g\left(V_1, U\right)$ olduğundan,

$$a_1' = \varepsilon_1 g\left(V_1', U\right) = \nu\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa_1 g\left(V_2, U\right) = \nu\varepsilon_1\kappa_1 a_2$$

ve

$$a_1' - \nu\varepsilon_1\kappa_1 a_2 = 0$$

dır. Dolayısıyla, $a_{n-1} = 0$ ve

$$\begin{aligned} & a_n' = -\nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}a_{n-1} \\ & a_i' + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}a_{i-1} - \nu\varepsilon_i\kappa_i a_{i+1} = 0, \quad (2 \leq i \leq n-1) \\ & a_1' - \nu\varepsilon_1\kappa_1 a_2 = 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

$a_n = \varepsilon_n c \neq 0$ olduğundan $\mathbb{H}_{(n,i)}$, $(1 \leq i \leq n)$ n. tip harmonik eğrilik fonksiyonu a_i fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\mathbb{H}_{(n,i)} = \frac{a_i}{a_n}, \ (1 \leq i \leq n). \tag{5.16}$$

Üstelik, (5.16) denkleminin türevi alınıp (5.15) denklem sisteminin son denklemi haricinde birlikte kullanılmasıyla n. tip harmonik eğrilik fonksiyonu elde edilir. (5.16) denkleminin türevi alınıp (5.15) denklem sisteminin son denklemiyle birlikte kullanılmasıyla V_n helis olma şartı elde edilir.

Yani, (5.15) denklem sisteminin ilk denklemiyle (5.16) denklemi birlikte kullanıldığında,

$$\mathbb{H}_{(n,n)} = \frac{a_n}{a_n} = 1$$

ve

$$\mathbb{H}_{(n,n-1)} = \frac{a_{n-1}}{a_n} = 0$$

dır. Benzer şekilde, (5.15) denklem sisteminin ikinci denklemi a_n ile bölünüp, (5.16) denklemi ile birlikte kullanılırsa,

$$\frac{a_i'}{a_n} + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}\mathbb{H}_{(n,i-1)} - \nu\varepsilon_i\kappa_i\mathbb{H}_{(n,i+1)} = 0, \quad (2 \leq i \leq n-1)$$

dır. Bu denklem ile (5.16) denkleminin türevi birlikte kullanılırsa,

$$\mathbb{H}'_{(n,i)} + \nu\varepsilon_i\kappa_{i-1}\mathbb{H}_{(n,i-1)} - \nu\varepsilon_i\kappa_i\mathbb{H}_{(n,i+1)} = 0$$

dır. Buradan

$$\mathbb{H}_{(n,i-1)} = \frac{1}{\kappa_{i-1}}\left(\kappa_i\mathbb{H}_{(n,i+1)} - \frac{1}{\nu\varepsilon_i}\mathbb{H}'_{(n,i-1)}\right), \quad (2 \leq i \leq n)$$

olarak bulunur.

(5.15) denklem sisteminin son denklemini a_n ile bölünmesiyle

$$\frac{{a_1}'}{a_n} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\frac{a_2}{a_n} = 0$$

elde edilir. Bu denklemde (5.16) denklemi kullanılarak

$$\mathbb{H}'_{(n,1)} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(n,2)} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece gerek şart sağlanır.

Tersine olarak, α bir eğri ve bu eğrinin n. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(n,i)} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(1 \leq i \leq n)$ ve $\mathbb{H}'_{(n,1)} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(n,2)} = 0$ olsun. U vektörü c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$U=\varepsilon_n c\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{H}_{(n,i)}V_i\right). \tag{5.17}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
g\left(V_n,U\right)&=g\left(V_n,\varepsilon_n c\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{H}_{(n,i)}V_i\right)\right)=\varepsilon_n c\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{H}_{(n,i)}g\left(V_n,V_i\right)\right)\\
&=\varepsilon_n c\left(0+0+\cdots+0+\varepsilon_n\right)\\
&=c
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla U vektörünün V_n ile skalar çarpımı sıfırdan farklı bir sabittir. Şimdi, U vektörünün, sabit bir vektör olduğu gösterilecektir. Bunun için $U'=0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. (5.17) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon_n c}U'=&\ \mathbb{H}'_{(n,1)}V_1+\mathbb{H}_{(n,1)}V'_1+\mathbb{H}'_{(n,2)}V_2+\mathbb{H}_{(n,2)}V'_2\\
&+\mathbb{H}'_{(n,3)}V_3+\mathbb{H}_{(n,3)}V'_3+\mathbb{H}'_{(n,4)}V_4+\mathbb{H}_{(n,4)}V'_4\\
&\vdots\\
&+\mathbb{H}'_{(n,n-1)}V_{n-1}+\mathbb{H}_{(n,n-1)}V'_{n-1}+\mathbb{H}'_{(n,n)}V_n+\mathbb{H}_{(n,n)}V'_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem, (2.3) sistemi ile birlikte kullanırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon_n c}U'=&\ \mathbb{H}'_{(n,1)}V_1+\nu\varepsilon_2\kappa_1\mathbb{H}_{(n,1)}V_2+\mathbb{H}'_{(n,2)}V_2-\nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(n,2)}V_1\\
&+\nu\varepsilon_3\kappa_2\mathbb{H}_{(n,2)}V_3+\mathbb{H}'_{(n,3)}V_3-\nu\varepsilon_2\kappa_2\mathbb{H}_{(n,3)}V_2+\nu\varepsilon_4\kappa_3\mathbb{H}_{(n,3)}\\
&\vdots\\
&+\mathbb{H}'_{(n,n-1)}V_{n-1}-\nu\varepsilon_{n-2}\kappa_{n-2}\mathbb{H}_{(n,n-1)}V_{n-2}+\nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(n,n-1)}V_n\\
&+\mathbb{H}'_{(n,n)}V_n-\nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(n,n)}V_{n-1}
\end{aligned}$$

elde edilen bu denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_n c}U' = & \left(\mathbb{H}'_{(n,1)} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(n,2)}\right)V_1\\ & + \left(\nu\varepsilon_2\kappa_1\mathbb{H}_{(n,1)} + \mathbb{H}'_{(n,2)} - \nu\varepsilon_2\kappa_2\mathbb{H}_{(n,3)}\right)V_2\\ & + \left(\nu\varepsilon_3\kappa_2\mathbb{H}_{(n,2)} + \mathbb{H}'_{(n,3)} - \nu\varepsilon_3\kappa_3\mathbb{H}_{(n,4)}\right)V_3\\ & \vdots\\ & + \left(\nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-2}\mathbb{H}_{(n,n-2)} + \mathbb{H}'_{(n,n-1)} - \nu\varepsilon_{n-1}\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(n,n)}\right)V_{n-1}\\ & + \left(\nu\varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(n,n-1)} + \mathbb{H}'_{(n,n)}\right)V_n\end{aligned}$$

elde edilir ki Tanım 5.8. ve yeter şartdan $U' = 0$ olduğu açıkca görülür. Öyleyse U vektörü sabitdir.

Dolayısıyla, α eğrisi bir V_n helistir. ∎

Bu kısımda, $\mathbb{R}^4_2$ yarı-Öklidiyen uzayda birim hızlı bir V_1, V_2, V_3 ve V_4 helisler için aşağıdaki teorem ve sonuçlar elde edildi. İlk olarak, $\alpha : I \to \mathbb{R}^4_2$ eğrisinin null olmayan V_1, V_2, V_3, V_4 Serret-Frenet vektör alanları için mümkün olan casual karakterleri Tablo 5.1 de sunulmuştur.

Tablo 5.1. Null olmayan Frenet vektör alanlarının causal karekterleri

V_1	V_2	V_3	V_4
Uzaysı	Uzaysı	Zamansı	Zamansı
	Zamansı	Zamansı	Uzaysı
	Zamansı	Uzaysı	Zamansı
Zamansı	Zamansı	Uzaysı	Uzaysı
	Uzaysı	Uzaysı	Zamansı
	Uzaysı	Zamansı	Uzaysı

Bu tez de bir eğri alındığında Serret-Frenet vektör alanları için Tablo 5.1 deki durumlar geçerlidir.

Ayrıca, Serret-Frenet vektör alanları üzerinde g skalar çarpım işlemi Tablo 5.2 deki gibi verilsin.

Tablo 5.2. Frenet vektör alanlarının skalar çarpımı

g	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	ε_1	0	0	0
V_2	0	ε_2	0	0
V_3	0	0	ε_3	0
V_4	0	0	0	ε_4

Tablo 5.1 ve Tablo 5.2 den

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$$

olduğu açıkça görülmektedir.

$n = 4$ için Teorem 5.3. açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 5.10. $\alpha,\ \mathbb{R}^4_2$ uzayında birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin 1. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(1,i)} : I \to \mathbb{R}, (1 \leq i \leq 4)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha \text{ bir } V_1 \text{ helistir } &\Leftrightarrow \mathbb{H}'_{(1,4)} + \varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(1,3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)' + \varepsilon_4\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0 \end{aligned}$$

dır.

Sonuç 5.11. $\alpha,\ \mathbb{R}^4_2$ uzayında birim hızlı bir V_1 helis eğrisi verilsin. Bu eğrinin ekseni

$$U = \varepsilon_1 c\left(V_1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}V_3 + \frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'V_4\right) \tag{5.18}$$

biçimindedir. Burada U vektörü,

- U uzaysı birim vektör ise $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_3\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2+\varepsilon_4\left(\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)^2}}$
- U zamansı birim vektör ise $c = \frac{1}{\sqrt{-\left(\varepsilon_1+\varepsilon_3\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2+\varepsilon_4\left(\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)^2\right)}}$
- U null vektör ise $\varepsilon_1 + \varepsilon_3\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2 + \varepsilon_4\left(\frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)^2 = 0$

dir.

Teorem 5.12. α, $\mathbb{R}_2^4$ uzayında eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan birim hızlı bir V_1 helis olsun. $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\kappa_3 = \pm \frac{\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'}{\sqrt{c^2 - \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2}}$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}_2^4$ uzayında α eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan bir V_1 helis olsun. Bu durumda, Sonuç 5.10. dan

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)' + \varepsilon_4\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0$$

dır. Denklemin her iki tarafı $2\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)^2 + \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2 = c^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\kappa_3 = \pm \frac{\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'}{\sqrt{c^2 - \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^2}}$$

dir. ■

$n = 4$ için Teorem 5.5. açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 5.13. $\mathbb{R}_2^4$ uzayında α birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin $2.$ tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(2,i)} : I \to \mathbb{R}, (1 \leq i \leq 4)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha \text{ bir } V_2 \text{ helistir } &\Leftrightarrow \mathbb{H}'_{(2,4)} + \varepsilon_n\kappa_{n-1}\mathbb{H}_{(2,3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\varepsilon_1\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)' + \varepsilon_3\kappa_2\right)\right)' + \varepsilon_1\varepsilon_4\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 = 0 \end{aligned}$$

dır.

Sonuç 5.14. $\alpha,\ \mathbb{R}^4_2$ uzayında birim hızlı bir V_2 helis eğrisi verilsin. Bu eğrinin ekseni

$$U=\varepsilon_2 c\left(\left(\varepsilon_1\int\kappa_1\right)V_1+V_2+\left(\varepsilon_1\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)V_3+\left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\varepsilon_1\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)'+\varepsilon_3\kappa_2\right)\right)V_4\right)$$

biçimindedir. Burada U vektörü,

- U uzaysı birim vektör ise $c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\left(\int\kappa_1\right)^2+\varepsilon_2+\varepsilon_3\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)^2+\varepsilon_4\left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\varepsilon_1\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)'+\varepsilon_3\kappa_2\right)\right)^2}}$
- U zamansı birim vektör ise $c=\dfrac{1}{\sqrt{-\left(\varepsilon_1\left(\int\kappa_1\right)^2+\varepsilon_2+\varepsilon_3\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)^2+\varepsilon_4\left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\varepsilon_1\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)'+\varepsilon_3\kappa_2\right)\right)^2\right)}}$
- U null vektör ise

$$\varepsilon_1\left(\int\kappa_1\right)^2+\varepsilon_2+\varepsilon_3\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)^2+\varepsilon_4\left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\varepsilon_1\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)'+\varepsilon_3\kappa_2\right)\right)^2=0$$

dır.

Teorem 5.15. $\mathbb{R}^4_2$ uzayında eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan birim hızlı bir V_2 helis eğrisi β olsun. $c\neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\kappa_3=\pm\frac{\varepsilon_1\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)'+\varepsilon_3\kappa_2}{\sqrt{c^2-\varepsilon_1\varepsilon_4\left(\int\kappa_1\right)^2-\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)^2}}$$

dır.

İspat. $\mathbb{R}^4_2$ uzayında α eğrilikleri κ_1,κ_2 ve κ_3 olan bir V_2 helis eğrisi olsun. Bu durumda, Sonuç 5.13. den

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\varepsilon_1\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)'+\varepsilon_3\kappa_2\right)\right)'+\varepsilon_1\varepsilon_4\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1=0$$

dır. Denklemin her iki tarafı $2\left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\varepsilon_1\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)'+\varepsilon_3\kappa_2\right)\right)$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\varepsilon_1\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)'+\varepsilon_3\kappa_2\right)\right)^2+\varepsilon_1\varepsilon_4\left(\int\kappa_1\right)^2+\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)^2=c^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\kappa_3 = \pm \frac{\varepsilon_1 \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 \right)' + \varepsilon_3 \kappa_2}{\sqrt{c^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_4 (\int \kappa_1)^2 - \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 \right)^2}}$$

eşitliği elde edilir. ■

$n = 4$ için Teorem 5.7. açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 5.16. $\mathbb{R}^4_2$ uzayında α birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin $3.$ tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(3,i)} : I \to \mathbb{R}, (1 \leq i \leq 4)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha \text{ bir } V_3 \text{ helistir } &\Leftrightarrow \mathbb{H}'_{(3,1)} - \varepsilon_1 \kappa_1 \mathbb{H}_{(3,2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\varepsilon_2 \kappa_1} \left(\varepsilon_2 \kappa_2 + \varepsilon_4 \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \int \kappa_3 \right)' \right) \right)' + \varepsilon_1 \varepsilon_4 \kappa_1 \frac{\kappa_3}{\kappa_2} \int \kappa_3 = 0 \end{aligned}$$

dır.

Sonuç 5.17. $\alpha,$ $\mathbb{R}^4_2$ uzayında birim hızlı bir V_3 helis eğrisi verilsin. Bu eğrinin ekseni

$$U = \varepsilon_3 c \left(\left(\frac{1}{\varepsilon_2 \kappa_1} \left(\varepsilon_4 \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \int \kappa_3 \right)' + \varepsilon_2 \kappa_2 \right) \right) V_1 - \left(\varepsilon_4 \frac{\kappa_3}{\kappa_2} \int \kappa_3 \right) V_2 + V_3 - \left(\varepsilon_4 \int \kappa_3 \right) V_4 \right)$$

biçimindedir. Burada U vektörü,

- U uzaysı birim vektör ise $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \left(\frac{1}{\varepsilon_2 \kappa_1} \left(\varepsilon_4 \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \int \kappa_3 \right)' + \varepsilon_2 \kappa_2 \right) \right)^2 + \varepsilon_2 \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \int \kappa_3 \right)^2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \left(\int \kappa_3 \right)^2}}$
- U zamansı birim vektör ise $c = \frac{1}{\sqrt{-\left(\varepsilon_1 \left(\frac{1}{\varepsilon_2 \kappa_1} \left(\varepsilon_4 \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \int \kappa_3 \right)' + \varepsilon_2 \kappa_2 \right) \right)^2 + \varepsilon_2 \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \int \kappa_3 \right)^2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \left(\int \kappa_3 \right)^2 \right)}}$
- U null vektör ise

$$\varepsilon_1 \left(\frac{1}{\varepsilon_2 \kappa_1} \left(\varepsilon_4 \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \int \kappa_3 \right)' + \varepsilon_2 \kappa_2 \right) \right)^2 + \varepsilon_2 \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \int \kappa_3 \right)^2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \left(\int \kappa_3 \right)^2 = 0$$

dır.

Teorem 5.18. $\mathbb{R}^4_2$ uzayında eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan birim hızlı bir V_3 helis eğrisi α olsun. $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\kappa_1 = \pm \frac{\varepsilon_2\kappa_2 + \varepsilon_4\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3\right)'}{\sqrt{c^2 - \varepsilon_1\varepsilon_4\left(\int\kappa_3\right)^2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3\right)^2}}$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}^4_2$ uzayında α eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan bir V_3 helis eğrisi olsun. Bu durumda, Sonuç 5.16. dan

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_2\kappa_1}\left(\varepsilon_2\kappa_2 + \varepsilon_4\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3\right)'\right)\right)' + \varepsilon_1\varepsilon_4\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3 = 0$$

dır. Denklemin her iki tarafı $2\left(\frac{1}{\varepsilon_2\kappa_1}\left(\varepsilon_2\kappa_2 + \varepsilon_4\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3\right)'\right)\right)$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_2\kappa_1}\left(\varepsilon_2\kappa_2 + \varepsilon_4\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3\right)'\right)\right)^2 + \varepsilon_1\varepsilon_4\left(\int\kappa_3\right)^2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3\right)^2 = c^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\kappa_1 = \pm \frac{\varepsilon_2\kappa_2 + \varepsilon_4\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3\right)'}{\sqrt{c^2 - \varepsilon_1\varepsilon_4\left(\int\kappa_3\right)^2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3\right)^2}}$$

dir. ■

$n = 4$ için Teorem 5.9. açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 5.19. $\mathbb{R}^4_2$ uzayında α birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin 4. tip harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathbb{H}_{(4,i)} : I \to \mathbb{R}, (1 \leq i \leq 4)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha \text{ bir } V_4 \text{ helistir } &\Leftrightarrow \mathbb{H}'_{(4,1)} - \varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(4,2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\varepsilon_2\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)' + \varepsilon_1\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2} = 0 \end{aligned}$$

dır.

Sonuç 5.20. $\alpha,\ \mathbb{R}_2^4$ uzayında birim hızlı bir V_4 helis eğrisi verilsin. Bu eğrinin ekseni

$$U = \varepsilon_4 c\left(\frac{1}{\varepsilon_2\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)' V_1 + \frac{\kappa_3}{\kappa_2}V_2 + V_4\right) \tag{5.19}$$

biçimindedir. Burada U vektörü,

- U uzaysı birim vektör ise $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\left(\frac{1}{\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)^2 + \varepsilon_2\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2 + \varepsilon_4}}$
- U zamansı birim vetör ise $c = \frac{1}{\sqrt{-\left(\sqrt{\varepsilon_1\left(\frac{1}{\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)^2 + \varepsilon_2\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2 + \varepsilon_4}\right)}}$
- U null vektör ise $\varepsilon_1\left(\frac{1}{\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)^2 + \varepsilon_2\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2 + \varepsilon_4 = 0$

dır.

Teorem 5.21. $\mathbb{R}_2^4$ uzayında eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan birim bir V_4 helis eğrisi α olsun. $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\kappa_1 = \pm\frac{\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'}{\sqrt{c^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2}}$$

dır.

İspat. $\mathbb{R}_2^4$ uzayında α eğrilikleri κ_1, κ_2 ve κ_3 olan bir V_4 helis eğrisi olsun. Bu durumda, Sonuç 5.19. dan

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_2\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)' + \varepsilon_1\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2} = 0$$

dır. Denklemin her iki tarafı $2\left(\frac{1}{\varepsilon_2\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)$ ile çarpılıp integrali alındığı zaman

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_2\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2 = c^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\kappa_1 = \pm \frac{\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'}{\sqrt{c^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2}}$$

dir. ■

Teorem 5.22. α, $\mathbb{R}^4_2$ uzayında κ_1, κ_2 ve κ_3 eğrilikli birim hızlı bir eğri ve $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ olsun. Bu durumda,

α bir V_1 helistir $\Leftrightarrow$ α bir V_4 helistir.

Bir başka deyişle, α bir $(1,4)$-tip helistir.

İspat. Kabul edelim ki, α bir V_1 helis eğrisi olsun. Bu durumda Sonuç 5.10. dan;

$$\left(\frac{\varepsilon_3}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)' + \varepsilon_4 \kappa_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0$$

dır. $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ yazılırsa,

$$\pm\left(\left(\frac{\varepsilon_3}{\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)' + \varepsilon_4 \kappa_1 \frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right) = 0$$

denklemi elde edilir gerekli düzenlemeler sonucunda

$$\pm\varepsilon_2\varepsilon_3\left(\left(\frac{\varepsilon_2}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)' + \varepsilon_1 \kappa_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left(\left(\frac{\varepsilon_2}{\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)' + \varepsilon_1 \kappa_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) = 0$$

olarak bulunur. O halde, Sonuç 5.19. dan α bir V_4 helistir.

Yeter şartı da, benzer şekilde ispat edilebilir. ■

Teorem 5.23. $\alpha,\ \mathbb{R}_2^4$ uzayında κ_1, κ_2 ve κ_3 eğrilikli ve $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ olan bir $(1,4)$-tip helis olsun. Bu durumda V_1 helisin ekseni ile V_4 helisin ekseninin skalar çarpımı sıfırdır.

İspat. $\alpha,\ V_1$ helisinin ekseni (5.18) eşitliğinden

$$U_1 = \varepsilon_1 c_1 \left(V_1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} V_3 + \frac{1}{\varepsilon_3 \kappa_3} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)' V_4 \right)$$

biçimindedir. Benzer şekilde,

$\alpha,\ V_4$ helisinin ekseni (5.19) eşitliğinden

$$U_2 = \varepsilon_4 c_2 \left(\frac{1}{\varepsilon_2 \kappa_1} \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \right)' V_1 + \frac{\kappa_3}{\kappa_2} V_2 + V_4 \right)$$

biçimindedir.

$$g\left(U_1, U_2\right) = \varepsilon_1 \varepsilon_4 c_1 c_2 \left(-\frac{1}{\varepsilon_2 \kappa_1} \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \right)' \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_3 \kappa_3} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)' \varepsilon_4 \right)$$

eşitliğinde $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ ve $\varepsilon_4 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ yazılırsa $g\left(U_1, U_2\right) = 0$ dır. ■

Örnek 5.24. $\mathbb{R}_2^4$ uzayında,

$$\alpha\left(t\right) = \left(\cos t, \sin t, t, \frac{t^2}{2} \right)$$

eğrisi verilsin. Bu eğrinin eğrilikleri $\kappa_1 = -\kappa_3 = \frac{1}{t^2}$ ve $\kappa_2 = -\frac{1}{t}$, 1. tip harmonik eğrilik fonksiyonları

$$\mathbb{H}_{(1,1)} = 1 \qquad \mathbb{H}_{(1,2)} = 0 \qquad \mathbb{H}_{(1,3)} = \frac{1}{t} \qquad \mathbb{H}_{(1,4)} = \frac{1}{t}$$

ve 4. tip harmonik eğrilik fonksiyonları

$$\mathbb{H}_{(4,1)} = -\frac{1}{t} \qquad \mathbb{H}_{(4,2)} = -\frac{1}{t} \qquad \mathbb{H}_{(4,3)} = 0 \qquad \mathbb{H}_{(4,4)} = 1$$

dir. Sonuç 5.10. ve Sonuç 5.19. dan

$$\mathbb{H}'_{(1,4)} + \nu \varepsilon_4 \kappa_3 \mathbb{H}_{(1,3)} = \left(\frac{1}{\nu \varepsilon_3 \kappa_3} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)' \right)' + \nu \varepsilon_4 \kappa_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0$$

ve

$$\mathbb{H}'_{(4,1)} - \nu\varepsilon_1\kappa_1\mathbb{H}_{(4,2)} = \left(\frac{1}{\nu\varepsilon_2\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)' + \nu\varepsilon_1\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2} = 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla α eğrisi hem V_1 hem de V_4 helistir. Ayrıca, (5.18) ve (5.19) den eksenler sırasıyla $U = (0,0,0,1)$ ve $V = (0,0,-1,0)$ dir. Aynı zamanda, α eğrisinin V_1 ve V_4 Frenet vektörleri:

$$V_1(t) = \left(-\frac{\sin t}{t}, \frac{\cos t}{t}, \frac{1}{t}, 1\right),$$

$$V_4(t) = \left(-\frac{\cos t}{t}, -\frac{\sin t}{t}, -1, \frac{1}{t}\right)$$

dir. Buradan $g(V_1(t), U) = 1$ ve $g(V_4(t), V) = 1$ olduğu açıkça görülebilir. Teorem 5.23. den eksenlerin skalar çarpımı sıfırdır.

Yani, α eğrisi $(1,4)$-tip helistir.

Teorem 5.25. β, $\mathbb{R}^4_2$ uzayında κ_1, κ_2 ve κ_3 eğrilikli birim hızlı bir eğri ve $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ olsun. Bu durumda,

β bir V_2 helistir $\Leftrightarrow$ β bir V_3 helistir.

Bir başka deyişle, β bir $(2,3)$-tip helistir.

İspat. Kabul edelim ki, β bir V_2 helis eğrisi olsun. Bu durumda Sonuç 5.13. den;

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_3}\left(\varepsilon_1\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1\right)' + \varepsilon_3\kappa_2\right)\right)' + \varepsilon_1\varepsilon_4\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\int\kappa_1 = 0$$

dır. Bu denklemde $\kappa_3 = \pm\kappa_1$ yazılırsa,

$$\pm\left(\frac{1}{\varepsilon_3\kappa_1}\left(\varepsilon_1\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3\right)' + \varepsilon_3\kappa_2\right)\right)' + \varepsilon_1\varepsilon_4\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3 = 0$$

denklemi elde edilir. $\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4$ eşitliği kullanılarak

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_2\kappa_1}\left(\varepsilon_2\kappa_2+\varepsilon_4\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3\right)'\right)\right)'+\varepsilon_1\varepsilon_4\kappa_1\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\int\kappa_3=0$$

elde edilir. O halde, Sonuç 5.16. dan α bir V_3 helistir.

Yeter şartı da, benzer şekilde ispat edilebilir. ■

5.2. $\mathbb{R}_2^n$ Yarı-Öklidiyen Uzayda Polinom Helisler

Bu bölümde, $n \geq 4$ için $\mathbb{R}_2^n$, n-boyutlu 2 indeksli yarı-Öklidiyen uzayında zamansı ve uzaysı polinom helis eğri aileleri ve bazı karakterizasyonlar verilecektir.

5.2.1. $\mathbb{R}_2^n$ yarı-Öklidiyen Uzayda Uzaysı Polinom Helisler

Bu alt bölümde, $\mathbb{R}_2^n$ yarı-Öklidiyen uzayında, ilk olarak $n = 4, n = 5$ ve $n = 6$ özel durumları için uzaysı polinom helis eğri aileleri incelenmiştir. Daha sonra, $n \geq 7$ için n tek olma durumundaki ve $n \geq 8$ için n çift olma durumundaki uzaysı polinom helis eğri aileleri incelenmiştir.

Teorem 5.26. b_1, b_2 ve $b_3 \in \mathbb{R}^+$,

$$a_1^2 = 2b_1b_2, \quad a_2^2 = 2b_1b_3, \quad a_3 = b_1, \quad a_4 = b_3, \quad a_5 = b_2, \tag{5.20}$$

ve $b_3 + b_2 > b_1$ olsun. Bu durumda

$$\beta(t) = \left(\frac{a_1}{2}t^2, \frac{a_2}{3}t^3, a_3t, \frac{a_4}{5}t^5 + \frac{a_5}{3}t^3\right)$$

biçiminde tanımlı $\beta : (1, d) \subset R \to \mathbb{R}_2^4$, $d > 1$, eğrisi $U = (0, 0, 1, -1)$ uzaysı eksenli bir uzaysı polinom helis ailesidir.

İspat. 5.20 eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} g\left(\beta'\left(t\right),\beta'\left(t\right)\right) &= -a_1^2t^2 - a_2^2t^4 + a_3^2 + a_4^2t^8 + a_5^2t^4 + 2a_4a_5t^6 \\ &= \left(b_3t^4 + b_2t^2 - b_1\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $b_3 + b_2 > b_1$ olduğundan $b_3t^4 + b_2t^2 - b_1 > 0$ dır. Dolayısıyla β uzaysı bir eğridir. Bu durumda β eğrisinin V_1 Frenet vektör alanı,

$$V_1\left(t\right) = \frac{1}{b_3t^4 + b_2t^2 - b_1}\left(a_1t, a_2t^2, a_3, a_4t^4 + a_5t^2\right)$$

dir. $a_3 = b_1, \quad a_4 = b_3$ ve $a_5 = b_2$ eşitlikleri kullanılarak

$$g\left(V_1\left(t\right), U\right) = -1$$

bulunur. Bu ise eğrinin uzaysı eksenli bir uzaysı polinom helis ailesi olduğunu gösterir. ■

Örnek 5.27. Teorem 5.26.'da $b_1 = 1, b_2 = b_3 = 2$ olsun. Bu durumda,

$$\beta\left(t\right) = \left(t^2, \frac{2t^3}{3}, t, \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3}\right)$$

eğrisi $U = (0,0,1,-1)$ uzaysı eksenli bir uzaysı polinom helistir. β eğrisinin tanjant vektörü

$$V_1\left(t\right) = \frac{1}{2t^4 + 2t^2 - 1}\left(2t, 2t^2, 1, 2t^4 + 2t^2\right)$$

dir. $g\left(V_1\left(t\right), U\right) = -1$ olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, β eğrisinin bir V_1 helis olduğu Sonuç 5.10. dan aşağıdaki gibi görülebilir:

β eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa_1\left(t\right) = \frac{2\sqrt{4t^2+1}}{-\left(2\left(t^4+t^2\right)-1\right)^2},$$

$$\kappa_2\left(t\right) = \frac{4t\sqrt{9t^6 - 16t^4 - 9t^2 - 3}}{\left(8t^6 + 10t^4 - 2t^2 - 1\right)\left(1 - 2\left(t^4 + t^2\right)\right)},$$

$$\kappa_3(t) = -\frac{3\sqrt{4t^2+1}\left(2t^4+2t^2-1\right)}{18t^{11}-14t^9-59t^7-8t^5+3t^3+3t}$$

dir. Buradan

$$\mathbb{H}'_{(1,4)} + \varepsilon_4\kappa_3\mathbb{H}_{(1,3)} = \left(\frac{1}{\nu\varepsilon_3\kappa_3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)'\right)' + \nu\varepsilon_4\kappa_3\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0$$

ve (5.18) den $U = (0,0,1,-1)$ dır.

Teorem 5.28. b_1, b_2 ve $b_3 \in \mathbb{R}^+$,

$$a_1^2 = 2b_1b_2, \quad a_2^2 = 2b_1b_3 - b_2^2, \quad a_3 = b_1, \quad a_4^2 = 2b_2b_3, \quad a_5 = b_3, \tag{5.21}$$

ve $b_3 + b_2 > b_1$ olsun. Bu durumda

$$\beta(t) = \left(\frac{a_1}{2}t^2, \frac{a_2}{3}t^3, a_3t, \frac{a_4}{4}t^4, \frac{a_5}{5}t^5\right)$$

biçiminde tanımlı $\beta : (1,d) \subset R \to \mathbb{R}^5_2,\ \ d > 1$, eğrisi $U = \left(0, \frac{b_2}{a_2}, 1, 0, -1\right)$ eksenli bir uzaysı polinom helis ailesidir.

İspat. 5.21 eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} g\left(\beta'(t), \beta'(t)\right) &= -a_1^2t^2 - a_2^2t^4 + a_3^2 + a_4^2t^6 + a_5^2t^8 \\ &= \left(b_3t^4 + b_2t^2 - b_1\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $b_3 + b_2 > b_1$ olduğundan $b_3t^4 + b_2t^2 - b_1 > 0$ dır. Dolayısıyla β uzaysı bir eğridir. Bu durumda β eğrisinin V_1 Frenet vektör alanı,

$$V_1(t) = \frac{1}{b_3t^4 + b_2t^2 - b_1}\left(a_1t, a_2t^2, a_3, a_4t^3, a_5t^4\right)$$

dir. $a_3 = b_1$ ve $a_5 = b_3$ eşitlikleri kullanılarak

$$g\left(V_1(t), U\right) = -1$$

bulunur. Bu ise eğrinin bir uzaysı polinom helis ailesi olduğunu gösterir. ■

Sonuç 5.29. Teorem 5.28. de; $2a_2^2 - b_2^2 > 0, 2a_2^2 - b_2^2 < 0$ ve $2a_2^2 = b_2^2$ ise helisin ekseni U sırasıyla uzaysı, zamansı ve boşluksu bir vektördür.

İspat. $U = \left(0, \frac{b_2}{a_2}, 1, 0, -1\right)$ vektörünün casual karakterinden ispat kolayca görülür. ∎

Şimdi $\mathbb{R}_2^5$ uzayında uzaysı, zamansı ve boşluksu eksenli polinom helislere örnekler verilecektir.

Örnek 5.30. Teorem 5.28.'da $b_2 = 1, b_1 = b_3 = 2$ olsun. Bu durumda,

$$\beta(t) = \left(t^2, \frac{\sqrt{7}}{3}t^3, 2t, \frac{t^4}{2}, \frac{2t^5}{5}\right)$$

eğrisi $U = \left(0, \frac{1}{\sqrt{7}}, 1, 0, -1\right)$ uzaysı eksenli bir uzaysı polinom helistir. β eğrisinin tanjant vektörü ise

$$V_1(t) = \frac{1}{2t^4 + t^2 - 2}\left(2t, \sqrt{7}t^2, 2, 2t^3, 2t^4\right)$$

dir. $g(V_1(t), U) = -1$ olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 5.31. Teorem 5.28.'de $b_1 = 1, b_2 = \sqrt{3}, b_3 = 2$ olsun. Bu durumda,

$$\beta(t) = \left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}t^2, \frac{t^3}{3}, t, \frac{\sqrt[4]{3}}{2}t^4, \frac{2t^5}{5}\right)$$

eğrisi $U = \left(0, \sqrt{3}, 1, 0, -1\right)$ zamansı eksenli bir uzaysı polinom helistir. β eğrisinin tanjant vektörü

$$V_1(t) = \frac{1}{2t^4 + \sqrt{3}t^2 - 1}\left(\sqrt[4]{12}t, t^2, 1, \sqrt[4]{48}t^3, 2t^4\right)$$

dir. $g(V_1(t), U) = -1$ olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 5.32. Teorem 5.28.'de $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$ olsun. Bu durumda,

$$\beta(t) = \left(t^2, \frac{\sqrt{2}}{3}t^3, t, \frac{\sqrt{3}}{2}t^4, \frac{3t^5}{5}\right)$$

eğrisi $U = \left(0, \sqrt{2}, 1, 0, -1\right)$ boşluksu eksenli bir uzaysı polinom helistir. β eğrisinin tanjant vektörü

$$V_1(t) = \frac{1}{3t^4 + 2t^2 - 1}\left(2t, \sqrt{2}t^2, 1, 2\sqrt{3}t^3, 3t^4\right)$$

dir. $g(V_1(t), U) = -1$ olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 5.33. b_1, b_2, b_3 ve $b_4 \in \mathbb{R}^+$,

$$a_1^2 = 2b_1b_2, \quad a_2^2 = 2b_1b_3 - b_2^2, \quad a_3 = b_1, \quad a_4^2 = 2b_2b_3 - 2b_1b_4, \quad a_5^2 = 2b_2b_4, \quad a_6 = b_4, \quad a_7 = b_3, \tag{5.22}$$

ve $\sum\limits_{j=2}^{4} b_j > b_1;\ 2b_1b_3 > b_2^2;\ b_2b_3 > b_1b_4$ olsun. Bu durumda

$$\beta(t) = \left(\frac{a_1}{2}t^2, \frac{a_2}{3}t^3, a_3t, \frac{a_4}{4}t^4, \frac{a_5}{5}t^5, \frac{a_6}{7}t^7 + \frac{a_7}{5}t^5\right)$$

biçiminde tanımlı $\beta : (1, d) \subset R \to \mathbb{R}_2^6,\ \ d > 1$, eğrisi $U = \left(0, \frac{b_2}{a_2}, 1, 0, 0, -1\right)$ eksenli bir uzaysı polinom helis ailesidir.

İspat. 5.22 eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} g(\beta'(t), \beta'(t)) &= -a_1^2t^2 - a_2^2t^4 + a_3^2 + a_4^2t^6 + a_5^2t^8 + a_6^2t^{12} + 2a_6a_7t^{10} + a_7^2t^8 \\ &= \left(b_4t^6 + b_3t^4 + b_2t^2 - b_1\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $b_4 + b_3 + b_2 > b_1$ olduğundan $b_4t^6 + b_3t^4 + b_2t^2 - b_1 > 0$ dır. Dolayısıyla β uzaysı bir eğridir. Bu durumda β eğrisinin V_1 Frenet vektör alanı,

$$V_1(t) = \frac{1}{b_4t^6 + b_3t^4 + b_2t^2 - b_1}\left(a_1t, a_2t^2, a_3, a_4t^3, a_5t^4, a_6t^6 + a_7t^4\right)$$

dir. $a_3 = b_1,\ a_6 = b_4$ ve $a_7 = b_3$ eşitlikleri kullanılarak

$$g(V_1(t), U) = -1$$

bulunur. Bu ise eğrinin bir uzaysı polinom helis ailesi olduğunu gösterir. ∎

Teorem 5.34. $n \geq 7$ bir tek sayı, $1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}$ için $b_j \in \mathbb{R}^+$,

$$a_1^2 = 2b_1b_2, \quad a_2^2 = 2b_1b_3 - b_2^2 > 0, \quad a_3 = b_1, \quad a_{n-1}^2 = 2b_{\frac{n-1}{2}}b_{\frac{n+1}{2}}, \quad a_n = b_{\frac{n+1}{2}}, \tag{5.23}$$

$$a_{2k+1}^2 = b_{k+1}^2 - 2b_1b_{2k+1} + 2\sum_{j=2}^{k} b_j b_{2k-j+2} > 0 \qquad \left(2 \leq k \leq \frac{n-3}{2}\right), \tag{5.24}$$

$$a_{2l}^2 = -2b_1b_{2l} + 2\sum_{j=2}^{l} b_j b_{2l-j+1} > 0 \qquad \left(2 \leq l \leq \frac{n-3}{2}\right) \tag{5.25}$$

ve $\sum\limits_{j=2}^{\frac{n+1}{2}} b_j > b_1; b_{\frac{n+3}{2}} = b_{\frac{n+5}{2}} = \cdots = b_{n-1} = 0$ olsun. Bu durumda

$$\beta(t) = \left(\frac{a_1}{2}t^2, \frac{a_2}{3}t^3, a_3t, \frac{a_4}{4}t^4, \frac{a_5}{5}t^5, \frac{a_6}{6}t^6, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n-1}t^{n-1}, \frac{a_n}{n}t^n\right)$$

biçiminde tanımlı $\beta : I \to \mathbb{R}_2^n, I = (1, d) \subset \mathbb{R}$ ve $d > 1$, eğrisi

$$U = \frac{b_2}{a_2}e_2 + e_3 - \sum_{m=3}^{\frac{n-1}{2}} \frac{b_m}{a_{2m-1}} e_{2m-1} - e_n$$

eksenli bir uzaysı polinom helis eğri ailesidir ve tanjant vektörü

$$V_1(t) = \frac{1}{-b_1 + \sum\limits_{j=2}^{\frac{n+1}{2}} b_j t^{2(j-1)}} \left(a_1t, a_2t^2, a_3, a_4t^3, a_5t^4, \ldots, a_{n-1}t^{n-2}, a_nt^{n-1}\right)$$

dir.

İspat. 5.23, 5.24 ve 5.25 eşitlikleri kullanılarak,

$$g\left(\beta'(t), \beta'(t)\right) = \left(-b_1 + \sum_{j=2}^{\frac{n+1}{2}} b_j t^{2(j-1)}\right)^2$$

elde edilir. $g(\beta'(t), \beta'(t)) > 0$ olduğundan β uzaysı bir eğridir. Bu durumda β eğrisinin V_1 Frenet vektör alanı,

$$V_1(t) = \frac{1}{\|\beta'(t)\|_s}(a_1 t, a_2 t^2, a_3, a_4 t^3, a_5 t^4, \ldots, a_{n-1} t^{n-2}, a_n t^{n-1})$$
$$= \frac{1}{\|\beta'(t)\|_s}\left(a_1 t, a_2 t^2, b_1, a_4 t^3, a_5 t^4, \ldots, a_{n-1} t^{n-2}, b_{\frac{n+1}{2}} t^{n-1}\right)$$

dir. Üstelik,

$$g(V_1(t), U) = -1$$

elde edilir. Bu ise eğrinin bir uzaysı polinom helis ailesi olduğunu gösterir. ■

Sonuç 5.35. Teorem 5.34.'de

$$\text{Eğer } \frac{2a_2^2 - b_2^2}{a_2^2} + \sum_{m=3}^{\frac{n-1}{2}} \frac{b_m^2}{a_{2m-1}^2} > 0, \text{ ise helisin } U \text{ ekseni bir uzaysı vektör,}$$

$$\text{Eğer } \frac{2a_2^2 - b_2^2}{a_2^2} + \sum_{m=3}^{\frac{n-1}{2}} \frac{b_m^2}{a_{2m-1}^2} < 0, \text{ ise helisin } U \text{ ekseni bir zamansı vektör}$$

ve

$$\text{Eğer } \frac{2a_2^2 - b_2^2}{a_2^2} + \sum_{m=3}^{\frac{n-1}{2}} \frac{b_m^2}{a_{2m-1}^2} = 0, \text{ ise helisin } U \text{ ekseni bir boşluksu vektördür.}$$

İspat. $U = \frac{b_2}{a_2} e_2 + e_3 - \sum_{m=3}^{\frac{n-1}{2}} \frac{b_m}{a_{2m-1}} e_{2m-1} - e_n$ vektörünün casual karakterinden ispat kolayca görülebilir. ■

Teorem 5.36. $n \geq 8$ bir çift sayı, $1 \leq j \leq \frac{n+2}{2}$ için $b_j \in \mathbb{R}^+$,

$$a_1^2 = 2b_1 b_2, \quad a_2^2 = 2b_1 b_3 - b_2^2 > 0, \quad a_3 = b_1, \quad a_{n-1}^2 = 2b_{\frac{n-2}{2}} b_{\frac{n+2}{2}}, \quad a_n = b_{\frac{n+2}{2}}, \quad a_{n+1} = b_{\frac{n}{2}}, \tag{5.26}$$

$$a_{2k+1}^2 = b_{k+1}^2 - 2b_1 b_{2k+1} + 2\sum_{j=2}^{k} b_j b_{2k-j+2} > 0 \qquad \left(2 \leq k \leq \frac{n-4}{2}\right), \tag{5.27}$$

$$a_{2l}^2 = -2b_1b_{2l} + 2\sum_{j=2}^{l} b_j b_{2l-j+1} > 0 \qquad \left(2 \leq l \leq \frac{n-2}{2}\right) \tag{5.28}$$

ve $\sum\limits_{j=2}^{\frac{n+2}{2}} b_j > b_1; b_{\frac{n+4}{2}} = b_{\frac{n+6}{2}} = \cdots = b_{n-2} = 0$ olsun. Bu durumda

$$\beta(t) = \left(\frac{a_1}{2}t^2, \frac{a_2}{3}t^3, a_3 t, \frac{a_4}{4}t^4, \frac{a_5}{5}t^5, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n-1}t^{n-1}, \frac{a_n}{n+1}t^{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n-1}t^{n-1}\right)$$

biçiminde tanımlı $\beta : I \to \mathbb{R}_2^n, I = (1, d) \subset \mathbb{R}$ ve $d > 1$, eğrisi

$$U = \frac{b_2}{a_2}e_2 + e_3 - \sum_{m=3}^{\frac{n-2}{2}} \frac{b_m}{a_{2m-1}} e_{2m-1} - e_n$$

eksenli bir uzaysı polinom helis eğri ailesidir ve tanjant vektörü

$$V_1(t) = \frac{1}{-b_1 + \sum\limits_{j=2}^{\frac{n+2}{2}} b_j t^{2(j-1)}} \left(a_1 t, a_2 t^2, a_3, a_4 t^3, a_5 t^4, \ldots, a_{n-1} t^{n-2}, a_n t^n + a_{n+1} t^{n-2}\right)$$

dir.

İspat. 5.26, 5.27 ve 5.28 eşitlikleri kullanılarak,

$$g(\beta'(t), \beta'(t)) = \left(-b_1 + \sum_{j=2}^{\frac{n+2}{2}} b_j t^{2(j-1)}\right)^2$$

elde edilir. $g(\beta'(t), \beta'(t)) > 0$ olduğundan β uzaysı bir eğridir. Bu durumda β eğrisinin V_1 Frenet vektör alanı,

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \frac{1}{\|\beta'(t)\|_s} \left(a_1 t, a_2 t^2, a_3, a_4 t^3, a_5 t^4, \ldots, a_{n-1} t^{n-2}, a_n t^n + a_{n+1} t^{n-2}\right) \\ &= \frac{1}{\|\beta'(t)\|_s} \left(a_1 t, a_2 t^2, b_1, a_4 t^3, a_5 t^4, \ldots, a_{n-1} t^{n-2}, b_{\frac{n+2}{2}} t^n + b_{\frac{n}{2}} t^{n-2}\right) \end{aligned}$$

dir. Üstelik,

$$g(V_1(t), U) = -1$$

elde edilir. Bu ise eğrinin bir uzaysı polinom helis ailesi olduğunu gösterir. ■

Sonuç 5.37. Teorem 5.36.'de

$$\text{Eğer } \frac{2a_2^2 - b_2^2}{a_2^2} + \sum_{m=3}^{\frac{n-2}{2}} \frac{b_m^2}{a_{2m-1}^2} > 0, \text{ ise helisin } U \text{ ekseni bir uzaysı vektör,}$$

$$\text{Eğer } \frac{2a_2^2 - b_2^2}{a_2^2} + \sum_{m=3}^{\frac{n-2}{2}} \frac{b_m^2}{a_{2m-1}^2} < 0, \text{ ise helisin } U \text{ ekseni bir zamansı vektör}$$

ve

$$\text{Eğer } \frac{2a_2^2 - b_2^2}{a_2^2} + \sum_{m=3}^{\frac{n-2}{2}} \frac{b_m^2}{a_{2m-1}^2} = 0, \text{ ise helisin } U \text{ ekseni bir boşluksu vektördür.}$$

İspat. $U = \frac{b_2}{a_2} e_2 + e_3 - \sum\limits_{m=3}^{\frac{n-2}{2}} \frac{b_m}{a_{2m-1}} e_{2m-1} - e_n$ vektörünün casual karakterinden ispat kolayca görülebilir. ■

5.2.2. $\mathbb{R}_2^n$ yarı-Öklidiyen Uzayda Zamansı Polinom Helisler

$\mathbb{R}_2^n$ yarı-Öklidiyen uzayda uzaysı, zamansı ve boşluksu eksenli zamansı polinom helis aileleri verilecektir.

Teorem 5.38. $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$ ve

$$a_1 = b_2, \quad a_2 = \frac{b_1^2}{b_2}, \quad a_3^2 = 2b_1 b_2, \quad a_4 = b_1 \tag{5.29}$$

olsun. Bu durumda

$$\beta(t) = \left(\frac{a_1}{5} t^5 + a_2 t, \frac{a_3}{4} t^4, \frac{a_4}{3} t^3, -a_2 t\right)$$

biçiminde tanımlı $\beta : \mathrm{I} - \{0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ eğrisi $U = (-1, 0, 1, 1)$ uzaysı eksenli bir zamansı polinom helistir.

İspat. 5.29 eşitliği kullanılarak,

$$g\left(\beta'\left(t\right), \beta'\left(t\right)\right) = -\left(b_1 t^2 + b_2 t^4\right)^2$$

elde edilir. $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$ olduğundan $b_1 t^2 + b_2 t^4 > 0$ dır. Dolayısıyla β zamansı bir eğridir. Bu durumda β eğrisinin V_1 Frenet vektör alanı,

$$V_1\left(t\right) = \frac{1}{b_2 t^4 + b_1 t^2}\left(a_1 t^4 + a_2, a_3 t^3, a_4 t^2, -a_2\right)$$

dir. $a_1 = b_2$ ve $a_4 = b_1$ eşitlikleri kullanılarak

$$g\left(V_1\left(t\right), U\right) = 1$$

bulunur. Bu ise eğrinin uzaysı eksenli bir zamansı polinom helis ailesi olduğunu gösterir. ■

Örnek 5.39. Teorem 5.38.'da $b_1 = 2, b_2 = 1$ olsun. Bu durumda

$$\beta\left(t\right) = \left(\frac{t^5}{5} + 4t, \frac{t^4}{2}, \frac{2t^3}{3}, -4t\right) \tag{5.30}$$

eğrisi $U = (-1, 0, 1, 1)$ uzaysı eksenli zamansı polinom helistir. β eğrisinin tanjant vektörü

$$V_1\left(t\right) = \frac{1}{t^4 + 2t^2}\left(t^4 + 4, 2t^3, 2t^2, -4\right) \tag{5.31}$$

dir. $g\left(V_1\left(t\right), U\right) = 1$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Teorem 5.40. b_1, b_2 ve $b_3 \in \mathbb{R}^+$,

$$a_1 = b_3, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = \frac{b_1^2}{b_2}, \quad a_4^2 = 2b_1 b_3, \quad a_5^2 = \frac{2b_1^2 b_3 - 2b_1 b_2^2}{b_2} > 0, \quad a_6 = b_1 \tag{5.32}$$

olsun. Bu durumda

$$\beta\left(t\right) = \left(\frac{a_1}{7}t^7 + \frac{a_2}{5}t^5 + a_3 t, \frac{a_4}{5}t^5, \frac{a_5}{4}t^4, \frac{a_6}{3}t^3, -a_3 t\right)$$

biçiminde tanımlı $\beta : \mathrm{I}-\{0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5_2$ eğrisi $U = (-1, 0, 0, 1, 1)$ uzaysı eksenli zamansı polinom helistir.

İspat. 5.32 eşitliği kullanılarak,

$$g(\beta'(t), \beta'(t)) = -(b_1t^2 + b_2t^4 + b_3t^6)^2$$

elde edilir. Dolayısıyla β zamansı bir eğridir. b_1, b_2 ve , $b_3 \in \mathbb{R}^+$ olduğundan $b_1t^2 + b_2t^4 + b_3t^6 > 0$ dır. Bu durumda β eğrisinin V_1 Frenet vektör alanı,

$$V_1(t) = \frac{1}{b_1t^2 + b_2t^4 + b_3t^6}(a_1t^6 + a_2t^4 + a_3, a_4t^4, a_5t^3, a_6t^2, -a_3)$$

dir. $a_1 = b_3, \quad a_2 = b_2$ ve $a_6 = b_1$ eşitlikleri kullanılarak

$$g(V_1(t), U) = 1$$

bulunur. Bu ise eğrinin uzaysı eksenli bir zamansı polinom helis ailesi olduğunu gösterir. ∎

Örnek 5.41. Teorem 5.40.'da $b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 2$ olsun. Bu durumda,

$$\beta(t) = \left(\frac{2t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + 4t, \frac{2\sqrt{2}}{5}t^5, \frac{\sqrt{3}}{2}t^4, \frac{2t^3}{3}, -4t\right)$$

eğrisi $U = (-1, 0, 0, 1, 1)$ uzaysı eksenli bir zamansı polinom helistir. β eğrisinin tanjant vektörü

$$V_1(t) = \frac{1}{2t^6 + t^4 + 2t^2}\left(2t^6 + t^4 + 4, 2\sqrt{2}t^4, 2\sqrt{3}t^3, 2t^2, -4\right)$$

dir. $g(V_1(t), U) = 1$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 5.42. $n \geq 6$; $1 \leq i \leq n-2$ için $b_i \in \mathbb{R}^+$,

$$a_{2n-4} = b_1, \quad a_{n-3} = b_2, \quad a_{n-4} = b_3, \ldots, a_2 = b_{n-3}, \quad a_1 = b_{n-2}, \tag{5.33}$$

$$a_{n-2} = \frac{b_1^2}{b_2}, \quad a_{n-1}^2 = 2b_1b_{n-2}, \quad a_{2n-5}^2 = \frac{2b_1^2b_3 - 2b_1b_2^2}{b_2} > 0 \tag{5.34}$$

$$a_k^2 = 2a_{n-2}a_{k-n+1} - 2a_{2n-4}a_{k-n+2} > 0 \qquad (n \leq k \leq 2n-6) \tag{5.35}$$

olsun. Bu durumda

$$\beta(t) = \left(\frac{a_1}{2n-3} t^{2n-3} + \frac{a_2}{2n-5} t^{2n-5} + \cdots + \frac{a_{n-3}}{5} t^5 + a_{n-2} t, \frac{a_{n-1}}{n} t^n, \frac{a_n}{n-1} t^{n-1}, \frac{a_{n+1}}{n-2} t^{n-2}, \ldots, \frac{a_{2n-4}}{3} t^3, -a_{n-2} t \right)$$

biçiminde tanımlı $\beta : \mathrm{I} - \{0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n_2$ eğrisi $U = -e_1 + e_{n-1} + e_n$ uzaysı eksenli bir zamansı polinom helistir.

İspat. 5.33, 5.34 ve 5.35 eşitlikleri kullanılarak,

$$g(\beta'(t), \beta'(t)) = -\left(\sum_{j=1}^{n-2} b_j t^{2j} \right)^2$$

elde edilir. $g(\beta'(t), \beta'(t)) < 0$ olduğundan β zamansı bir eğridir. Bu durumda β eğrisinin V_1 Frenet vektör alanı,

$$V_1(t) = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n-2} b_j t^{2j}} \left(a_1 t^{2n-4} + a_2 t^{2n-6} + \cdots + a_{n-3} t^4 + a_{n-2}, a_{n-1} t^{n-1}, a_n t^{n-2}, a_{n+1} t^{n-3}, \ldots, a_{2n-4} t^2, -a_{n-2} \right)$$

dir. Üstelik,

$$g(V_1(t), U) = 1$$

elde edilir. Bu ise eğrinin uzaysı eksenli bir zamansı polinom helis ailesi olduğunu gösterir. ∎

Teorem 5.43. $n \geq 4$; $1 \leq i \leq n-1$ için $b_i \in \mathbb{R}^+$,

$$a_1 = b_{n-1}, \quad a_2 = b_{n-2}, \quad a_3 = b_{n-3}, \quad \ldots \quad a_{n-1} = b_1 \tag{5.36}$$

ve

$$a_n^2 = 2b_1 b_2, \quad a_{n+1}^2 = 2b_1 b_3, \quad \ldots, \quad a_{2n-3}^2 = 2b_1 b_{n-1}, \tag{5.37}$$

olsun. Bu durumda

$$\beta(t)=\left(\frac{a_1}{2n-3}t^{2n-3}+\frac{a_2}{2n-5}t^{2n-5}+\cdots+\frac{a_{n-2}}{3}t^3,a_{n-1}t,\frac{a_n}{2}t^2,\frac{a_{n+1}}{3}t^3,\ldots,\frac{a_{2n-3}}{n-1}t^{n-1}\right)$$

biçiminde tanımlı $\beta:\mathrm{I}-\{0\}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_2^n$ eğrisi $U=e_1-e_2$ zamansı eksenli bir zamansı polinom helistir.

İspat. 5.36 ve 5.37 eşitlikleri kullanılarak,

$$g(\beta'(t),\beta'(t))=-\left(-b_1+\sum_{j=2}^{n-1}b_jt^{2(j-1)}\right)^2$$

elde edilir. $g(\beta'(t),\beta'(t))<0$ olduğundan β zamansı bir eğridir. Bu durumda β eğrisinin V_1 Frenet vektör alanı,

$$V_1(t)=\frac{1}{-b_1+\sum\limits_{j=2}^{n-1}b_jt^{2(j-1)}}\left(a_1t^{2n-4}+a_2t^{2n-6}+\cdots+a_{n-2}t^2,a_{n-1},a_nt,a_{n+1}t^2,\ldots,a_{2n-3}t^{n-2}\right)$$

dir. Üstelik,

$$g(V_1(t),U)=-1$$

elde edilir. Bu ise eğrinin zamansı eksenli bir zamansı polinom helis ailesi olduğunu gösterir.
■

Örnek 5.44. Teorem 5.43.'de $n=4; b_1=1, b_2=2, b_3=1$ olsun. Bu durumda

$$\beta(t)=\left(\frac{t^5}{5}+\frac{2t^3}{3},t,t^2,\frac{\sqrt{2}t^3}{3}\right)$$

eğrisi $U=(1,-1,0,0)$ zamansı eksenli bir zamansı polinom helistir. β eğrisinin tanjant vektörü

$$V_1(t)=\frac{1}{t^4+2t^2-1}\left(t^4+2t^2,1,2t,\sqrt{2}t^2\right)$$

dir. $g\left(V_1\left(t\right), U\right) = -1$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Teorem 5.45. $n \geq 4$; $1 \leq i \leq n-2$ için $b_i \in \mathbb{R}^+, b_1 \geq b_{n-2}$,

$$a_1 = -b_{n-2}, \quad a_2 = b_{n-3}, \quad a_3 = b_{n-4}, \quad \ldots \quad a_{n-2} = b_1, \tag{5.38}$$

ve

$$a_{n-1}^2 = 2b_{n-2}, \quad a_n^2 = 2b_{n-3}, \quad a_{n+1}^2 = 2b_{n-4}, \quad \ldots \quad , a_{2n-4}^2 = 2b_1 \tag{5.39}$$

olsun. Bu durumda

$$\beta\left(t\right) = \left(\frac{a_1}{2n-3}t^{2n-3} + \frac{a_2}{2n-5}t^{2n-5} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{3}t^3 + t, \frac{a_{n-1}}{n-1}t^{n-1}, \frac{a_n}{n-2}t^{n-2}, \ldots, \frac{a_{2n-4}}{2}t^2, t\right)$$

biçiminde tanımlı $\beta : \mathrm{I} = (0,1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^n$ eğrisi $U = e_1 + e_n$ boşluksu eksenli bir zamansı polinom helistir.

İspat. 5.38 ve 5.39 eşitlikleri kullanılarak,

$$g\left(\beta'\left(t\right), \beta'\left(t\right)\right) = -t^4\left(-b_{n-2}t^{2n-6} + \sum_{j=2}^{n-2} b_{j-1}t^{2(j-2)}\right)^2$$

elde edilir. $g\left(\beta'\left(t\right), \beta'\left(t\right)\right) < 0$ olduğundan β zamansı bir eğridir. Bu durumda β eğrisinin V_1 Frenet vektör alanı,

$$V_1\left(t\right) = \frac{1}{t^2\left(-b_{n-2}t^{2n-6} + \sum\limits_{j=2}^{n-2} b_{j-1}t^{2(j-2)}\right)}\left(a_1t^{2n-4} + a_2t^{2n-6} + \cdots + a_{n-2}t^2 + 1, a_{n-1}t^{n-2}, a_nt^{n-3}, \ldots, a_{2n-4}t, 1\right)$$

dir. Üstelik,

$$g\left(V_1\left(t\right), U\right) = -1$$

elde edilir. Bu ise eğrinin null eksenli bir zamansı polinom helis ailesi olduğunu gösterir. ■

Örnek 5.46. Teorem 5.45.'de $n = 5; b_1 = 2$ ve $b_2 = 1$ olsun. Bu durumda

$$\beta(t) = \left(-\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t, \frac{\sqrt{2}t^3}{3}, t^2, t\right)$$

eğrisi $U = (1, 0, 0, 1)$ boşluksu eksenli bir zamansı polinom helistir. β eğrisinin tanjant vektörü

$$V_1(t) = \frac{1}{t^4 - 2t^2}\left(-t^4 + 2t^2 + 1, \sqrt{2}t^2, 2t, 1\right)$$

dir. $g(V_1(t), U) = -1$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

KAYNAKLAR

[1]. Altunkaya, B. and Kula, L., 2018, On Polynomial General Helices in n-Dimensional Euclidean Space R^n, *Advances in Applied Clifford Algebras*. 28:4, 1-12.

[2]. O'Neil, B., 1983, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New-York, ISBN:0-12-526740-1.

[3]. Struik, D.J., 1988, *Lectures on Classical Differential Geometry*, New York, USA: Dover.

[4]. Hacısalihoğlu, H. H., 1998, *Diferensiyel Geometri 1. Cilt (3. Baskı)*.

[5]. Ahmad, T. A. and Turgut, M., 2010, Some Characterizaton of Slant Helices in the Euclidean Space E^n, *Hacettepe Journal of Math. and Stat.* Vol 39(3), 327-336.

[6]. Izumiya, S. and Takeuchi, N., 2004, New Special Curves and Developable Surfaces, *Turk J Math.* Vol 28, 153-163.

[7]. Ozdamar, E. and Hacisalihoglu, H. H., 1975, A Characterization of Inclined Curves in Euclidean n-space, *Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara*, Ser A1, 24: 15-23.

[8]. Kula, L., Ekmekci, N. and İlarslan, K., 2010, Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-space, *Turk J Math.* Vol 34, 261-273.

[9]. Camcı, Ç., İlarslan, K., Kula, L. and Hacısalihoğlu, H. H., 2007, Harmonic Curvatures and Generalized Helices in E^n, *Chaos Solitons Fractials.*, Vol 40, 2590-2596.

[10]. Sabuncuoğlu, A., 2014, *Diferensiyel Geometri (5. Baskı)*, Nobel Yayınları, Ankara.

[11]. Kula, L. and Yaylı, Y., 2005, On Slant Helix and its Spherical Indicatrix, *Applied Mathematics and Computation*, Vol 169, 600-607.

[12]. İlarslan, K., Kılıç, N. and Erdem, H. A., 2017, Osculating Curves in 4-dimensional semi-Euclidean Space with Index 2, *Open Math*, 15: 562-567.

[13]. Gök, İ., Camcı, Ç. and Hacisalihoglu, H. H., 2009, V_n-Slant Helices in Euclidean-n space E^n, *Math. Commun.* Vol. 14, No. 2, pp. 317-329

[14]. İlarslan, K., Deshmuk, S. and Doyel, A., 2017, Frenet Curves in Euclidean 4-Space, *Int. Elect. Journal of Geometry*, Vol. 10, No. 2, 56-66.

[15]. İlarslan, K., 2002, *Öklid Olmayan Manifoldlar Üzerindeki Bazı Özel Eğriler*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü.

[16]. Manuel, B., Angel, F., Pascual, L., and Miguel A. M., 2001, General Helices in the 3-dimensional Lorentzian Space Forms, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 31 (2): 373-388.

[17]. Erjavec, Z., 2014, On Generalization of Helices in the Galilean and the Pseudo-Galilean Space. *Journal of Mathematics Research*, 6 (3): 39-50.

[18]. Ogrenmis, A. O., Ergut, M. and Bektas, M., 2007, On the Helices in the Galilean space $G3$, *Iranian Journal of Science and Technology*, Transaction A 31 (A2): 177-181.

[19]. Yoon, D.W., 2012, General Helices of AW(k)-type in the Lie Group, *Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics*, 535123.

[20]. Altunkaya, B., 2019, Helices in n-dimensional Minkowski spacetime, *Results in Physics*, 14 102445.

[21]. Uçum, A., Camci, Ç. and İlarslan K., 2019, General Helices with Spacelike Slope Axis in Minkowski 3-space, *Asian-European Journal of Mathematics*, 12 (5): 1950076.

[22]. Uçum, A., Camci, Ç. and İlarslan K., 2016, General Helices with Timelike Slope Axis in Minkowski 3-space, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26: 793–807.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler		
Adı Soyadı	Hasan ALTINBAŞ	
Doğum Yeri	Gölbaşı	
Doğum Tarihi	01.02.1980	
Uyruğu	T.C.	
Telefon	(386) 280 3100	
E-Posta Adresi	hasan.altinbas@ahievran.edu.tr	
Web Adresi	https://akademik.ahievran.edu.tr/site/hasanaltinbas	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Muğla Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fkültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2002

Yüksek Lisans	
Üniversite	University of Massachusetts Lowell
Enstitü	...
Anabilim Dalı	Computational and Applied Mathematics
Programı	...
Mezuniyet Yılı	2011

Doktora	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Geometri
Mezuniyet Yılı	2020

Makale ve Bildiriler
Uluslararası hakemli dergilerde yayınlanan makaleler. **1.** Altınbaş, H., Altunkaya, B., Kula, L., Polynomial helices in the n-dimesional semi-Euclidean space with index two, Filomat (accepted)
Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler. **1.** Hasan Altınbaş, Bülent Altunkaya, Levent Kula: Some Characterization of V_i helices in $4-$dimensional space with index 2. IECMSA 2019, Bakü Azerbaycan. **2.** Hasan Altınbaş, Bülent Altunkaya, Levent Kula: V_3 helices in the 5-dimensional Euclidean space ICPAM-Van 2020.