T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

POLİNOM PİSAGOR NORMAL YÜZEYLERE SPLİT KUATERNİYON YAKLAŞIMI

Benen AKINCI

DOKTORA TEZİ

KIRŞEHİR / 2021

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

POLİNOM PİSAGOR NORMAL YÜZEYLERE SPLİT KUATERNİYON YAKLAŞIMI

Benen AKINCI

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Levent KULA

KIRŞEHİR / 2021

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Benen AKINCI

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Lisans, lisanüstü ve doktora eğitimim boyunca beni yönlendiren, destekleyen, öneri ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen danışmalığının dışında insanlığıyla, sabrıyla, her konudaki bilgisiyle bizlere yol gösteren örnek aldığım ve almaya devam edeceğim hocam Sayın Prof. Dr. Levent KULA'ya, doktora çalışmam süresinde her zaman yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen Dr. Hasan ALTINBAŞ'a ve tez çalışmamın her aşamasında bilgilerini, yardımlarını ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen tez izleme kurulu üyeleri Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN'a ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MAK'a en içten saygılarımı sunar ve teşekkürü bir borç bilirim.

Varlıkları ile bu günlere gelmemi sağlayan annem Gülcan KIZILGEDİK ve babam Turan KIZILGEDİK'e, bu uzun yolda bana her zaman destek olan hayat arkadaşım Akıner AKINCI'ya, en önemli güç kaynaklarım olan oğullarım Ramazan Alp AKINCI, Turan Alaz AKINCI'ya ve hakkını ödeyemeyeceğim kayınvalidem Nevin AKINCI'ya teşekkür ederim.

Aralık, 2021 Benen AKINCI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ . . . iv

İÇİNDEKİLER . . . v

ŞEKİL LİSTESİ . . . vii

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ . . . viii

ÖZET . . . ix

ABSTRACT . . . x

1. Giriş . . . 1

2. Temel Kavramlar . . . 3

3. Polinom Pisagor Normal Yüzeylere Reel Kuaterniyon Yaklaşımı . . . 16

3.1. Tek Dereceli Reel Polinom PN Yüzeyinin Yapısı . . . 21

3.1.1. Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 24

3.1.2. Reel Kuintik Polinom PN Yüzeyi . . . 33

3.2. Çift Dereceli Reel Polinom PN Yüzeyinin Yapısı . . . 38

3.2.1. Reel Kuartik Polinom PN Yüzeyi . . . 40

3.2.1.1. Özel Çift Dereceli Reel Polinom PN Yüzeyler . . . 48

3.3. Reel Polinom PN Yüzeyinin Ortalama Eğriliği . . . 49

4. Polinom Pisagor Normal Yüzeylere Split Kuaterniyon Yaklaşımı . . . 55

4.1. Timelike Polinom PN Yüzeyi . . . 55

4.1.1. Tek Dereceli Timelike Split Polinom PN Yüzeyinin Yapısı . . . 61

4.1.1.1. Timelike Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 64

4.1.1.2. Timelike Kuintik Polinom PN Yüzeyi . . . 73

4.1.2. Çift Dereceli Timelike Split Polinom PN Yüzeyinin Yapısı . . . 78

4.1.2.1. Timelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi . . . 80

4.1.2.2. Özel Çift Dereceli Timelike Polinom PN Yüzeyler . . . 90

4.2. Timelike Polinom PN Yüzeyinin Ortalama Eğriliği . . . 91

4.3. Spacelike Polinom PN Yüzeyi . . . 97

4.3.1. Tek Dereceli Spacelike Split Polinom PN Yüzeyinin Yapısı . . . 100

4.3.1.1. Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 103

4.3.1.2. Spacelike Kuintik Polinom PN Yüzeyi . . . 112

4.3.2. Çift Dereceli Spacelike Split Polinom PN Yüzeyinin Yapısı . . . 117

4.3.2.1. Spacelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi . . . 120

4.3.2.2. Özel Çift Dereceli Spacelike Polinom PN Yüzeyleri 128
4.4. Spacelike Polinom PN Yüzeyinin Ortalama Eğriliği 130
KAYNAKLAR 136
ÖZGEÇMİŞ 138

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 3.1. Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 27

Şekil 3.2. P_1 Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi. . . . 28

Şekil 3.3. P_2 Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi. . . . 29

Şekil 3.4. P_3 Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi. . . . 30

Şekil 3.5. Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 33

Şekil 3.6. Reel Kuintik Polinom PN Yüzeyi . . . 37

Şekil 3.7. Reel Kuartik Polinom PN Yüzeyi . . . 47

Şekil 3.8. Özel Reel Kuartik Polinom PN Yüzeyi . . . 54

Şekil 4.1. Timelike Kübik Polinom PN yüzeyi . . . 67

Şekil 4.2. P_1 Timelike Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 67

Şekil 4.3. P_2 Timelike Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 68

Şekil 4.4. P_3 Timelike Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 69

Şekil 4.5. Timelike Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 72

Şekil 4.6. Timelike Kunitik Polinom PN Yüzeyi . . . 77

Şekil 4.7. Timelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi . . . 89

Şekil 4.8. Özel Timelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi. . . . 95

Şekil 4.9. Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 106

Şekil 4.10. P_1 Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 106

Şekil 4.11. P_2 Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 107

Şekil 4.12. P_3 Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 108

Şekil 4.13. Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi . . . 111

Şekil 4.14. Spacelike Kuintik Polinom PN Yüzeyi . . . 117

Şekil 4.15. Spacelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi . . . 128

Şekil 4.16. Özel Spacelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi . . . 135

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\langle , \rangle$	: $\mathbb{R}^n$ iç çarpım
$\|, \|$	: $\mathbb{R}^n$ norm
$\wedge$	: $\mathbb{R}^n$ vektörel çarpım
$\|, \|_*$	: $\mathbb{R}_1^3$ norm
$\times$	:$\mathbb{R}_1^3$ vektörel çarpım
$g(,)$	: $\mathbb{R}_1^3$ sklalar çarpım
$*$	: Split kuaterniyon çarpımı
$\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$	: birinci temel form katsayıları
$\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$	: ikinci temel form katsayıları
H	: ortalama eğrilik fonksiyonu
$\lceil , \rceil$	: tavan fonksiyonu
$\lfloor , \rfloor$	: taban fonksiyonu
$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu reel uzay
$\mathbb{R}_1^3$	: 3-boyutlu Minkowski uzayı
Kısaltmalar	**Açıklama**
PN	: Pisagor Normal
PH	: Pisagor Hodograf

ÖZET

DOKTORA TEZİ

POLİNOM PİSAGOR NORMAL YÜZEYLERE SPLİT KUATERNİYON YAKLAŞIMI

Benen AKINCI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Levent KULA

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmıdır. Bu kısımda tezde işlenecek konu hakkındaki tarihçe ve daha önceki çalışmalar ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm, tezde gerekli olan temel tanım ve kavramları içermektedir. Üçüncü bölümde, katsayıları reel kuaterniyon olan kübik, kuintik ve kuartik polinom PN yüzeyler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, katsayıları split kuaterniyonlar olan timelike kübik, kuintik ve kuartik polinom PN yüzeyler ile spacelike kübik, kuintik ve kuartik polinom PN yüzeyler elde edilmiş, minimal ve maksimal yüzeyler ile ilgili teoremler verilmiştir. Ayrıca, bu yüzeyler için örnekler verilmiştir.

Aralık 2021, 138 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Polinom PN yüzey, minimal yüzey, maksimal yüzey.

ABSTRACT

PhD THESIS

SPLIT QUATERNION APPROACH TO POLYNOMIAL PYTHAGOREAN NORMAL SURFACES

Benen AKINCI

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Levent KULA

This thesis consists of four parts. The first part is the introductory part. In this section, information about the history and previous studies on the subject to be covered in the thesis is given. The second part contains the basic definitions and concepts required in the thesis. In the third chapter, cubic, quintic and quartic polynomial PN surfaces, whose coefficients are real quaternions, are examined. In the fourth chapter, timelike cubic, quintic and quartic polynomial PN surfaces with split quaternions coefficients and spacelike cubic, quintic and quartic polynomial PN surfaces are obtained, and theorems about minimal and maximal surfaces are given. Also, examples are given for these surfaces.

December 2021, 138 Pages.

Keywords: Polynomial PN surface, minimal surface, maximal surface.

1. Giriş

Rasyonel ofsetlere sahip olan eğriler ve yüzeyler robot, CAD/CAM sistem, animasyon ve imalat gibi çoğu pratik uygulama için önemli bir konudur. Ayrıca, rasyonel ofset eğrileri Pisagor hodograf (PH) eğrileridir. Bu eğriler ilk olarak Farouki ve Sakkalis (1990) tarafından tanıtıldı ve birçok yazar tarafından incelendi [6, 10, 17, 20].

Dual yapı genellikle rasyonel yüzeyler üretmekte ve rasyonel Pisagor normal (PN) yüzeylerinin polinom yüzeylerine indirgenmesi için herhangi bir cebirsel kriter bulunmamaktaydı. Rasyonel ofsetlere sahip yüzeyler, rasyonel ofsetlere sahip eğrilere göre daha az çalışılmıştır. Rasyonel ofsetlerle yüzey oluşturmak için öncelikle normal vektörlerin doğrusal alanı olan Lineer normal (LN) yüzey oluşturulmuştur. Kübik (üçüncü dereceden) polinom Pisagor normal (PN) yüzeyler Lávička ve Vršek tarafından çalışılmış ve kübik polinom PN yüzeylerinin ailesi türetilmiştir [13]. Ayrıca, kuaterniyon katsayılarına sahip iki değişkenli polinomlar yardımıyla, bir polinom PN yüzeyi türetmek için J.Kozak ve arkadaşları (2016) tarafından yeni bir yaklaşım sunuldu ve bazı karakterizasyonlar verildi. Polinom PN yüzeyleri ile PH eğrileri arasında birçok benzerlik olmasına rağmen bazı önemli farklılıklar da vardır. Bunlardan biri kuaterniyon katsayılarının serbest seçilemediği yani kuaterniyon katsayılarının belirli bağıntıları sağlaması durumudur [10].

J.Kozak ve arkadaşları [10] nolu kaynakta reel kuaterniyon katsayılı iki değişkenli polinomlar ile tek ve çift dereceli kübik polinom PN yüzeylerini incelediler. Aynı çalışmada, tek dereceli reel polinom PN yüzeyler üç, çift dereceli reel polinom PN yüzeyler ise iki kısıma ayırılarak irdelenmiştir. Ayrıca, tek ve çift dereceli PN yüzeyler için minimal yüzey olma şartı verildi.

Bu tezde, split kuaterniyon katsayılı iki değişkenli polinomlar yardımıyla ilk olarak $\mathbf{N} = e_3$ normaline sahip olan tek dereceli timelike kübik yüzeyler incelendi. Aynı normale sahip olan timelike kübik polinom PN yüzeylerinin ailesi ve timelike kuintik (beşinci dereceden) polinom PN yüzeyi elde edildi. Ayrıca, timelike kuartik (dördüncü dereceden) polinom PN yüzeyi elde edildi ve bazı karakterizasyonlar verildi. Üstelik, timelike polinom PN yüzeylerin minimal yüzey olma şartı verildi.

Sonrasında, $\mathbf{N} = e_1$ normaline sahip olan tek dereceli spacelike kübik yüzeyler incelendi. Aynı normale sahip olan spacelike kübik polinom PN yüzeylerinin ailesi ve spacelike kuintik polinom PN yüzeyi elde edildi. Ayrıca, spacelike kuartik polinom PN yüzeyi elde edilerek bazı karakterizasyonlar verildi. Üstelik, spacelike polinom PN yüzeylerin maksimal yüzey olması durumu incelendi.

2. Temel Kavramlar

Bu bölümde, tez çalışması ile ilgili gerekli olan temel tanım ve teoremler verilecek.

Tanım 2.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

eşitliğiyle tanımlanan,

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir.

$x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|,\| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\to \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{aligned}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre, $\mathbb{R}^n$ uzayı bu metrik ile tanımlı normlu bir vektör uzayıdır.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

biçiminde tanımlanan $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla, bu metrik ile $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzay olur. Bu uzaya Öklid uzayı denir [19].

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^3$ de $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha, \beta) \to \alpha \wedge \beta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $\wedge$ iç işlemine $\mathbb{R}^3$ de vektörel çarpım denir. [19].

Tanım 2.3. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir eğri denir [19].

Tanım 2.4. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha^{'}(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir [19].

Tanım 2.5. $n \in \mathbb{N}$ ve $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$x(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0, \quad a_n \neq 0$$

biçimindeki t değişkenine bağlı fonksiyona, n. dereceden bir polinom denir [12].

Tanım 2.6. $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ eğrisi, $1 \leq i \leq n$ için $x_i(t)$ fonksiyonları birer polinom ise α eğrisine polinom eğrisi denir [12].

Tanım 2.7. $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ polinom eğrisi için

$$max\{der(x_1(t)), der(x_2(t)), \ldots, der(x_n(t))\}$$

değerine α polinom eğrisinin derecesi denir [12].

Tanım 2.8. $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ bir polinom eğrisi olsun.
$\alpha^{'}(t) = (x_1{}^{'}(t), x_2{}^{'}(t), \ldots, x_n{}^{'}(t))$ birinci türevine α eğrisinin hodografı denir [5].

Tanım 2.9. $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ polinom eğrisinin hodografı $\alpha^{'}(t)$ için

$$x_1{}^{'}(t)^2 + x_2{}^{'}(t)^2 + \ldots + x_n{}^{'}(t)^2 = \sigma^2(t)$$

denklemi sağlanacak şekilde $\sigma(t)$ polinomu bulunabiliyorsa, α eğrisine Pisagor hodograf (PH) eğrisi adı verilir [5, 6].

Tanım 2.10. α, $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında bir eğri ve asli normali N olsun.

$$\alpha_\rho(t) = \alpha(t) + \rho N(t), \ \ \rho \in \mathbb{R}$$

ifadesi ile verilen eğriye α eğrisinin ofset eğrisi denir [5].

Tanım 2.11. U, $\mathbb{R}^2$ Öklid uzayında irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \to \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$ kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında basit yüzey denir.
M, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subseteq M$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir [19].

Teorem 2.12. (Schwarz Teoremi) $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

1. φ_u ve φ_v türevleri (u, v) noktasının bir komşuluğunda mevcut,
2. φ_{uv} türevi (u, v) da sürekli

ise $\varphi_{vu}(u, v)$ mevcuttur ve $\varphi_{uv}(u, v) = \varphi_{vu}(u, v)$ dir [2].

Tanım 2.13. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında

$$\alpha(t) = (\frac{x_1(t)}{r(t)}, \frac{x_2(t)}{r(t)}, \ldots, \frac{x_n(t)}{r(t)})$$

ifadesine rasyonel eğri denir. Burada $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), r(t)$ birer polinomdur [14].

Tanım 2.14. 3-boyutlu $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında

$$S(u, v) = (\frac{S_1(u, v)}{S_4(u, v)}, \frac{S_2(u, v)}{S_4(u, v)}, \frac{S_3(u, v)}{S_4(u, v)})$$

ifadesine m dereceli rasyonel bir yüzey denir. Burada $S_1(u, v), S_2(u, v), S_3(u, v), S_4(u, v)$ en çok m dereceli polinomlardır [4].

Tanım 2.15.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

ve

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j, ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$$

olmak üzere,

$$\mathbb{H} = \{q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k |\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. $\mathbb{H}$ uzayına 4-boyutlu kuaterniyon uzayı adı verilir. Ayrıca $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ifadesi $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ biçiminde de gösterilir.
Bir q kuaterniyonu $q = S_q + V_q$ şeklinde de ifade edilir. Burada $S_q = a_0$ kuaterniyonun skalar kısmı ve $V_q = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ise kuaterniyonun vektörel kısmıdır [8].

Tanım 2.16. $q = S_q + V_q$ ve $p = S_p + V_p$ reel kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = (S_q + S_p) + (V_q + V_p)$$

şeklinde tanımlıdır [8].

Tanım 2.17. Her $p, q \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu için reel kuaterniyon çarpımı

$$qp = S_q S_p - \langle V_q, V_p \rangle + S_q V_p + S_p V_q + V_q \wedge V_p$$

şeklinde ifade edilir [8].

Tanım 2.18. $q = S_q + V_q$ bir kuaterniyon olmak üzere, $\overline{q} = S_q - V_q$ ifadesine q nun eşleniği denir [8].

Tanım 2.19. $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ bir reel kuaterniyon olsun.

$$\|q\| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{\overline{q}q} = \sqrt{{a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

ifadesine q nun normu denir [8].

Tanım 2.20. $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ sıfırdan farklı bir reel kuaterniyon olsun.

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$$

ifadesine q nun tersi denir [8].

Teorem 2.21. $\langle , \rangle$, $\mathbb{H}$ kuaterniyon uzayı üzerinde tanımlı iç çarpım olmak üzere, $\forall p, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

1. $\langle pq_1, pq_2 \rangle = \|p\|^2 \langle q_1, q_2 \rangle$,
2. $\langle q_1 p, q_2 p \rangle = \|p\|^2 \langle q_1, q_2 \rangle$,
3. $\langle pq_1, q_2 \rangle = \langle q_1, \overline{p} q_2 \rangle$,
4. $\langle pq_1, q_2 \rangle = \langle p, q_2 \overline{q_1} \rangle$

önermeleri doğrudur [9].

Tanım 2.22. Katsayıları reel kuaterniyonlar olan,

$$\mathbb{H}[u,v] = \{q(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} q_{ij} u^i v^j | q_{ij} \in \mathbb{H}\} \tag{2.1}$$

kümesine iki değişkenli polinomlar halkası denir ve elemanları reel kuaterniyon polinomu olarak adlandırılır.
Burada q, $\mathbf{e}_i(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $1 \leq i \leq 3$ dönüşümleri ile ilişkili olup,

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{\|q\|^2}, \; i = 1,2,3, \quad \mathbf{h}_1 = qi\overline{q}, \; \mathbf{h}_2 = qj\overline{q}, \; \mathbf{h}_3 = qk\overline{q} \tag{2.2}$$

dir. Ayrıca $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ dir [10].

Tanım 2.23. Parametrik olarak verilen bir

$$\begin{aligned} &\mathbf{S} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ &\qquad (u,v) \to \mathbf{S}(u,v) \end{aligned}$$

yüzeyini ele alalım. Bu yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{S}_u \wedge \mathbf{S}_v}{\|\mathbf{S}_u \wedge \mathbf{S}_v\|}$$

dir.
S rasyonel yüzeyinin $\mathbf{N}$ birim normal vektör alanı, u ve v ye göre rasyonelse, başka bir ifadeyle $\|\mathbf{S}_u \wedge \mathbf{S}_v\| = P(u,v)$ bir polinom ise bu yüzey Pisagor Normal (PN) yüzey olarak adlandırılır.

Bir PN yüzey

$$\mathbf{S}_{\delta}(t) = \mathbf{S}(t) + \delta\mathbf{N}(t),\ \delta \in \mathbb{R}$$

parametrik gösterime sahip bir ofset yüzeye sahiptir [5].

Tanım 2.24. V reel vektör uzayı üstünde tanımlı, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bilineer ise g bilineer form, eğer bu bilineer form simetrik ise g ye simetrik bilineer form denir [7].

Tanım 2.25. g, V üstünde bir simetrik bilineer form olsun.

1. $\forall v \in V, v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ önermesi doğru ise g ye pozitif tanımlı,
2. $\forall v \in V, v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ önermesi doğru ise g ye negatif tanımlı,
3. $\forall v \in V$ için $g(v, v) \geq 0$ önermesi doğru ise g ye yarı pozitif tanımlı,
4. $\forall v \in V$ için $g(v, v) \leq 0$ önermesi doğru ise g ye yarı negatif tanımlı,
5. $[\forall w \in V, g(v, w) = 0] \Rightarrow v = 0$ önermesi doğru ise g ye yoz olmayan (nondejenere),

denir [16].

Tanım 2.26. V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı g non-dejenere simetrik bilineer formuna V üzerinde bir skalar çarpım, V ye de skalar çarpım uzayı denir [16].

Tanım 2.27. V bir skalar çarpım uzayı olsun. $v \in V$ vektörünün normu

$$\|\mathrm{v}\|_{*} = \sqrt{|g\left(v, v\right)|}$$

olarak tanımlanır. Normu, 1 birim olan vektöre birim vektör denir. Yani, $g\left(v, v\right) = \pm 1$ dir. Elemanları ikişer ikişer birbirine dik birim vektörlerden oluşan bir kümeye ortonormaldir denir [16].

Teorem 2.28. $V \neq \{0\}$ olmak üzere, V skalar çarpımlı bir vektör uzayı ise V nin bir ortonormal bazı vardır [16].

Teorem 2.29. V skalar çarpım uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = g\left(e_i, e_i\right),\ \ 1 \leq i \leq n$ olmak üzere $\forall v \in V$ vektörü,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g\left(v, e_i\right) e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir [16].

Tanım 2.30. V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W nun boyutuna g skalar çarpımının indeksi denir. g skalar çarpımının indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq boyV$ dir. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır [16].

Teorem 2.31. V skalar çarpım uzayının bir $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormal bazı için $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ deki negatif sayıların sayısı, V nin ν indeksine eşittir [16].

Tanım 2.32. $V = \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$g(x, y) = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} x_i y_i, \quad 1 \leq \nu \leq n$$

biçiminde tanımlanan g fonksiyonu bir skalar çarpımdır. Bu skalar çarpım ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına yarı-Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir. Eğer $n = 3$ ve $\nu = 1$ ise $\mathbb{R}^3_1$ e Minkowski 3-uzayı adı verilir [16].

Tanım 2.33. Bir $v \in V$ vektörü için;

1. $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne uzaysı (spacelike) vektör,
2. $g(v, v) < 0$ ise v vektörüne zamansı (timelike) vektör,
3. $g(v, v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v vektörüne boşluksu (null) vektör,

denir [16].

Tanım 2.34. $\times : \mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$, $g(u \times v, w) = det(u, v, w)$ eşitliğini sağlayan

$$u \times v = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlı dönüşüme $\mathbb{R}^3$ de vektörel çarpım adı verilir [15].

Teorem 2.35. u, v ve w Minkowski 3-uzayında üç vektör olsun. Bu durumda

1. $(u \times v) \times w = -g(u,v)w + g(v,w)u$

2. $u \times (u \times w) = -g(u,w)v + g(u,v)w$

3. $g(u \times v, u) = 0$ ve $g(u \times v, v) = 0$

4. $g(u \times v, u \times v) = -g(u,u)g(v,v) + g(u,v)^2$

dir [22].

Tanım 2.36.

$$i^2 = -1, \quad j^2 = k^2 = 1$$

ve

$$ij = k, \quad jk = -i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = i, \quad ik = -j$$

olmak üzere

$$\mathbb{H}' = \{q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k |\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. $\mathbb{H}'$ uzayına 4-boyutlu split kuaterniyon uzayı adı verilir. Ayrıca $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ifadesi $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ biçiminde de gösterilir.
Bir q split kuaterniyonu $q = S_q + V_q$ şeklinde de ifade edilebilir. Burada $S_q = a_0$ split kuaterniyonun skalar kısmı ve $V_q = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ise split kuaterniyonun vektörel kısmıdır [11].

Tanım 2.37. $q = S_q + V_q$ ve $p = S_p + V_p$ split kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = (S_q + S_p) + (V_q + V_p)$$

şeklinde tanımlıdır [11].

Tanım 2.38. $q, p \in \mathbb{H}'$ split kuaterniyonları için split kuaterniyon çarpımı

$$q * p = S_q S_p + g(V_q, V_p) + S_q V_p + S_p V_q + V_q \times V_p$$

şeklinde ifade edilir [11].

Tanım 2.39. $q = S_q + V_q$ bir split kuaterniyon olmak üzere, $\overline{q} = S_q - V_q$ ifadesine split kuaterniyonun eşleniği denir [11].

Tanım 2.40. Bir $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ split kuaterniyon olsun. q split kuaterniyonunun normu

$$\|q\|_* = \sqrt{|q * \overline{q}|} = \sqrt{|\overline{q} * q|} = \sqrt{|{a_0}^2 + {a_1}^2 - {a_2}^2 - {a_3}^2|}$$

şeklinde tanımlanır [11].

Tanım 2.41. Bir $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ split kuaterniyon olsun.

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|_*^2}, \qquad \|q\|_* \neq 0$$

ifadesine q nun tersi adı verilir [11].

Teorem 2.42. $\mathbb{H}'$ üzerindeki metriği $\mathbb{R}_2^4$ deki $g(,)$ metriği ile aynı alalım. Bu durumda

1. $g(p * q_1, p * q_2) = \|p\|_*^2 \, g(q_1, q_2), \quad \forall p, q_1, q_2 \in \mathbb{H}'$
2. $g(q_1 * p, q_2 * p) = \|p\|_*^2 \, g(q_1, q_2), \quad \forall p, q_1, q_2 \in \mathbb{H}'$
3. $g(p_1 * q_1, p_2 * q_2) + g(p_1 * q_2, p_2 * q_1) = -2g(p_1, p_2)g(q_1, q_2), \quad \forall p_1, p_2 q_1, q_2 \in \mathbb{H}',$
4. $g(p * q_1, q_2) = g(q_1, \overline{p} * q_2), \quad \forall p, q_1, q_2 \in \mathbb{H}',$
5. $g(p * q_1, q_2) = g(p, q_2 * \overline{q_1}), \quad \forall p, q_1, q_2 \in \mathbb{H}',$

önermeleri gerçeklenir [11].

Tanım 2.43. Katsayıları split kuaterniyonlar olan ,

$$\mathbb{H}'[u, v] = \{q(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} q_{ij} u^i v^j | q_{ij} \in \mathbb{H}'\} \tag{2.3}$$

kümesine iki değişkenli split polinomlar halkası denir ve elemanları split kuaterniyon polinomu olarak adlandırılır.

Bu tezde, sıfırdan farklı null olmayan q_{ij} split kuaterniyonlar ve

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{\|q\|_*{}^2}, i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{h}_1 = q * i * \overline{q},\ \mathbf{h}_2 = q * j * \overline{q},\ \mathbf{h}_3 = q * k * \overline{q} \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlı $\mathbf{e}_i(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $1 \leq i \leq 3$ fonksiyonları ile çalışılacaktır. Ayrıca

$$g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g(\frac{\mathbf{h}_i}{\|q\|_*^2}, \frac{\mathbf{h}_j}{\|q\|_*^2}) = \frac{1}{\|q\|_*^4} g(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j)$$

olup burada

$$g(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ -\|q\|_*^4, \;\; i = j = 1 \\ \|q\|_*^4, \;\; 2 \leq i = j \leq 3 \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.44. 3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında

$$\begin{aligned} &\psi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1^3 \\ &\qquad (u,v) \to \psi(u,v) = (\psi_1(u,v), \psi_2(u,v), \psi_3(u,v)) \end{aligned}$$

parametrizasyonu ile verilen yüzey $\mathbf{S}$ olsun. $\psi(U)$ yüzeyini ele alalım. $\left\{\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \psi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\}$ lineer bağımsız olmak üzere yüzeyin vektör alanlarının uzayının bir bazı $\left\{\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \psi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\}$ dir. Kısalık için $\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \psi_u$ ve $\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = \psi_v$ ile gösterilir. Yüzeyin normali $\mathbf{N_1} = \psi_u \times \psi_v$ ve yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$\mathbf{E} = g(\psi_u, \psi_u), \;\; \mathbf{F} = g(\psi_u, \psi_v), \;\; \mathbf{G} = g(\psi_v, \psi_v) \tag{2.5}$$

olmak üzere Teorem 2.35. in 4-üncü özelliğinden

$$\begin{aligned} g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1}) &= g(\psi_u \times \psi_v, \psi_u \times \psi_v) \\ &= -g(\psi_u, \psi_u) g(\psi_v, \psi_v) + (g(\psi_u, \psi_v))^2 \\ &= \mathbf{F}^2 - \mathbf{E}\mathbf{G} \end{aligned}$$

elde edilir. ψ nin tam diferensiyeli

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv$$

olup yüzeyin birinci temel formu

$$
\begin{aligned}
I &= (ds)^2 = g(d\psi, d\psi) \\
&= g(\frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u})(du)^2 + 2g(\frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial v})dudv + g(\frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial v})(dv)^2 \\
&= \mathbf{E}(du)^2 + 2\mathbf{F}dudv + \mathbf{G}(dv)^2
\end{aligned}
$$

biçiminde bulunur [18]. Buradan

$$\frac{(ds)^2}{(dv)^2} = \mathbf{E}(\frac{du}{dv})^2 + 2\mathbf{F}\frac{du}{dv} + G$$

ve $\lambda = \dfrac{du}{dv}$, $I^{'} = \dfrac{(ds)^2}{(dv)^2}$ olmak üzere

$$I = \mathbf{E}\lambda^2 + 2\mathbf{F}\lambda + \mathbf{G}$$

elde edilir. S yüzeyi üzerindeki $I = (ds)^2$ indirgenmiş metriğinin pozitif tanımlı veya indefinit olup olmadığını incelemek ile, $I = (dv)^2 I^{'}$ olduğundan, $I^{'}$ yü incelemek aynı şeydir

Tanım 2.45. $\mathbb{R}^3_1$, 3- boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey S olsun. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\mathbf{S}$ ye $\mathbb{R}^3_1$ de bir spacelike yüzey denir [1].

Teorem 2.46. $\mathbb{R}^3_1$, 3- boyutlu Minkowski uzayında (U, ψ) parametrizasyonu ile verilen bir

$$
\begin{aligned}
&\psi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_1 \\
&\qquad (u, v) \to \psi(u, v) = (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v), \psi_3(u, v))
\end{aligned}
$$

yüzeyinin spacelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin $\mathbf{N_1}$ normalinin timelike bir vektör alanı, yani

$$g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1}) < 0$$

olmasıdır [18].

İspat. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik $I = (dv)^2 I'$ ve $I' = \mathbf{E}\lambda^2 + 2\mathbf{F}\lambda + \mathbf{G}$ dir. λ ya göre ikinci dereceden bir denklemin diskriminantı

$$\Delta = 4(\mathbf{F}^2 - \mathbf{EG}) = 4g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1})$$

dir. $I' > 0$ olması için gerek ve yeter şart $\Delta < 0$ olmasıdır. O halde $g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1}) < 0$ dır [18].

Tanım 2.47. $\mathbb{R}^3_1$, 3- boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey S olsun. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Minkowski metriği ise S ye timelike yüzey denir [1].

Teorem 2.48. $\mathbb{R}^3_1$, 3- boyutlu Minkowski uzayında bir S yüzeyinin timelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike bir vektör alanı, yani

$$g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1}) > 0$$

olmasıdır [18].

İspat. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik $I = (dv)^2 I'$ ve $I' = \mathbf{E}\lambda^2 + 2\mathbf{F}\lambda + \mathbf{G}$ dir. λ ya göre ikinci dereceden bir denklemin diskriminantı

$$\Delta = 4(\mathbf{F}^2 - \mathbf{EG}) = 4g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1})$$

dir. I' nün Minkowski metriği olması için gerek ve yeter şart $\Delta > 0$ olmasıdır. Buradan bir S yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike vektör alanı olmasıdır [18].

Tanım 2.49. 3-boyutlu $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayında

$$\begin{aligned} \psi : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3_1 \\ (u,v) &\to \psi(u,v) = (\psi_1(u,v), \psi_2(u,v), \psi_3(u,v)) \end{aligned}$$

parametrizasyonu ile verilen yüzey S olsun. $\psi(U)$ yüzeyini ele alalım. Yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları

$$\mathbf{l} = g(\psi_{uu}, \mathbf{N}), \;\; \mathbf{m} = g(\psi_{uv}, \mathbf{N}), \;\; \mathbf{n} = g(\psi_{vv}, \mathbf{N})$$

olup, burada $\mathbf{N} = \dfrac{\psi_u \times \psi_v}{\|\psi_u \times \psi_v\|}$ yüzeyin birim normalidir. Böylece $\psi(U)$ yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{\varepsilon}{2}\frac{En + Gl - 2Fm}{F^2 - EG}$$

dir. Burada yüzey timelike ise $\varepsilon = -1$, yüzey spacelike ise $\varepsilon = 1$ dir. Ortalama eğriliği her noktasında sıfır olan spacelike yüzeyler, maksimal yüzey olarak adlandırılırken timelike yüzeyler ise minimal yüzey olarak adlandırılır [3, 21, 22].

3. Polinom Pisagor Normal Yüzeylere Reel Kuaterniyon Yaklaşımı

Bu bölümde tezin temelini oluşturan literatürdeki J. Kozak ve arkadaşlarının [10] nolu çalışmasında yer alan reel kuaterniyon katsayılı iki değişkenli kübik, kuintik ve kuartik polinom PN yüzeyler detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

İlk olarak (2.1) formunda verilen bir $q(u, v)$ reel kuaterniyon polinomu yardımıyla birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_3$$

olan $\mathbf{S} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ polinom parametrik yüzeyi elde edilecektir. Burada $\mathbf{e}_3$, (2.2) eşitliğiyle tanımlı ve $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, S yüzeyinin uyarlanmış çatısıdır. S yüzeyinin teğet düzlemi her (u, v) parametresi için $\mathbf{h}_1(u, v)$ ve $\mathbf{h}_2(u, v)$ vektörleri tarafından gerilir. Bundan ötürü, $\mathbf{S}_u$ ve $\mathbf{S}_v$,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u &= \varphi_1 \mathbf{h}_1 + \varphi_2 \mathbf{h}_2 = \mathbf{g}_1, \\ \mathbf{S}_v &= \varphi_3 \mathbf{h}_1 + \varphi_4 \mathbf{h}_2 = \mathbf{g}_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

formunda yazılabilir. Burada φ_i $(1 \leq i \leq 4)$, iki değişkenli polinom ya da rasyonel fonksiyon, $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ iki değişkenli polinomlardır. S nin yüzey belirtmesi için

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u} \tag{3.2}$$

olmalıdır [10].

Lemma 3.1. $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$, (3.2) eşitliğini sağlayan iki polinom fonksiyonu olsun. O zaman, $\mathbf{S}_u = \mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{S}_v = \mathbf{g}_2$ olacak şekilde bir S yüzeyi vardır ve

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^u (\mathbf{g}_1(u, v) + \mathbf{g}_1(u, 0)) du + \frac{1}{2} \int_0^v (\mathbf{g}_2(u, v) + \mathbf{g}_2(0, v)) dv + \mathbf{S}(0, 0) \tag{3.3}$$

formundadır [10].

İspat. (3.1) eşitliklerinden ilki olan $\mathbf{S}_u = \mathbf{g}_1$ eşitliğinin her iki tarafının u ya göre integrali alındığında

$$\mathbf{S}(u,v) = \int_0^u \mathbf{g}_1(u,v)du + C(v)$$

elde edilir. Burada C, v ye bağlı tek değişkenli bir fonksiyondur. Bu eşitliğin v ye göre türevi alınıp, (3.2) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_v(u,v) &= \int_0^u \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v}(u,v)du + C^{'}(v)\\ &= \int_0^u \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u}(u,v)du + C^{'}(v)\\ &= \mathbf{g}_2(u,v) - \mathbf{g}_2(0,v) + C^{'}(v)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\mathbf{S}_v = \mathbf{g}_2$ eşitliği kullanıldığında

$$C^{'}(v) = \mathbf{g}_2(0,v)$$

elde edilir ve v ye göre integral alındığında

$$C(v) = \int_0^v \mathbf{g}_2(0,v)dv + c_1$$

bulunur ve böylece

$$\mathbf{S}(u,v) = \int_0^u \mathbf{g}_1(u,v)du + \int_0^v \mathbf{g}_2(0,v)dv + sbt \tag{3.4}$$

dir.

Benzer bir şekilde, (3.1) eşitliklerinden ikincisi olan $\mathbf{S}_v = \mathbf{g}_2$ eşitliğinin her iki tarafın v ye göre integrali alındığında

$$\mathbf{S}(u,v) = \int_0^v \mathbf{g}_2(u,v)dv + C(u)$$

elde edilir. Burada C, u ya bağlı tek değişkenli bir fonksiyondur. Bu eşitliğin u ye göre türevi alınıp, (3.2) eşitliği de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_u(u,v) &= \int_0^v \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u}(u,v)dv + C^{'}(u) \\ &= \int_0^v \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial u}(u,v)dv + C^{'}(u) \\ &= \mathbf{g}_1(u,v) - \mathbf{g}_1(u,0) + C^{'}(u)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\mathbf{S}_u = \mathbf{g}_1$ eşitliği kullanıldığında

$$C^{'}(u) = \mathbf{g}_1(u,0)$$

elde edilir ve u ya göre integral alındığında

$$C(u) = \int_0^u \mathbf{g}_1(u,0)du + c_2$$

olarak bulunur ve böylece

$$\mathbf{S}(u,v) = \int_0^v \mathbf{g}_2(u,v)dv + \int_0^u \mathbf{g}_1(u,0)du + sbt \tag{3.5}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla (3.4) ve (3.5) eşitlikleri yardımıyla (3.3) eşitliği elde edilir [10]. Bir sonraki Lemma, Lemma 3.1. de tanımlanan $\mathbf{S}$ yüzeyinin elde edilişi için farklı bir yol göstermektedir.

Lemma 3.2. Kabul edelim ki,

$$\mathbf{g}_l(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i} \mathbf{B}_{ij}^{[l]} u^i v^j, \quad l = 1,2 \tag{3.6}$$

olsun. O zaman (3.2) eşitliği doğrudur gerek ve yeter koşul

$$(j+1)\mathbf{B}_{i(j+1)}^{[1]} = (i+1)\mathbf{B}_{(i+1)j}^{[2]}, \quad i = 0,1,...,m-1, j = 0,1,...,m-1-i \tag{3.7}$$

dir. Aynı zamanda (3.3) eşitliğiyle tanımlı $\mathbf{S}$ yüzeyi

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{m+1-i} \mathbf{S}_{ij} u^i v^j \tag{3.8}$$

formundadır. Burada

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{i0} = \frac{1}{i}\mathbf{B}^{[1]}_{(i-1)0}, \quad \mathbf{S}_{0i} = \frac{1}{i}\mathbf{B}^{[2]}_{0(i-1)}, \quad i = 1, 2, ..., m+1 \\
&\mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{i}\mathbf{B}^{[1]}_{(i-1)j} = \frac{1}{j}\mathbf{B}^{[2]}_{i(j-1)}, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., m+1-i
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ve $\mathbf{S}_{00}$ keyfi bir sabittir [10].

İspat. (3.7) eşitliğinin ispatı için ilk olarak

$$\mathbf{g}_1(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\mathbf{B}^{[1]}_{ij}u^i v^j \tag{3.10}$$

eşitliğinin v ye göre kısmi türevi alınıp,

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-i} j\mathbf{B}^{[1]}_{ij}u^i v^{j-1}$$

ifadesinde j yerine $j+1$ yazılırsa

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1-i} (j+1)\mathbf{B}^{[1]}_{i(j+1)}u^i v^j \tag{3.11}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\mathbf{g}_2(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\mathbf{B}^{[2]}_{ij}u^i v^j \tag{3.12}$$

eşitliğinin u ya göre kısmi türevi alınıp,

$$\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-i} i\mathbf{B}^{[2]}_{ij}u^{i-1} v^j$$

ifadesinde i yerine $i+1$ yazılırsa

$$\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u} = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1-i} (i+1)\mathbf{B}^{[2]}_{(i+1)j}u^i v^j \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.2) eşitliğinin doğruluğu kabul edildiğinde (3.11) ve (3.13) denklemlerinde polinomların eşitliği kullanılırsa (3.7) eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (3.7) eşitliğinden (3.2) eşitliğinin doğruluğu da gösterilir.

(3.10) ve (3.12) eşitlikleri (3.3) ifadesinde yerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(u,v) &= \mathbf{S}(0,0)+\frac{1}{2}\int_0^u(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\mathbf{B}_{ij}^{[1]}u^iv^j+\sum_{i=0}^{m}\mathbf{B}_{i0}^{[1]}u^i)du+\frac{1}{2}\int_0^v(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\mathbf{B}_{ij}^{[2]}u^iv^j+\sum_{j=0}^{m}\mathbf{B}_{0j}^{[2]}v^j)dv\\ &= \mathbf{S}(0,0)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m+1-i}\frac{1}{2}(\frac{1}{i}\mathbf{B}_{(i-1)j}^{[1]}+\frac{1}{j}\mathbf{B}_{i(j-1)}^{[2]})u^iv^j+\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{i}\mathbf{B}_{(i-1)0}^{[1]}u^i+\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{j}\mathbf{B}_{0(j-1)}^{[2]}v^j \quad (3.14)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (3.8) ve (3.14) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}&\mathbf{S}_{i0}=\frac{1}{i}\mathbf{B}_{(i-1)0}^{[1]},\qquad \mathbf{S}_{0i}=\frac{1}{i}\mathbf{B}_{0(i-1)}^{[2]},\ i=1,2,\cdots,m+1\\ &\mathbf{S}_{ij}=\frac{1}{i}\mathbf{B}_{(i-1)j}^{[1]}=\frac{1}{j}\mathbf{B}_{i(j-1)}^{[2]},\ i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,m+1-i, \qquad (3.15)\end{aligned}$$

dir. Burada $\mathbf{S}_{00}$ keyfi bir sabittir [10].

(2.1) ile verilen q kuaterniyon polinomu için (3.2) eşitliği sağlanıyorsa Lemma 3.1. ve Lemma 3.2. yardımı ile elde edilen $\mathbf{S}$ yüzeyi bir polinom PN yüzeyi ifade eder. Böyle bir yüzeyin derecesi

$$2der(q)+\max_{i=1,2,3,4}(der(\varphi_i))+1$$

dir [10].

Özel olarak, φ_i ler birer sabit olarak seçilirse, $2der(q)+1$ dereceli bir polinom PN yüzeyi elde edilir. $\mathbf{S}(u,v)$ yüzeyinin $v=v_0=sbt$ için $\mathbf{r}_1(u)=\mathbf{S}(u,v_0)$ parametre eğrisinin hodografı için

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{r_1}'(u),\mathbf{r_1}'(u)\rangle &= \langle\varphi_1\mathbf{h}_1(u,v_0)+\varphi_2\mathbf{h}_2(u,v_0),\varphi_1\mathbf{h}_1(u,v_0)+\varphi_2\mathbf{h}_2(u,v_0)\rangle\\ &= \varphi_1^2\langle\mathbf{h}_1(u,v_0),\mathbf{h}_1(u,v_0)\rangle+2\varphi_1\varphi_2\langle\mathbf{h}_1(u,v_0),\mathbf{h}_2(u,v_0)\rangle+\varphi_2^2\langle\mathbf{h}_2(u,v_0),\mathbf{h}_2(u,v_0)\rangle\\ &= \varphi_1^2\left\|q\right\|^4+\varphi_2^2\left\|q\right\|^4\\ &= \left\|q\right\|^4(\varphi_1^2+\varphi_2^2) \qquad (3.16)\end{aligned}$$

dir. φ_1 ve φ_2 birer sabit olduğundan $\mathbf{r_1}$ parametre eğrisi $\mathbf{S}(u,v)$ polinom PN yüzeyi üzerinde yatan bir PH eğrisidir. Benzer şekilde, $\mathbf{S}(u,v)$ yüzeyinin $u=u_0=sbt$ için $\mathbf{r}_2(v)=\mathbf{S}(u_0,v)$

parametre eğrisinin hodografı için

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r_2}'(v), \mathbf{r_2}'(v) \rangle &= \langle \varphi_3 \mathbf{h}_1(u_0,v) + \varphi_4 \mathbf{h}_2(u_0,v), \varphi_3 \mathbf{h}_1(u_0,v) + \varphi_4 \mathbf{h}_2(u_0,v) \rangle \\
&= \varphi_3^2 \langle \mathbf{h}_1(u_0,v), \mathbf{h}_1(u_0,v) \rangle + 2\varphi_3\varphi_4 \langle \mathbf{h}_1(u_0,v), \mathbf{h}_2(u_0,v) \rangle + \varphi_4^2 \langle \mathbf{h}_2(u_0,v), \mathbf{h}_2(u_0,v) \rangle \\
&= \varphi_3^2 \|q\|^4 + \varphi_4^2 \|q\|^4 \\
&= \|q\|^4 (\varphi_3^2 + \varphi_4^2) \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

dir. φ_3 ve φ_4 birer sabit olduğundan $\mathbf{r_2}$ parametre eğrisi $\mathbf{S}(u,v)$ polinom PN yüzeyi üzerinde yatan diğer bir PH eğrisidir [10].

Çift dereceli bir polinom PN yüzeyini oluşturmak için φ_i ler tek dereceli polinomlar olarak seçilmelidir. Özel olarak, φ_i birinci dereceden fonksiyon olarak seçilirse $2der(q)+2$ dereceden polinom PN yüzeyi elde edilir [10].

(3.2) eşitliği keyfi φ_i fonksiyonları ve (3.1) ve (3.6) eşitlikleri ile tanımlanan keyfi reel kuaterniyon polinomları için her zaman sağlanmaz [10].

3.1. Tek Dereceli Reel Polinom PN Yüzeyinin Yapısı

(2.1) formunda verilen bir $q(u,v)$ reel kuaterniyon polinomu ve (2.2) eşitliğiyle tanımlı $\mathbf{h}_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ dönüşümünü ele alalım.

$$\begin{aligned}
U_1 &= \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j}, \\
U_2 &= \varphi_3 \mathbf{i} + \varphi_4 \mathbf{j} \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

gibi iki reel kuaterniyon seçilir ve ilk olarak

$$\varphi_i(u,v) = \alpha_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3,4$$

alınır ve (3.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 &= \varphi_1\mathbf{h}_1 + \varphi_2\mathbf{h}_2\\ &= \varphi_1(q\mathbf{i}\overline{q}) + \varphi_2(q\mathbf{j}\overline{q})\\ &= q(\varphi_1\mathbf{i} + \varphi_2\mathbf{j})\overline{q}\\ &= qU_1\overline{q}\end{aligned} \tag{3.19}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_2 &= \varphi_3\mathbf{h}_1 + \varphi_4\mathbf{h}_2\\ &= \varphi_3(q\mathbf{i}\overline{q}) + \varphi_4(q\mathbf{j}\overline{q})\\ &= q(\varphi_3\mathbf{i} + \varphi_4\mathbf{j})\overline{q}\\ &= qU_2\overline{q}\end{aligned} \tag{3.20}$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$,

$$\mathbf{B}_{i,j}^{[l]} = \sum_{k=\max\{0,i-n\}}^{\min\{i,n\}} \sum_{r=\max\{0,j+i-n-k\}}^{\min\{j,n-k\}} q_{kr}U_l\overline{q}_{(i-k)(j-r)}, \quad l = 1, 2. \tag{3.21}$$

eşitliğinde $m = 2n$ alınarak (3.6) eşitliğindeki gibi ifade edilebilir.

Lemma 3.1. ve Lemma 3.2. den $m = 2n$ için q reel kuaterniyon polinomu (3.7) eşitliği sağlandığında $n(2n + 1)$ vektör denklemli bir polinom PN yüzeyi belirtir. Bu denklemlerin $\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix}$ kombinasyonlu kuaterniyon katsayısıları ve dört α_i parametresi arasında lineer olmayan bağıntılar vardır.

$n \geq 2$ için q reel kuaterniyon polinomu $4\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} + 4$ serbest parametre ile $3n(2n+1)$ skalar denkleme sahip olduğundan bir çözüm bulanamaz.

$\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ nin kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} &= q_vU_1\overline{q} + qU_1\overline{q}_v\\ &= q_vU_1\overline{q} - \overline{q_vU_1\overline{q}}\\ &= 2vec(q_vU_1\overline{q})\end{aligned} \tag{3.22}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u} &= q_u U_2 \overline{q} + q U_2 \overline{q}_u \\ &= q_u U_2 \overline{q} - \overline{q_u U_2 \overline{q}} \\ &= 2vec(q_u U_2 \overline{q}) \end{aligned} \tag{3.23}$$

formundadır. Burada (3.2) eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul

$$vec(q_v U_1 \overline{q}) - vec(q_u U_2 \overline{q}) = 0$$

olup,

$$vec((q_v U_1 - q_u U_2)\overline{q}) = 0 \tag{3.24}$$

dir. (3.24) eşitliği doğrudur gerek ve yeter şart

$$q_v U_1 - q_u U_2 = \psi q \tag{3.25}$$

dir. Burada ψ bir skalar fonksiyondur. (3.25) eşitliğinin sol tarafı $n-1$ dereceli bir reel kuaterniyon polinomu olduğundan, ψ rasyoneldir ve payının derecesi paydasının derecesinden bir derece eksiktir. Özellikle $\psi \equiv 0$ durumunda aşağıdaki teorem verilen yüzey için çözüm verir [10].

Teorem 3.3. (2.1) eşitliği ile verilen q reel kuaterniyon polinomunun katsayıları
$i = 0, 1, \cdots, n-1, j = 0, 1, \cdots, n-1-i$ için

$$(j+1)q_{i(j+1)}U_1 = (i+1)q_{(i+1)j}U_2 \tag{3.26}$$

eşitliğini sağlıyorsa, (3.3), (3.19) ve (3.20) eşitlikleri ile tanımlı $\mathbf{S}$ parametrik yüzeyi

$$\mathbf{S}_u \wedge \mathbf{S}_v = (\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)\|q\|^2(\mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{h}_2), \quad \mathbf{N} = \mathbf{e}_3$$

olacak şekilde $2n+1$ dereceli bir polinom PN yüzeydir [10].

İspat. (3.25) eşitliği, (3.21) eşitliği ve Lemma 3.2. yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$q_vU_1 - q_uU_2 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}((j+1)q_{i(j+1)}U_1 - (i+1)q_{(i+1)j}U_2)u^iv^j = \psi q.$$

(3.25) eşitliğinde $\psi \equiv 0$ seçilirse (3.26) elde edilir. Ayrıca (3.2) eşitliği sağlanır ve (3.3) eşitliği ile verilen yüzey $\mathbf{S}_u = \mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{S}_v = \mathbf{g}_2$ kısmi türevlerine sahiptir. Dahası

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_u \wedge \mathbf{S}_v &= (\alpha_1\mathbf{h}_1 + \alpha_2\mathbf{h}_2) \wedge (\alpha_3\mathbf{h}_1 + \alpha_4\mathbf{h}_2)\\ &= (\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)(\mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{h}_2)\\ &= (\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)\|q\|^2\mathbf{h}_3\end{aligned}$$

dir [10].

Teorem 3.3. sadece bir polinom PN yüzeyinin varolabilmesi için gerekli şartları ifade eder. (3.26) eşitliğinin açık hali aşağıdaki Lemma ile verilebilir.

Lemma 3.4. (3.26) eşitliği sağlanır gerek ve yeter şart

$$q_{\lceil\frac{r}{2}\rceil+t,\lfloor\frac{r}{2}\rfloor-t} = \frac{\left(\lceil\frac{r}{2}\rceil\right)!\left(\lfloor\frac{r}{2}\rfloor\right)!}{\left(\lceil\frac{r}{2}\rceil+t\right)!\left(\lfloor\frac{r}{2}\rfloor-t\right)!}Q_r(U_1U_2^{-1})^t, \quad t = -\left\lceil\frac{r}{2}\right\rceil, \cdots, \left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor$$

dir. Burada $r = 1, 2, \cdots, n$ ve Q_r keyfi bir reel kuaterniyondur [10].

3.1.1. Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi

Bir kübik polinom PN yüzeyi oluşturulurken $n = 1$ için (2.1) eşitliğiyle ifade edilen q lineer reel kuaterniyon polinomu alınırsa, Lemma 3.4. de $r = 1$ için $t = -1, 0$ olup kontrol noktaları

$$\begin{aligned}&q_{00},\\ &q_{10} = Q_1,\\ &q_{01} = Q_1U_2U_1^{-1}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Q_1 yerine $Q_1 U_2^{-1}$ seçilirse kontrol noktaları

$$\begin{aligned} &q_{00}, \\ &q_{10} = Q_1 U_2^{-1}, \\ &q_{01} = Q_1 U_1^{-1} \end{aligned} \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.21) ifadesinde $k = 0, 1$ ve $l = 1, 2$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{00}^{[l]} &= q_{00} U_l \overline{q}_{00}, \\ \mathbf{B}_{(1-k)k}^{[l]} &= 2vec(q_{00} U_l \overline{q}_{(1-k)k}), \\ \mathbf{B}_{11}^{[l]} &= 2vec(q_{01} U_l \overline{q}_{10}), \\ \mathbf{B}_{(2-2k)2k}^{[l]} &= q_{(1-k)k} U_l \overline{q}_{(1-k)k} \end{aligned} \tag{3.28}$$

dir. Dolayısıyla Lemma 3.2. yardımıyla kübik bir polinom PN yüzeyi elde edilir [10].

Örnek 3.5. Kontrol noktalarını belirleyebilmek için

$$q_{00} = (1, 0, 0, 0), \quad Q_1 = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$$

ve

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{2}$$

serbest parametreleri seçilir ve bu parametreler (3.18) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$U_1 = (0, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0), \quad U_2 = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$$

olup, (3.27) eşitliğinden kontrol noktaları

$$\begin{aligned} &q_{00} = (1, 0, 0, 0), \\ &q_{10} = Q_1 U_2^{-1} = (\frac{5}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{7}{6}, \frac{3}{4}), \\ &q_{01} = Q_1 U_1^{-1} = (\frac{7}{10}, -\frac{3}{5}, -\frac{13}{15}, \frac{11}{10}) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.28) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{00}^{[1]} &= q_{00}U_1\overline{q}_{00} = (\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0) \\
\mathbf{B}_{10}^{[1]} &= 2vec(q_{00}U_1\overline{q}_{10}) = (\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{6}) \\
\mathbf{B}_{01}^{[1]} &= 2vec(q_{00}U_1\overline{q}_{01}) = (2, -\frac{1}{4}, \frac{4}{3}) \\
\mathbf{B}_{11}^{[1]} &= 2vec(q_{01}U_1\overline{q}_{10}) = (\frac{83}{72}, -\frac{54}{72}, \frac{29}{6}) \\
\mathbf{B}_{20}^{[1]} &= q_{10}U_1\overline{q}_{10} = (\frac{33}{32}, -\frac{341}{288}, \frac{55}{24}) \\
\mathbf{B}_{02}^{[1]} &= q_{01}U_1\overline{q}_{01} = (\frac{7}{72}, \frac{107}{120}, \frac{61}{30})
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{00}^{[2]} &= q_{00}U_2\overline{q}_{00} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) \\
\mathbf{B}_{10}^{[2]} &= 2vec(q_{00}U_2\overline{q}_{10}) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}) \\
\mathbf{B}_{01}^{[2]} &= 2vec(q_{00}U_2\overline{q}_{01}) = (\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, \frac{22}{15}), \\
\mathbf{B}_{11}^{[2]} &= 2vec(q_{01}U_2\overline{q}_{10}) = (\frac{7}{36}, \frac{107}{60}, \frac{61}{15}) \\
\mathbf{B}_{20}^{[2]} &= q_{10}U_2\overline{q}_{10} = (\frac{83}{144}, -\frac{5}{144}, \frac{29}{12}) \\
\mathbf{B}_{02}^{[2]} &= q_{01}U_2\overline{q}_{01} = (-\frac{11}{36}, \frac{1309}{900}, \frac{33}{25})
\end{aligned}
$$

olup, Lemma 3.2. den

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_1(u,v) = (&\frac{1}{4} + \frac{7u}{4} + \frac{33u^2}{32} + 2v + \frac{83uv}{72} + \frac{7v^2}{72}, \\
&-\frac{3}{4} - \frac{3u}{2} - \frac{341u^2}{288} - \frac{v}{2} - \frac{5uv}{72} + \frac{107v^2}{120}, \\
&+\frac{5u}{6} + \frac{55u^2}{24} + \frac{4v}{3} + \frac{29uv}{6} + \frac{61v^2}{30}),
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{g}_2(u,v)=(\frac{1}{2}+2u+\frac{83u^2}{144}+\frac{9v}{5}+\frac{7uv}{36}-\frac{11v^2}{36},$$
$$-\frac{1}{2}-\frac{u}{2}-\frac{5u^2}{144}+\frac{2v}{5}+\frac{107uv}{60}+\frac{1309v^2}{900},$$
$$+\frac{4u}{3}+\frac{29u^2}{12}+\frac{22v}{15}+\frac{61uv}{15}+\frac{33v^2}{25})$$

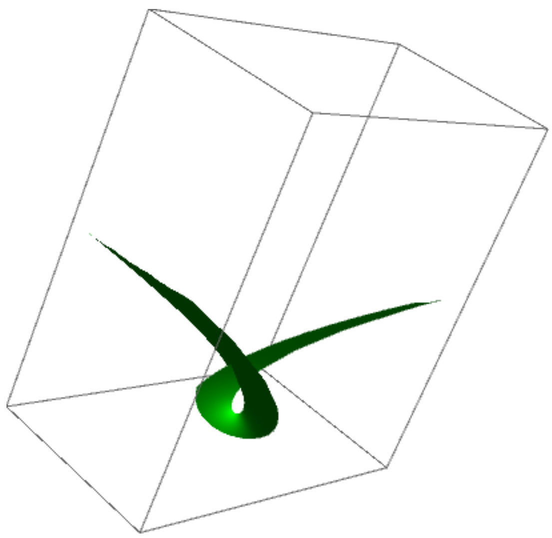
ve

$$\mathbf{S}(u,v)=(\frac{11u^3}{32}+\frac{83u^2v}{144}+\frac{7u^2}{8}+\frac{7uv^2}{72}+2uv+\frac{u}{4}-\frac{11v^3}{108}+\frac{9v^2}{10}+\frac{v}{2},$$
$$+\frac{-341u^3}{864}-\frac{5u^2v}{144}-\frac{3u^2}{4}+\frac{107uv^2}{120}-\frac{uv}{2}-\frac{3u}{4}+\frac{1309u^3}{2700}+\frac{v^2}{5}-\frac{v}{2},$$
$$+\frac{55u^3}{72}+\frac{29u^2v}{12}+\frac{5u^2}{12}+\frac{61uv^2}{30}+\frac{4u}{3}+\frac{11v^3}{25}+\frac{11v^2}{15})$$

parametrik yüzeyi elde edilir. Burada

$$\|(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v)(u,v)\|=\frac{(1265u^2+2024uv+900u+1012v^2+504uv+360)^2}{518400}$$

olduğundan bu yüzey bir reel kübik polinom PN yüzeyidir. Bkz. Şekil 3.1. [10].



Şekil 3.1. Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi

Kübik polinom PN yüzeylerinin yapısı *Lávička* ve *Vršek* [13] tarafından oluşturulmuş olup yazarlar

$$\mathbf{S}(u,v) = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3 + \mathbf{C}$$

formundaki polinom PN yüzeylerinin ailesini elde etmişlerdir. Burada $c_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 3)$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$ bir sabit vektördür.

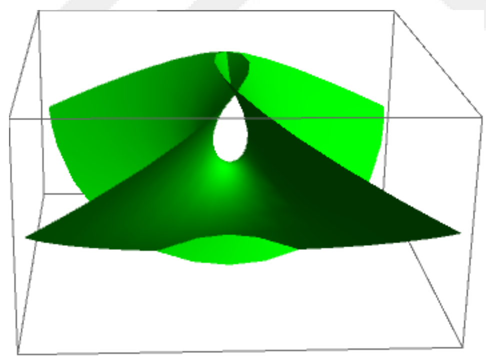
q kuaterniyon polinomu $q(u,v) = (-v,1,0,u)$ ve $U_1 = (0,1,0,0)$, $U_2 = (0,0,1,0)$ olsun. (3.22) ve (3.23) eşitliklerinden

$$\mathbf{g}_1(u,v) = qU_1\overline{q} = (1-u^2+v^2, -2uv, 2u)$$
$$\mathbf{g}_2(u,v) = qU_2\overline{q} = (2uv, -1-u^2+v^2, -2v)$$

bulunur ve Lemma 3.1. den

$$\mathbf{P}_1 = (-\frac{u^3}{3} + uv^2 + u, -u^2v + \frac{v^3}{3} - v, u^2 - v^2)$$

yüzeyi elde edilir [10]. Bkz. Şekil 3.2. Benzer şekilde $U_1 = (0,0,1,0)$, $U_2 = (0,-1,0,0)$



Şekil 3.2. $\mathbf{P}_1$ Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi

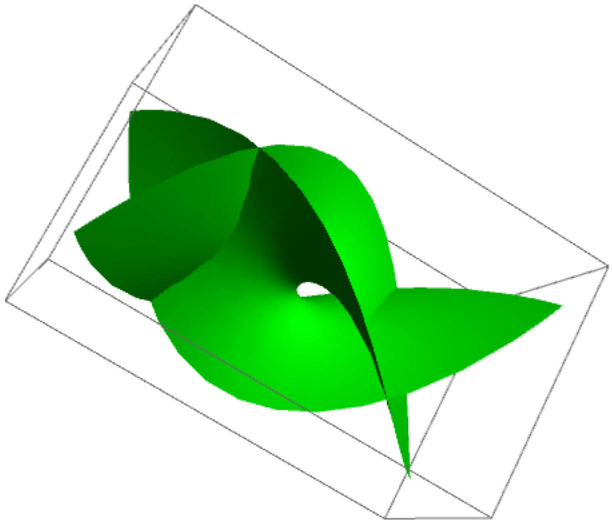
seçilirse (3.22) ve (3.23) eşitliklerinden

$$\mathbf{g}_1(u,v) = qU_1\overline{q} = (2uv, -1-u^2+v^2, -2v)$$
$$\mathbf{g}_2(u,v) = qU_2\overline{q} = (-1+u^2-v^2, 2uv, -2u)$$

bulunur ve Lemma 3.1. den

$$\mathbf{P}_2 = (u^2v - \frac{v^3}{3} - v, -\frac{u^3}{3} + uv^2 - u, -2uv)$$

yüzeyi elde edilir [10]. Bkz. Şekil 3.3. Ancak $\mathbf{P}_3$ yüzeyi benzer şekilde bulunamamaktadır.



Şekil 3.3. P_2 Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi

Bu durumda

$$\frac{v}{1+u^2+v^2}\mathbf{h}_1(u,v)+\frac{u}{1+u^2+v^2}\mathbf{h}_2(u,v)=(v,-u,0):=\hat{\mathbf{h}}(u,v)$$

lineer dönüşümü yardımı ile

$$\mathbf{g}_1(u,v)=\frac{-4v}{3}\hat{\mathbf{h}}(u,v)+\mathbf{h}_1(u,v),\quad \mathbf{g}_2(u,v)=\frac{4u}{3}\hat{\mathbf{h}}(u,v)+\mathbf{h}_2(u,v)$$

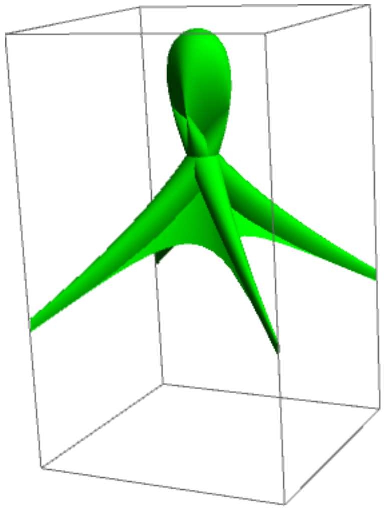
eşitlikleri elde edilir ve Lemma 3.1. den

$$\mathbf{P}_3=(u-\frac{1}{3}u(u^2+v^2),v-\frac{1}{3}v(u^2+v^2),u^2+v^2)$$

yüzeyi de elde edilir [10]. Bkz. Şekil 3.4. $\mathbf{P}_i$ yüzeylerini incelersek bu üç yüzeyin $\mathbf{N}$ birim normallerinin

$$\mathbf{N}(u,v)=\frac{1}{1+u^2+v^2}(2u,2v,u^2+v^2-1)$$

olduğu kolayca görülebilir [10].
Bu örnek, φ_i seçiminin ikinci dereceden rasyonel fonksiyonlar olması durumunda da bir kübik polinom PN yüzeyinin elde edilebileceğini ifade eder. Bir sonraki lemmada $\hat{\mathbf{h}}$ nın $\mathbf{h}_1$ ve $\mathbf{h}_2$ cinsinden nasıl ifade edilebileceğini göstermektedir.



Şekil 3.4. P_3 Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi

Lemma 3.6. q, $n = 1$ için (2.1) eşitliği ile verilen bir lineer reel kuaterniyon ve

$$p_1(u,v) = \left\langle \mathbf{w}, vec(q_{00}^{-1} q\mathbf{j}) \right\rangle,$$
$$p_2(u,v) = -\left\langle \mathbf{w}, vec(q_{00}^{-1} q\mathbf{i}) \right\rangle$$

olsun. Burada $\mathbf{w} = vec(q_{00}^{-1} q_{10}) \wedge vec(q_{00}^{-1} q_{01})$ dir. Bu durumda

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{\|q_{00}\|^4}{\|q\|^2}(p_1\mathbf{h}_1 + p_2\mathbf{h}_2) \tag{3.29}$$

formunda bir lineer polinom dönüşümüdür [10].

İspat. Genelliği bozmadan

$$q_{00} = (1,0,0,0)$$

olarak seçebiliriz. Diğer kontrol noktaları

$$q_{10} = (a_0, a_1, a_2, a_3), \quad q_{01} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$$

olsun. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$p_1(u,v) = \langle \mathbf{w}, ((0,1,0) + (-a_3, a_0, a_1)u + (-b_3, b_0, b_1)v) \rangle,$$
$$p_2(u,v) = -\langle \mathbf{w}, ((-1,0,0) + (-a_0, -a_3, a_2)u + (-b_0, -b_3, b_2)v) \rangle$$

eşitlikleri bulunur. Burada

$$p_1\mathbf{h}_1 + p_2\mathbf{h}_2 = \|q_{00}\|^2 \begin{pmatrix} \langle \mathbf{w}, ((0,1,0) + (a_3, a_0, a_1)u + (b_3, b_0, b_1)v)\rangle \\ \langle \mathbf{w}, ((-1,0,0) + (-a_0, a_3, a_2)u + (-b_0, b_3, b_2)v)\rangle \\ \langle \mathbf{w}, ((0,0,2a_3)u + (0,0,2b_3)v)\rangle \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir [10].

Lemma 3.6. nın bir sonucu olarak aşağıdaki gibi bazı kübik yüzeylerde oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1(u,v) &= \hat{\varphi}_1(u,v)\hat{\mathbf{h}}(u,v) + \alpha_1\mathbf{h}_1(u,v) + \alpha_2\mathbf{h}_2(u,v) \\ \mathbf{g}_2(u,v) &= \hat{\varphi}_2(u,v)\hat{\mathbf{h}}(u,v) + \alpha_3\mathbf{h}_1(u,v) + \alpha_4\mathbf{h}_2(u,v) \end{aligned} \tag{3.30}$$

formunda olup burada $\hat{\varphi}_1$ ve $\hat{\varphi}_2$ birer lineer fonksiyondur. (3.30) eşitliğinde kısmi türevler alınıp (3.2) eşitliğinin kullanılması ile $\hat{\varphi}_1$ ve $\hat{\varphi}_2$ nin altı katsayısı ve α_i dört parametresi ile on bilinmeyen ve dokuz skalardan oluşan bir lineer denklem sistemi oluşur. Bu denklem sistemi α_i lerden biri sabitlenerek çözülebilir [10].

Örnek 3.7. $q(u,v) = (2,-16,2,0) + (-2,2,2,1)u + (-4,0,1,2)v$ reel kuaterniyon polinomu verilsin. Lemma 3.6. dan

$$\begin{aligned} p_1(u,v) &= \frac{65u - 18v - 992}{34848} \\ p_2(u,v) &= \frac{13(7u + 3v - 13)}{17424} \end{aligned}$$

katsayıları ve

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1(u,v) &= (3u^2 + 8uv - 80u + 11v^2 - 20v + 256, 4u^2 - 12uv - 52u - 16v^2 - 24v - 64, \\ &\quad + 12u^2 + 28uv - 32u + 8v^2 - 52v - 8)), \\ \mathbf{h}_2(u,v) &= (12u^2 + 20uv - 60u + 16v^2 - 40v - 64, 3u^2 + 16uv + 64u + 13v^2 - 12v - 248, \\ &\quad - 4u^2 - 6uv + 76u + 4v^2 + 136v - 64) \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan ifadeler (3.29) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\hat{\mathbf{h}}(u,v) = (2(183u + 50v - 880), 124(u + v + 9), 8(u + 2v + 28))$$

elde edilir. $\alpha_4 = 342$ için $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ ve $\hat{\mathbf{h}}$ nin (3.30) da yerine yazılmasıyla elde edilen denklem sisteminin çözülmesiyle

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(u,v) &= 95 + 5v \\ \hat{\varphi}_2(u,v) &= 50 - 5u \\ \alpha_1 = 78, \ \ \alpha_2 = 156, \ \ \alpha_3 = 171 \end{aligned}$$

katsayıları bulunur. Bu katsayıların (3.30) eşitliğinde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1(u,v) = (&5574uv + 54u(39u + 355) + 3854v^2 - 4(1775v + 39304), \\ &+ 4(545uv + u(195u + 4427) + 350v^2 + 3404v + 15585), \\ &+ 8(39u^2 + 23u(7v + 55) + v(166v + 2475) + 1334)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2(u,v) = (&2787u^2 + u(7708v - 7100) + v(7353v - 12100) - 66112, \\ &+ 2(545u^2 + 8u(175v + 851) + v(855v - 1004) - 19980), \\ &+ 4(161u^2 + u(664v + 4950) + v(684v + 9605) - 3014) \end{aligned}$$

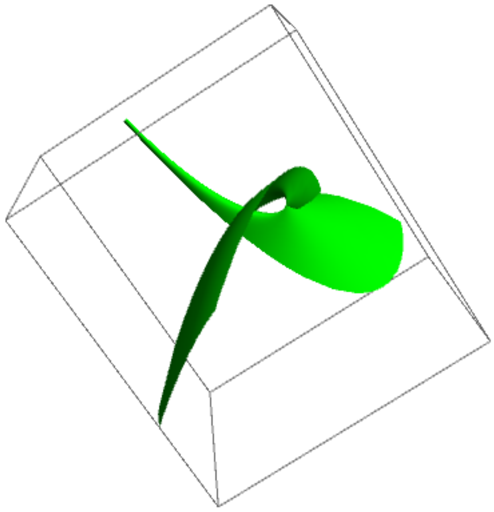
ve Lemma 3.1. yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u,v) = (&702u^3 + \frac{12063u^2v}{2} + 9585u^2 + 7583uv^2 - 14200uv - 157216u + 2451v^3 - 6050v^2 - 66112v, \\ &+ 260u^3 + 2335u^2v + 8854u^2 + 2645uv^2 + 27232uv + 62340u + 570v^3 - 1004v^2 - 39960v, \\ &+ 104u^3 + 1298u^2v + 5060u^2 + 2636uv^2 + 39600uv + 10672u + 912v^3 + 19210v^2 - 12056v) \end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir [10]. Bkz. Şekil 3.5. Burada

$$\|(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v)(u,v)\| = 3600(26u + 57v + 823)^2 \left|13u^2 + 8u(3v - 8) + 3v(7v - 4) + 264\right|$$

olduğundan bu yüzey bir reel kübik polinom PN yüzeydir. Bu örnekte farklı α_4 değerleri için farklı polinom PN yüzeylerde elde edilebilir.



Şekil 3.5. Reel Kübik Polinom PN Yüzeyi

3.1.2. Reel Kuintik Polinom PN Yüzeyi

Bir reel kuintik polinom PN yüzeyini oluşturulurken $n = 2$ için (2.1) eşitliğiyle tanımlanan

$$q = q_{00} + q_{10}u + q_{01}v + q_{11}uv + q_{20}u^2 + q_{02}v^2$$

reel kuaterniyon polinomu seçilir. Lemma 3.4. te $r = 1, 2$ için $t = -1, 0, 1$ olup kontrol noktaları

$$\begin{aligned} &q_{00}, \\ &q_{10} = Q_1 U_2^{-1}, \\ &q_{01} = Q_1 U_1^{-1}, \\ &q_{11} = Q_2, \\ &q_{20} = \frac{1}{2} Q_2 U_1 U_2^{-1}, \\ &q_{02} = \frac{1}{2} Q_2 U_2 U_1^{-1} \end{aligned} \tag{3.31}$$

dir. (3.27) eşitliğindeki Q_1 ve (3.31) eşitliğindeki Q_2 bir polinom PN yüzeyi yapısındaki serbestlik derecelerini temsil eden kuaterniyonlardır [10].

(3.21) ifadesinde $k = 0, 1$ ve $l = 1, 2$ için

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_{00}^{[l]} = q_{00} U_l \overline{q}_{00}, \\
&\mathbf{B}_{(1-k)k}^{[l]} = 2vec(q_{00} U_l \overline{q}_{(1-k)k}), \\
&\mathbf{B}_{11}^{[l]} = 2vec(q_{01} U_l \overline{q}_{10} + q_{00} U_l \overline{q}_{11}), \\
&\mathbf{B}_{(2-2k)2k}^{[l]} = q_{(1-k)k} U_l \overline{q}_{(1-k)k} + 2vec(q_{00} U_l \overline{q}_{(2-2k)2k}) \\
&\mathbf{B}_{(3-3k)3k}^{[l]} = 2vec(q_{(1-k)k} U_l \overline{q}_{(2-2k)2k}), \\
&\mathbf{B}_{(2-k)(1+k)}^{[l]} = 2vec(q_{(1-k)k} U_l \overline{q}_{11} + q_{k(1-k)} U_l \overline{q}_{(2-2k)2k}), \\
&\mathbf{B}_{22}^{[l]} = q_{11} U_l \overline{q}_{11} + 2vec(q_{02} U_l \overline{q}_{20}), \\
&\mathbf{B}_{(4-4k)4k}^{[l]} = q_{(2-2k)2k} U_l \overline{q}_{(2-2k)2k}, \\
&\mathbf{B}_{(3-2k)(1+2k)}^{[l]} = 2vec(q_{11} U_l \overline{q}_{(2-2k)2k})
\end{aligned} \tag{3.32}$$

olup, Lemma 3.2. yardımıyla reel kuintik polinom PN yüzeyi elde edilir [10].

Örnek 3.8. Kontrol noktalarını belirleyebilmek için

$$q_{00} = (1, 0, 0, 0), \quad Q_1 = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), \quad Q_2 = (0, -\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10})$$

ve

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{2}$$

serbest parametreleri seçilir ve bu parametreler (3.18) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$U_1 = (0, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0), \qquad U_2 = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$$

bulunur. (3.27) eşitliğinden kontrol noktaları

$$\begin{aligned}
&q_{00} = (1, 0, 0, 0), \\
&q_{10} = Q_1 U_2^{-1} = (-\frac{3}{4}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{4}), \\
&q_{01} = Q_1 U_1^{-1} = (\frac{7}{10}, -\frac{3}{5}, -\frac{13}{15}, \frac{11}{10}), \\
&q_{11} = Q_2 = (0, -\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}), \\
&q_{20} = \frac{1}{2} Q_2 U_1 U_2^{-1} = (-\frac{1}{20}, \frac{13}{96}, \frac{7}{48}, \frac{1}{40}), \\
&q_{02} = \frac{1}{2} Q_2 U_2 U_1^{-1} = (\frac{1}{25}, -\frac{19}{120}, \frac{1}{60}, \frac{1}{50})
\end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.32) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}^{[1]}_{00} &= q_{00}U_1\overline{q}_{00} = (\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0)\\
\mathbf{B}^{[1]}_{10} &= 2vec(q_{00}U_1\overline{q}_{10}) = (\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{5}{3})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{01} &= 2vec(q_{00}U_1\overline{q}_{01}) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{11} &= 2vec(q_{01}U_1\overline{q}_{10} + q_{00}U_1\overline{q}_{11}) = (-\frac{601}{360}, \frac{1673}{360}, \frac{25}{48})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{20} &= q_{10}U_1\overline{q}_{10} + 2vec(q_{00}U_1\overline{q}_{20}) = (-\frac{163}{160}, \frac{1831}{1440}, -\frac{493}{192})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{02} &= q_{01}U_1\overline{q}_{01} + 2vec(q_{00}U_1\overline{q}_{02}) = (\frac{53}{360}, \frac{101}{120}, \frac{181}{80})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{30} &= 2vec(q_{10}U_1\overline{q}_{20}) = (\frac{11}{960}, -\frac{143}{360}, -\frac{11}{128})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{03} &= 2vec(q_{01}U_1\overline{q}_{02}) = (-\frac{83}{1800}, \frac{223}{900}, \frac{143}{1200})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{21} &= 2vec(q_{10}U_1\overline{q}_{11} + q_{01}U_1\overline{q}_{20}) = (\frac{349}{480}, \frac{29}{240}, -\frac{77}{64})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{12} &= 2vec(q_{01}U_1\overline{q}_{11} + q_{10}U_1\overline{q}_{02}) = (\frac{1111}{2400}, \frac{33209}{57600}, -\frac{341}{600})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{22} &= q_{11}U_1\overline{q}_{11} + 2vec(q_{02}U_1\overline{q}_{20}) = (\frac{2081}{38400}, -\frac{1631}{12800}, -\frac{27}{320})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{40} &= q_{20}U_1\overline{q}_{20} = (-\frac{9757}{307200}, \frac{5203}{921600}, \frac{77}{7680})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{04} &= q_{02}U_1\overline{q}_{02} = (\frac{373}{32000}, \frac{4831}{288000}, \frac{17}{2400})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{31} &= 2vec(q_{11}U_1\overline{q}_{20}) = (-\frac{9433}{115200}, -\frac{9631}{115200}, -\frac{29}{960})\\
\mathbf{B}^{[1]}_{13} &= 2vec(q_{11}U_1\overline{q}_{02}) = (-\frac{2719}{28800}, -\frac{31}{28800}, -\frac{1}{48})
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}^{[2]}_{00} &= q_{00}U_2\overline{q}_{00} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)\\
\mathbf{B}^{[2]}_{10} &= 2vec(q_{00}U_2\overline{q}_{10}) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3})\\
\mathbf{B}^{[2]}_{01} &= 2vec(q_{00}U_2\overline{q}_{01}) = (\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}, -\frac{4}{15})\\
\mathbf{B}^{[2]}_{11} &= 2vec(q_{01}U_2\overline{q}_{10} + q_{00}U_2\overline{q}_{11}) = (\frac{53}{180}, \frac{101}{60}, \frac{181}{40})\\
\mathbf{B}^{[2]}_{20} &= q_{10}U_2\overline{q}_{10} + 2vec(q_{00}U_2\overline{q}_{20}) = (-\frac{601}{720}, \frac{1673}{720}, \frac{25}{96})\\
\mathbf{B}^{[2]}_{02} &= q_{01}U_2\overline{q}_{01} + 2vec(q_{00}U_2\overline{q}_{02}) = (\frac{317}{360}, -\frac{1981}{1800}, \frac{3449}{2400})\\
\mathbf{B}^{[2]}_{30} &= 2vec(q_{10}U_2\overline{q}_{20}) = (\frac{349}{1440}, \frac{29}{720}, -\frac{77}{192})\\
\mathbf{B}^{[2]}_{03} &= 2vec(q_{01}U_2\overline{q}_{02}) = (\frac{133}{720}, \frac{7}{20}, -\frac{121}{480})\\
\mathbf{B}^{[2]}_{21} &= 2vec(q_{10}U_2\overline{q}_{11} + q_{01}U_2\overline{q}_{20}) = (\frac{133}{240}, \frac{21}{20}, -\frac{121}{160})
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{B}_{12}^{[2]} = 2vec(q_{01}U_2\overline{q}_{11} + q_{10}U_2\overline{q}_{02}) = (\frac{3517}{1800}, -\frac{227}{900}, \frac{581}{400})$$
$$\mathbf{B}_{22}^{[2]} = q_{11}U_2\overline{q}_{11} + 2vec(q_{02}U_2\overline{q}_{20}) = (\frac{2143}{57600}, -\frac{1759}{57600}, \frac{37}{480})$$
$$\mathbf{B}_{40}^{[2]} = q_{20}U_2\overline{q}_{20} = (-\frac{9433}{460800}, -\frac{9631}{460800}, -\frac{29}{3840})$$
$$\mathbf{B}_{04}^{[2]} = q_{02}U_2\overline{q}_{02} = (-\frac{6881}{720000}, \frac{9817}{720000}, \frac{59}{6000})$$
$$\mathbf{B}_{31}^{[2]} = 2vec(q_{11}U_2\overline{q}_{20}) = (\frac{2081}{57600}, -\frac{1631}{19200}, -\frac{9}{160})$$
$$\mathbf{B}_{13}^{[2]} = 2vec(q_{11}U_2\overline{q}_{02}) = (\frac{373}{8000}, \frac{4831}{72000}, \frac{17}{600})$$

olup, Lemma 3.2. den

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1(u,v) = (&\frac{1}{4} + \frac{3u}{2} - \frac{163u^2}{160} + \frac{11u^3}{960} - \frac{9757u^4}{307200} + 2v - \frac{601uv}{360} + \frac{349u^2v}{480} \\
&- \frac{9433u^3v}{115200} + \frac{53v^2}{360} + \frac{133uv^2}{240} + \frac{2081u^2v^2}{38400} - \frac{83v^3}{1800} + \frac{2719uv^3}{28800} + \frac{373v^4}{32000}, \\
&- \frac{3}{4} + \frac{7u}{4} + \frac{1831u^2}{1440} - \frac{143u^3}{360} + \frac{5203u^4}{921600} - \frac{v}{2} + \frac{1673uv}{360} + \frac{29u^2v}{240} \\
&- \frac{9631u^3v}{115200} + \frac{101v^2}{120} + \frac{21uv^2}{20} - \frac{1631u^2v^2}{12800} + \frac{223v^3}{900} - \frac{31uv^3}{28800} + \frac{4831v^4}{288000}, \\
&+ \frac{5u}{3} - \frac{493u^2}{192} - \frac{11u^3}{128} + \frac{77u^4}{7680} + \frac{4v}{3} + \frac{25uv}{48} - \frac{77u^2v}{7680} - \frac{29u^3v}{960} \\
&+ \frac{181v^2}{80} - \frac{121uv^2}{160} - \frac{27u^2v^2}{320} + \frac{143v^3}{1200} - \frac{uv^3}{48} + \frac{17v^4}{2400}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_2(u,v) = (&-\frac{1}{2} + 2u - \frac{601u^2}{720} + \frac{349u^3}{1440} - \frac{9433u^4}{460800} + \frac{2v}{5} + \frac{53uv}{180} + \frac{133u^2v}{240} \\
&+ \frac{2081u^3v}{57600} + \frac{707v^2}{900} - \frac{83uv^2}{600} + \frac{2719u^2v^2}{19200} - \frac{277v^3}{1500} + \frac{373uv^3}{8000} - \frac{6881v^4}{720000}, \\
&- \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{1673u^2}{720} + \frac{29u^3}{46800} - \frac{9631u^4}{460800} - \frac{9v}{5} + \frac{101uv}{60} + \frac{21u^2v}{20} \\
&- \frac{1631u^3v}{460800} - \frac{1067v^2}{900} + \frac{223uv^2}{300} - \frac{31u^2v^2}{19200} - \frac{92v^3}{1125} + \frac{4831uv^3}{72000} + \frac{9817v^4}{720000}, \\
&+ \frac{4u}{3} + \frac{25u^2}{96} - \frac{77u^3}{192} - \frac{29u^4}{3840} - \frac{4v}{15} + \frac{181uv}{40} - \frac{121u^2v}{160} - \frac{9u^3v}{160} \\
&+ \frac{961v^2}{600} + \frac{143uv^2}{400} - \frac{u^2v^2}{32} + \frac{297v^3}{1000} + \frac{17uv^3}{600} + \frac{59v^4}{6000})
\end{aligned}$$

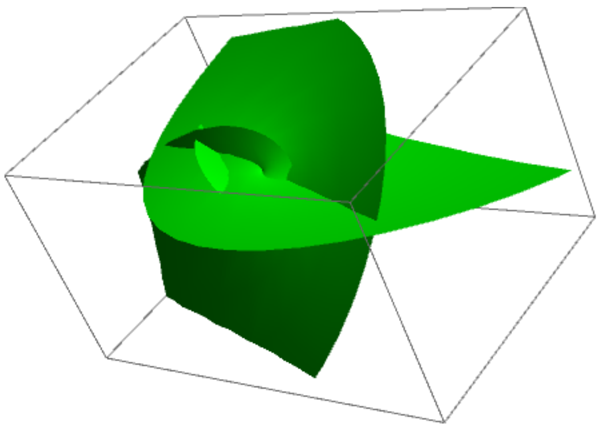
ve

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(u,v) = (&\frac{u}{4}+\frac{3u^2}{4}-\frac{163u^3}{480}+\frac{11u^4}{3840}-\frac{9757u^5}{1536000}-\frac{v}{2}+2uv-\frac{601u^2v}{720}+\frac{349u^3v}{1440}-\frac{9433u^4v}{460800}+\frac{v^2}{5}\\
&+\frac{53uv^2}{360}+\frac{133u^2v^2}{480}+\frac{2081u^3v^2}{115200}+\frac{707v^3}{2700}-\frac{83uv^3}{1800}+\frac{2719u^2v^3}{57600}-\frac{277v^4}{6000}+\frac{373uv^4}{32000}\\
&-\frac{6881v^5}{3600000},-\frac{3u}{4}+\frac{7u^2}{8}+\frac{1831u^3}{4320}-\frac{143u^4}{1440}+\frac{5203u^5}{4608000}-\frac{v}{2}-\frac{uv}{2}+\frac{1673u^2v}{720}+\frac{29u^3v}{720}\\
&-\frac{9631u^4v}{460800}-\frac{9v^2}{10}+\frac{101uv^2}{120}+\frac{21u^2v^2}{40}-\frac{1631u^3v^2}{38400}-\frac{1067v^3}{2700}+\frac{223uv^3}{900}-\frac{31u^2v^3}{57600}-\frac{23v^4}{1125}\\
&+\frac{4831uv^4}{288000}+\frac{9817v^5}{3600000},\frac{5u^2}{6}-\frac{493u^3}{576}-\frac{11u^4}{512}+\frac{77u^5}{38400}+\frac{4uv}{3}+\frac{25u^2v}{96}-\frac{77u^3v}{192}-\frac{29u^4v}{3840}\\
&-\frac{2v^2}{15}+\frac{181uv^2}{80}-\frac{121u^2v^2}{320}-\frac{9u^3v^2}{320}+\frac{961v^3}{1800}+\frac{143uv^3}{1200}-\frac{u^2v^3}{96}+\frac{297v^4}{4000}+\frac{17uv^4}{2400}+\frac{59v^5}{30000})\end{aligned}$$

yüzeyi bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v)(u,v)\| = \frac{1}{5308416000000}&(49225u^4-157520u^3v-164000u^3+204776u^2v^2+628800u^2v\\
&+4422400u^2-126016uv^3-717440uv^2-7168000uv-3456000u+31504v^4\\
&+293120v^3+3630080v^2+2304000v+1152000)^2\end{aligned}$$

olduğundan bu yüzey bir reel kuintik polinom PN yüzeydir [10]. Bkz. Şekil 3.6



Şekil 3.6. Reel Kuintik Polinom PN Yüzeyi

3.2. Çift Dereceli Reel Polinom PN Yüzeyinin Yapısı

(2.1) formunda verilen bir $q(u,v)$ reel kuaterniyon polinomundan çift dereceli bir polinom PN yüzeyi elde edebilmek için (3.1) eşitliği ile verilen φ_i ler birer lineer fonksiyon olarak

$$\varphi_i(u,v) = \alpha_i + \beta_i u + \gamma_i v, \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3,4$$

şeklinde seçilecektir. (3.18) eşitliğinden

$$\begin{aligned} U_1 &= \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} \\ &= (0, \alpha_1 + \beta_1 u + \gamma_1 v, \alpha_2 + \beta_2 u + \gamma_2 v, 0) \\ &= (0, \alpha_1, \alpha_2, 0) + (0, \beta_1, \beta_2, 0)u + (0, \gamma_1, \gamma_2, 0)v \\ &= U_{00}^{[1]} + U_{10}^{[1]} u + U_{01}^{[1]} v \end{aligned} \tag{3.34}$$

ve

$$\begin{aligned} U_2 &= \varphi_3 \mathbf{i} + \varphi_4 \mathbf{j} \\ &= (0, \alpha_3 + \beta_3 u + \gamma_3 v, \alpha_4 + \beta_4 u + \gamma_4 v, 0) \\ &= (0, \alpha_3, \alpha_4, 0) + (0, \beta_3, \beta_4, 0)u + (0, \gamma_3, \gamma_4, 0)v \\ &= U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]} u + U_{01}^{[2]} v \end{aligned} \tag{3.35}$$

olup, burada

$$\begin{aligned} &U_{00}^{[1]} = (0, \alpha_1, \alpha_2, 0), \quad U_{10}^{[1]} = (0, \beta_1, \beta_2, 0), \quad U_{01}^{[1]} = (0, \gamma_1, \gamma_2, 0) \\ &U_{00}^{[2]} = (0, \alpha_3, \alpha_4, 0), \quad U_{10}^{[2]} = (0, \beta_3, \beta_4, 0), \quad U_{01}^{[1]} = (0, \gamma_3, \gamma_4, 0) \end{aligned} \tag{3.36}$$

dir. (3.19) ve (3.20) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= qU_1\overline{q} \\ &= q(U_{00}^{[1]} + U_{10}^{[1]} u + U_{01}^{[1]} v)\overline{q} \\ \mathbf{g}_2 &= qU_2\overline{q} \\ &= q(U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[1]} u + U_{01}^{[2]} v)\overline{q} \end{aligned} \tag{3.37}$$

ifadeleri elde edilir. (3.37) eşitliğinde $\mathbf{g}_1$ve $\mathbf{g}_2$ nin kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} &= q_v U_1 \overline{q} + q U_{01}^{[1]} \overline{q} + q U_1 \overline{q}_v \\ &= q_v U_1 \overline{q} + q U_{01}^{[1]} \overline{q} - \overline{q_v U_1 \overline{q}} \\ &= vec(2 q_v U_1 \overline{q} + q U_{01}^{[1]} \overline{q})\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u} &= q_u U_2 \overline{q} + q U_{10}^{[2]} \overline{q} + q U_2 \overline{q}_u \\ &= q_u U_2 \overline{q} + q U_{10}^{[2]} \overline{q} - \overline{q_u U_2 \overline{q}} \\ &= vec(2 q_u U_2 \overline{q} + q U_{10}^{[2]} \overline{q})\end{aligned}$$

formundadır. Buradan (3.2) eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul

$$vec(2 q_v U_1 \overline{q} + q U_{01}^{[1]} \overline{q}) - vec(2 q_u U_2 \overline{q} + q U_{10}^{[2]} \overline{q}) = 0$$

olup,

$$vec((2 q_v U_1 + q U_{01}^{[1]} - 2 q_u U_2 - q U_{10}^{[2]}) \overline{q}) = 0 \tag{3.38}$$

dir. (3.38) eşitliği doğrudur gerek ve yeter şart

$$2 q_v U_1 + q U_{01}^{[1]} - 2 q_u U_2 - q U_{10}^{[1]} = \psi q \tag{3.39}$$

dir. Burada $\psi = \psi_0$ bir skalar fonksiyondur. (3.39) eşitliğinin sol tarafı u, v değişkenlerine bağlı n dereceli bir reel kuaterniyon polinomu olduğundan, ψ yi ψ_0 sabit olarak seçebiliriz. O zaman, (3.39) eşitliğinde $4\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix}$ kombinasyonlu kuaterniyon katsayıları ve U_i nin 12 katsayısı arasında lineer olmayan bağıntılar vardır [10].

3.2.1. Reel Kuartik Polinom PN Yüzeyi

(2.1) eşitliğinde $n = 1$ alındığında

$$q(u,v) = q_{00} + q_{10}u + q_{01}v$$

dir. $q_v = q_{01},\ \ q_u = q_{10}$ ile (3.34) ve (3.35) eşitlikleri (3.39) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$2q_{01}(U_{00}^{[1]} + U_{10}^{[1]}u + U_{01}^{[1]}v) - 2q_{01}(U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]}u + U_{01}^{[2]}v) + q(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten aşağıdaki üç kuaterniyon denklemi elde edilir:

$$2q_{01}U_{00}^{[1]} - 2q_{10}U_{00}^{[2]} + q_{00}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0, \tag{3.40}$$

$$2q_{01}U_{10}^{[1]} - 2q_{10}U_{10}^{[2]} + q_{10}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0, \tag{3.41}$$

$$2q_{01}U_{01}^{[1]} - 2q_{10}U_{01}^{[2]} + q_{01}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0. \tag{3.42}$$

(3.41) eşitliğinden

$$2q_{01}U_{10}^{[1]} - 2q_{10}U_{10}^{[2]} + q_{10}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

olup buradan

$$\begin{aligned} 2q_{01}U_{10}^{[1]} 2q_{10}U_{10}^{[2]} &- q_{10}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} + \psi_0) \\ &= q_{10}(3U_{10}^{[2]} - U_{01}^{[1]} + \psi_0) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafı soldan $\dfrac{1}{2}q_{01}^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} U_{10}^{[1]} &= -\frac{1}{2}q_{01}^{-1}q_{10}(U_{01}^{[1]} - 3U_{10}^{[2]} - \psi_0) \\ &= -\frac{1}{2}C(U_{01}^{[1]} - 3U_{10}^{[2]} - \psi_0) \end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.42) eşitliğinden

$$2q_{01}U_{01}^{[1]} - 2q_{10}U_{01}^{[2]} + q_{01}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

olup, bu durumda

$$\begin{aligned} 2q_{10}U_{01}^{[2]} &= 2q_{01}U_{01}^{[1]} + q_{01}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \\ &= q_{01}(3U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafı soldan $\frac{1}{2}q_{10}^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} U_{01}^{[2]} &= \frac{1}{2}q_{10}^{-1}q_{01}(3U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \\ &= \frac{1}{2}C^{-1}(3U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir. Burada $C = (c_0, c_1, c_2, c_3) = q_{01}^{-1}q_{10}$ dir. (3.36) eşitliğinin (3.43) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} (0, \beta_1, \beta_2, 0) &= -\frac{1}{2}(c_0, c_1, c_2, c_3)(-\psi_0, \gamma_1 - 3\beta_3, \gamma_2 - 3\beta_4, 0) \\ &= -\frac{1}{2}(-c_0\psi_0 - c_1\gamma_1 + 3c_1\beta_3 - c_2\gamma_2 + 3c_2\beta_4, -c_1\psi_0 + c_0\gamma_1 - 3c_0\beta_3 - c_3\gamma_2 + 3c_3\beta_4, \\ &\quad - c_2\psi_0 + c_3\gamma_1 - 3c_3\beta_3 + c_0\gamma_2 - 3c_0\beta_4, -c_3\psi_0 - c_2\gamma_1 + 3c_2\beta_3 + c_3\gamma_2 - 3c_3\beta_4) \end{aligned} \tag{3.45}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.35) eşitliğinin (3.44) te yerine yazılmasıyla da

$$\begin{aligned} (0, \gamma_3, \gamma_4, 0) =& \frac{1}{2}\frac{(c_0, c_1, c_2, c_3)}{\|C\|}(\psi_0, 3\gamma_1 - \beta_3, 3\gamma_2 - \beta_4, 0) \\ =& \frac{1}{2\,\|C\|}(-c_0\psi_0 + 3c_1\gamma_1 - c_1\beta_3 + 3c_2\gamma_2 - c_2\beta_4, c_1\psi_0 + 3c_0\gamma_1 - c_0\beta_3 + 3c_3\gamma_2 - c_3\beta_4, \\ & c_2\psi_0 - 3c_3\gamma_1 + c_3\beta_3 + 3c_0\gamma_2 - c_0\beta_4, c_3\psi_0 + 3c_2\gamma_1 - c_2\beta_3 - 3c_3\gamma_2 + c_3\beta_4) \end{aligned} \tag{3.46}$$

dir. (3.45) ve (3.46) eşitliklerinde bulunan 8 denklemden oluşan sistemin çözülmesiyle

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = \frac{c_1 \left\| C \right\|^2 \psi_0}{2(c_1^2+c_2^2)},\ \ \beta_2 = \frac{c_2 \left\| C \right\|^2 \psi_0}{2(c_1^2+c_2^2)},\ \ \beta_3 = \frac{(2c_0c_1+c_2+c_3)\psi_0}{4(c_1^2+c_2^2)},\\
&\beta_4 = \frac{(2c_0c_2-c_1+c_3)\psi_0}{4(c_1^2+c_2^2)}, \gamma_1 = \frac{(2c_0c_1-c_2+c_3)\psi_0}{4(c_1^2+c_2^2)},\ \ \gamma_2 = \frac{(2c_0c_2+c_2+c_3)\psi_0}{4(c_1^2+c_2^2)},\\
&\gamma_3 = \frac{c_1\psi_0}{2(c_1^2+c_2^2)},\ \ \gamma_4 = \frac{c_2\psi_0}{2(c_1^2+c_2^2)} \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $c_1^2+c_2^2 \neq 0$ dir. Ayrıca (3.40) eşitliğinde

$$2q_{01}U_{00}^{[1]} - 2q_{10}U_{00}^{[2]} + q_{00}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

olup burada

$$2q_{01}U_{00}^{[1]} = 2q_{10}U_{00}^{[2]} - q_{00}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafının soldan $\frac{1}{2}q_{01}^{-1}$ ile çarpılmasıyla

$$U_{00}^{[1]} = CU_{00}^{[2]} - \frac{1}{2}q_{01}^{-1}q_{00}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \qquad (3.48)$$

elde edilir. (3.48) eşitliğinde (3.36) nın yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
(0,\alpha_1,\alpha_2,0) &= C(0,\alpha_3,\alpha_4,0) - \frac{1}{2}q_{01}^{-1}q_{00}((0,\gamma_1,\gamma_2,0)-(0,\beta_3,\beta_4,0)-(\psi_0,0,0,0))\\
&= C(0,\alpha_3,\alpha_4,0) - \frac{1}{2}q_{01}^{-1}q_{00}(\psi_0,\gamma_1-\beta_3,\gamma_2-\beta_4,0) \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
D = (d_0,d_1,d_2,d_3) &= \frac{1}{2}q_{01}^{-1}q_{00}(\psi_0,\gamma_1-\beta_3,\gamma_2-\beta_4,0)\\
&= \frac{1}{2}q_{01}^{-1}q_{00}(-1,\frac{-c_2c_3}{2(c_1^2+c_2^2)},\frac{c_1c_3}{2(c_1^2+c_2^2)},0)
\end{aligned}$$

alınırsa (3.49) eşitliği

$$\begin{aligned}
(0,\alpha_1,\alpha_2,0) &= C(0,\alpha_3,\alpha_4,0) + \psi_0 D\\
&= C(0,\alpha_3,\alpha_4,0) + \psi_0(d_0,d_1,d_2,d_3)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = c_0\alpha_3 - c_3\alpha_4 - d_1\psi_0, \ \ \alpha_2 = c_3\alpha_3 + c_0\alpha_4 - d_2\psi_0, \\
&\alpha_3 = -\psi_0\frac{c_1d_0 + c_2d_3}{c_1^2 + c_2^2}, \ \ \alpha_4 = \psi_0\frac{c_1d_3 - c_2d_0}{c_1^2 + c_2^2}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

elde edilir. ψ_0 parametresi herhangi bir ek serbestlik derecesi getirmemektedir ve bu sabit çarpanla elde edilen $q(u,v)$ reel kuaterniyon polinomundan elde edilen $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ nin sadece büyüklüğünü etkilemektedir.

(3.36), (3.37), (3.47) ve (3.50) eşitlikleri ile birlikle Lemma 3.2. den $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ ve reel kuartik polinom PN yüzeyi bulunur [10].

Şimdi, $c_1^2 + c_2^2 = 0$ olduğu durumu ele alalım. Bu durumun gerçekleşebilmesi için $C = (c_0, 0, 0, c_3)$ olmalıdır. (3.43) denkleminde $C = (c_0, 0, 0, c_3)$ yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
&U_{10}^{[1]} = (0, \beta_1, \beta_2, 0) = -\frac{1}{2}C(U_{01}^{[1]} - 3U_{10}^{[2]} - \psi_0) \\
&= -\frac{1}{2}(c_0, 0, 0, c_3)(-\psi_0, \gamma_1 - 3\beta_3, \gamma_2 - 3\beta_4, 0) \\
&= -\frac{1}{2}(-c_0\psi_0, c_0\gamma_1 - 3c_0\beta_3 - c_3\gamma_2 + 3c_3\beta_4, \\
&-c_3\gamma_1 - 3c_3\beta_3 + c_0\gamma_2 - 3c_0\beta_4, -c_3\psi_0 + c_3\gamma_2 - 3c_3\beta_4)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir. (3.51) eşitliğinin ilk bileşeninden $\psi_0 = 0$ dir. $\psi_0 = 0$ alındığında (3.40) eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}
&2q_{01}U_{10}^{[1]} - 2q_{10}U_{10}^{[2]} + q_{10}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0 \\
&2q_{01}U_{01}^{[1]} - 2q_{10}U_{01}^{[2]} + q_{01}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0
\end{aligned}$$

dir. Burada q_{10} yerine $q_{01}C$ yazılması ile

$$\begin{aligned}
2q_{01}U_{10}^{[1]} - 2q_{01}CU_{10}^{[2]} + q_{01}C(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0 \\
2q_{01}U_{01}^{[1]} - 2q_{01}CU_{01}^{[2]} + q_{01}(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle

$$U_{10}^{[2]} = CU_{01}^{[2]} \tag{3.52}$$

ve bu sonucun (3.40) eşitliğinde kullanılmasıyla da

$$U_1 = CU_2 \tag{3.53}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$U_{00}^{[1]} = CU_{00}^{[2]}, \quad U_{10}^{[1]} = CU_{10}^{[2]}, \quad U_{01}^{[1]} = CU_{01}^{[2]}$$

dir. $c_1 = c_2 = 0$ durumu için (3.47) ve (3.50) eşitliklerine göre daha basit bir çözüm elde edilir [10]. Bulunan sonuçlar aşağıdaki Lemma'da özetlenmiştir.

Lemma 3.9. $n = 1$ için (2.1) eşitliği ile verilen bir lineer reel kuaterniyon

$$q(u, v) = q_{00} + q_{10}Cu + q_{01}v, \;\; C = (c_0, c_1, c_2, c_3)$$

olsun. U_1 ve U_2, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ durumunda (3.34), (3.35), (3.47) ve (3.50) eşitlikleri ile bulunur. $c_1 = c_2 = 0$ durumunda ise

$$\begin{aligned}
&U_2(u, v) = (0, \alpha_3, \alpha_4, 0) + C(0, \gamma_3, \gamma_4, 0)u + (0, \gamma_3, \gamma_4, 0)v,\\
&U_1(u, v) = CU_2(u, v)
\end{aligned}$$

dir. O zaman, S parametrik polinom PN yüzeyi Lemma 3.2. ile elde edilir [10].

(3.21) ifadesinde $k = 0, 1$ ve $l = 1, 2$ için

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_{00}^{[l]} = q_{00}U_{00}^{[l]}\overline{q}_{00},\\
&\mathbf{B}_{(1-k)k}^{[l]} = vec((q_{00}U_{(1-k)k}^{[l]} + 2q_{(1-k)k}U_{00}^{[l]})\overline{q}_{(1-k)k}),\\
&\mathbf{B}_{(2-2k)2k}^{[l]} = vec((q_{(1-k)k}U_{00}^{[l]} + 2q_{00}U_{(1-k)k}^{[l]})\overline{q}_{(1-k)k}),\\
&\mathbf{B}_{11}^{[l]} = 2vec(q_{01}U_{00}^{[l]}\overline{q}_{10} + q_{10}U_{01}^{[l]}\overline{q}_{00} + q_{01}U_{10}^{[l]}\overline{q}_{00}),\\
&\mathbf{B}_{(3-3k)3k}^{[l]} = q_{(1-k)k}U_{(1-k)k}^{[l]}\overline{q}_{(1-k)k},\\
&\mathbf{B}_{(2-k)(1+k)}^{[l]} = vec((q_{(1-k)k}U_{k(1-k)}^{[l]} + 2q_{k(1-k)}U_{(1-k)k}^{[l]})\overline{q}_{(1-k)k})
\end{aligned} \tag{3.54}$$

dir. Dolayısıyla, Lemma 3.2. yardımıyla reel kuartik bir polinom PN yüzeyi elde edilir [10].

Örnek 3.10. Kontrol noktalarından ikisi

$$q_{00} = (1, 0, 0, 0), \quad q_{01} = (2, 1, 3, 4)$$

olarak belirlenir ve

$$C = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4})$$

seçilirse $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ olduğundan son kontrol noktası

$$\begin{aligned} q_{10} &= q_{01}C \\ &= (-\frac{5}{3}, -\frac{5}{6}, -2, \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.47) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &\beta_1 = -\frac{19}{60}, \ \beta_2 = \frac{19}{120}, \ \beta_3 = \frac{3}{8}, \beta_4 = 0, \\ &\gamma_1 = \frac{9}{40}, \ \gamma_2 = -\frac{3}{10}, \gamma_3 = -\frac{6}{5}, \ \gamma_4 = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

ve (3.50) eşitliğinden ise

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{61}{750}, \ \alpha_2 = -\frac{153}{2000} \\ &\alpha_3 = -\frac{199}{1000}, \ \alpha_4 = -\frac{93}{1000} \end{aligned}$$

sabitleri bulunur. Bulunan sabitlerin (3.34) ve (3.35) te yerine konulmasıyla

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{00}^{[1]} + U_{10}^{[1]}u + U_{01}^{[1]}v \\ &= (0, \frac{61}{750}, -\frac{153}{2000}, 0) + (0, -\frac{19}{60}, \frac{19}{120}, 0)u + (0, \frac{9}{40}, -\frac{3}{10}, 0)v \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} U_2 &= U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]}u + U_{01}^{[2]}v \\ &= (0, -\frac{199}{1000}, -\frac{93}{1000}, 0) + (0, \frac{3}{8}, 0, 0)u + (0, -\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 0)v \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (3.54) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}_{00}^{[1]} = q_{00}U_{00}^{[1]}\overline{q}_{00} = (\frac{61}{750}, -\frac{153}{2000}, 0) \\ &\mathbf{B}_{10}^{[1]} = vec((q_{00}U_{10}^{[1]} + 2q_{10}U_{00}^{[1]})\overline{q}_{00}) = (-\frac{1093}{2250}, \frac{587}{1125}, \frac{2717}{6000}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{01}^{[1]} = vec((q_{00}U_{01}^{[1]} + 2q_{01}U_{00}^{[1]})\overline{q}_{00}) = (\frac{3487}{3000}, \frac{67}{1500}, -\frac{641}{2000})$$

$$\mathbf{B}_{11}^{[1]} = 2vec(q_{01}U_{00}^{[1]}\overline{q}_{10} + q_{10}U_{01}^{[1]}\overline{q}_{00} + q_{01}U_{10}^{[1]}\overline{q}_{00}) = (\frac{833}{3600}, \frac{8261}{18000}, \frac{6983}{3000})$$

$$\mathbf{B}_{20}^{[1]} = vec((q_{10}U_{00}^{[1]} + 2q_{00}U_{10}^{[1]})\overline{q}_{10}) = (-\frac{6461}{9000}, \frac{8971}{18000}, \frac{2717}{12000})$$

$$\mathbf{B}_{02}^{[1]} = vec((q_{01}U_{00}^{[1]} + 2q_{00}U_{01}^{[1]})\overline{q}_{01}) = (\frac{689}{750}, -\frac{1283}{3000}, -\frac{641}{2000})$$

$$\mathbf{B}_{30}^{[1]} = q_{10}U_{10}^{[1]}\overline{q}_{10}) = (\frac{19}{16}, \frac{779}{1440}, \frac{893}{360})$$

$$\mathbf{B}_{03}^{[1]} = q_{01}U_{01}^{[1]}\overline{q}_{01}) = (-\frac{3}{2}, \frac{123}{20}, -\frac{93}{10})$$

$$\mathbf{B}_{21}^{[1]} = vec((q_{10}U_{01}^{[1]} + 2q_{01}U_{10}^{[1]})\overline{q}_{10}) = (-\frac{35}{32}, \frac{5}{4}, -\frac{35}{4})$$

$$\mathbf{B}_{12}^{[1]} = vec((q_{01}U_{10}^{[1]} + 2q_{10}U_{01}^{[1]})\overline{q}_{01}) = (\frac{31}{8}, -\frac{213}{40}, \frac{283}{20})$$

ve

$$\mathbf{B}_{00}^{[2]} = q_{00}U_{00}^{[2]}\overline{q}_{00} = (-\frac{199}{1000}, -\frac{93}{1000}, 0)$$

$$\mathbf{B}_{10}^{[2]} = vec((q_{00}U_{10}^{[2]} + 2q_{10}U_{00}^{[2]})\overline{q}_{00}) = (\frac{3487}{3000}, \frac{67}{1500}, -\frac{641}{1000})$$

$$\mathbf{B}_{01}^{[2]} = vec((q_{00}U_{01}^{[2]} + 2q_{01}U_{00}^{[2]})\overline{q}_{00}) = (-\frac{313}{250}, -\frac{341}{250}, \frac{126}{125})$$

$$\mathbf{B}_{11}^{[2]} = 2vec(q_{01}U_{00}^{[2]}\overline{q}_{10} + q_{10}U_{01}^{[2]}\overline{q}_{00} + q_{01}U_{10}^{[2]}\overline{q}_{00}) = (\frac{1463}{300}, \frac{4043}{750}, -\frac{3313}{375})$$

$$\mathbf{B}_{20}^{[2]} = vec((q_{10}U_{00}^{[2]} + 2q_{00}U_{10}^{[2]})\overline{q}_{10}) = (\frac{3059}{3000}, \frac{863}{3000}, \frac{641}{2000})$$

$$\mathbf{B}_{02}^{[2]} = vec((q_{01}U_{00}^{[2]} + 2q_{00}U_{01}^{[2]})\overline{q}_{01}) = (-\frac{1213}{500}, \frac{109}{500}, \frac{63}{125})$$

$$\mathbf{B}_{30}^{[2]} = q_{10}U_{10}^{[2]}\overline{q}_{10}) = (-\frac{35}{96}, \frac{5}{12}, -\frac{35}{12})$$

$$\mathbf{B}_{03}^{[2]} = (q_{01}U_{01}^{[2]}\overline{q}_{01}) = (18, -\frac{144}{5}, \frac{108}{5})$$

$$\mathbf{B}_{21}^{[2]} = vec((q_{10}U_{01}^{[2]} + 2q_{01}U_{10}^{[2]})\overline{q}_{10}) = (\frac{31}{8}, -\frac{213}{40}, \frac{283}{20})$$

$$\mathbf{B}_{12}^{[2]} = vec((q_{01}U_{10}^{[2]} + 2q_{10}U_{01}^{[2]})\overline{q}_{01}) = (-\frac{9}{2}, \frac{369}{20}, -\frac{279}{10})$$

bulunur. Lemma 3.2. den

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1(u,v) = (&\frac{61}{750} - \frac{1093u}{2250} + \frac{919u^2}{2700} + \frac{19u^3}{16} + \frac{3487v}{3000} - \frac{11327uv}{3600} - \frac{35u^2v}{32} + \frac{14633v^2}{600} + \frac{31uv^2}{8} - \frac{3v^3}{2}, \\
&- \frac{153}{2000} + \frac{587u}{1125} - \frac{278857u^2}{216000} + \frac{779u^3}{1440} + \frac{67v}{1500} - \frac{8839uv}{18000} + \frac{5u^2v}{4} + \frac{4043v^2}{1500} - \frac{213uv^2}{40} + \frac{123v^3}{20}, \\
&+ \frac{2717u}{6000} - \frac{117269u^2}{54000} + \frac{893u^3}{360} - \frac{641v}{1000} + \frac{27337uv}{4500} - \frac{35u^2v}{4} - \frac{3313v^2}{750} + \frac{283uv^2}{20} - \frac{93v^3}{10}),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_2(u,v) = (&-\frac{199}{1000}+\frac{3487u}{3000}-\frac{11327u^2}{7200}-\frac{35u^3}{96}-\frac{313v}{250}+\frac{1463uv}{300}+\frac{31u^2v}{8}-\frac{469v^2}{100}-\frac{9uv^2}{2}+18v^3,\\
&-\frac{93}{1000}+\frac{77u}{1500}-\frac{8839u^2}{36000}+\frac{5u^3}{12}-\frac{341v}{250}+\frac{4043uv}{750}-\frac{213u^2v}{40}-\frac{5603v^2}{500}+\frac{369uv^2}{20}-\frac{144v^3}{5},\\
&-\frac{641u}{1000}+\frac{27337u^2}{9000}-\frac{35u^3}{12}+\frac{126v}{125}-\frac{3313uv}{375}+\frac{283u^2v}{20}+\frac{824v^2}{125}-\frac{279uv^2}{10}+\frac{108v^3}{5})
\end{aligned}
$$

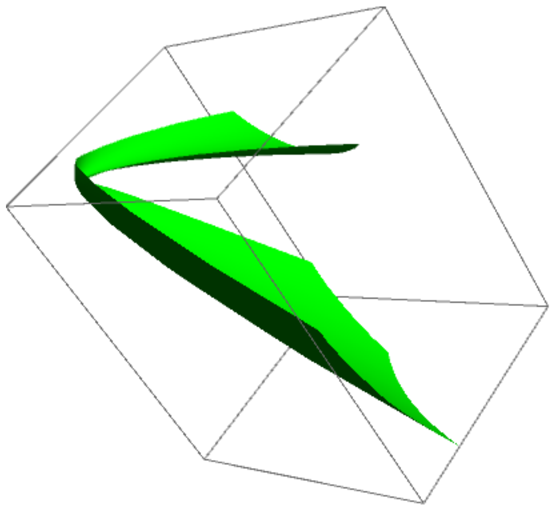
ve

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}(u,v) = (&\frac{61u}{750}-\frac{1093u^2}{4500}+\frac{919u^3}{8100}+\frac{19u^4}{64}-\frac{199v}{1000}+\frac{3487uv}{3000}-\frac{11327u^2v}{7200}-\frac{35u^3v}{96}-\frac{313v^2}{500}\\
&+\frac{1463uv^2}{600}+\frac{31u^2v^2}{16}-\frac{469v^3}{300}-\frac{3uv^3}{2}+\frac{9v^4}{2},-\frac{153u}{2000}+\frac{587u^2}{2250}-\frac{278857u^3}{648000}+\frac{779u^4}{5760}\\
&-\frac{93v}{1000}+\frac{67uv}{1500}-\frac{8839u^2v}{36000}+\frac{5u^3v}{12}-\frac{341v^2}{500}+\frac{4043uv^2}{1500}-\frac{213u^2v^2}{80}-\frac{5603v^3}{1500}+\frac{123uv^3}{20}\\
&-\frac{36v^4}{5},\frac{2717u^2}{12000}-\frac{117269u^3}{162000}+\frac{893u^4}{1440}-\frac{641uv}{1000}+\frac{27337u^2v}{9000}-\frac{35u^3v}{12}+\frac{63v^2}{125}\\
&-\frac{3313uv^2}{750}+\frac{283u^2v^2}{40}+\frac{824v^3}{375}-\frac{93uv^3}{10}+\frac{27v^4}{5})
\end{aligned}
$$

yüzeyi bulunur. Dolayısıyla

$$
\|(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v)(u,v)\| = \frac{\left|14250u^2-5u(5400v+4303)+54000v^2+29670v+5469\right|\left(95u^2-20u(9v+2)+12\left(30v^2+4v+1\right)\right)^2}{34560000}
$$

olduğundan bu yüzey bir reel kuartik polinom PN yüzeydir [10]. Bkz. Şekil 3.7.



Şekil 3.7. Reel Kuartik Polinom PN Yüzeyi

3.2.1.1. Özel Çift Dereceli Reel Polinom PN Yüzeyler

(2.1) eşitliği ile verilen n. dereceden q reel kuaterniyonunun q_{ij} katsayıları arasında bazı bağıntılar vardır.
$n = 1$ durumu için $\psi_0 = 0$ ve $C = (c_0, 0, 0, c_3) \neq 0$ reel kuaterniyonu için (3.34) ve (3.35) eşitliklerini sağlayan U_1 ve U_2 lineer kuaterniyon polinomlarını ele alalım. Bu durumda (3.39) eşitliğinde $\psi_0 = 0$ ve $q_{10} = q_{01}C$ eşitliklerinin yerine yazılmasıyla

$$2q_{01}CU_2 - 2q_{01}CU_2 + q(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0$$

olup, buradan

$$q(U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0$$

dir. Dolayısıyla

$$(U_1)_v = (U_2)_u$$

elde edilir [10].

Teorem 3.11. (2.1) eşitliği ile verilen reel kuaterniyon polinomundaki katsayılar sıfırdan farklı $C = (c_0, 0, 0, c_3)$ reel kuaterniyonu için

$$(j+1)q_{i(j+1)}C = (i+1)q_{(i+1)j}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, j = 0, 1, \cdots, n-i-1$$

ve

$$U_2(u, v) = (0, \alpha_3, \alpha_4, 0) + C(0, \gamma_3, \gamma_4, 0)u + (0, \gamma_3, \gamma_4, 0)v$$
$$U_1(u, v) = CU_2(u, v)$$

eşitliklerini sağlasın. Bu durumda, (3.37) eşitliği ve Lemma 3.2. ile tanımlanan parametrik S yüzeyi birim normali $\mathbf{N} = e_3$ olan $2n + 2$ dereceli bir polinom PN yüzeyidir [10].

3.3. Reel Polinom PN Yüzeyinin Ortalama Eğriliği

(3.18), (3.34) ve (3.35) eşitlikleri ile tanımlanan U_1 ve U_2 vektörlerini ele alalım. (3.1) eşitliğinden türetilen bir reel polinom PN yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_u \rangle \\ &= \langle qU_1\overline{q}, qU_1\overline{q} \rangle \\ &= \|q\|^4 \langle U_1, U_1 \rangle \\ &= \|q\|^4 \|U_1\|^2 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v \rangle \\ &= \langle qU_1\overline{q}, qU_2\overline{q} \rangle \\ &= \|q\|^4 \langle U_1, U_2 \rangle ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \langle \mathbf{S}_v, \mathbf{S}_v \rangle \\ &= \langle qU_2\overline{q}, qU_2\overline{q} \rangle \\ &= \|q\|^4 \langle U_2, U_2 \rangle \\ &= \|q\|^4 \|U_2\|^2\end{aligned}$$

ve ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= \langle \mathbf{S}_{uu}, \mathbf{N} \rangle \\ &= \langle vec[(2q_uU_1 + q(U_1)_u)\overline{q}], \mathbf{N} \rangle ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \langle \mathbf{S}_{uv}, \mathbf{N} \rangle \\ &= \langle vec[(2q_vU_1 + q(U_1)_v)\overline{q}], \mathbf{N} \rangle \\ &= \langle \mathbf{S}_{vu}, \mathbf{N} \rangle \\ &= \langle vec[(2q_uU_2 + q(U_2)_u)\overline{q}], \mathbf{N} \rangle ,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \langle \mathbf{S}_{vv}, \mathbf{N} \rangle \\
&= \langle vec[(2q_v U_2 + q(U_2)_v)\overline{q}], \mathbf{N} \rangle ,
\end{aligned}
$$

dir. Burada $\mathbf{N}$ reel polinom PN yüzeyinin birim normalidir. Bir sonraki Lemma, Teorem 3.3. ve Teorem 3.4. sağlayan bir polinom PN yüzeyi için ortalama eğrilik fonksiyonunu ifade eder [10].

Lemma 3.12. Tek dereceli reel polinom PN yüzeyi için Teorem 3.3. ve çift dereceli reel polinom PN yüzeyi için Teorem 3.4. sağlansın. O zaman, bu polinom PN yüzeyin ortalama eğriliği özdeş olarak sıfırdır [10].

İspat. Ortalama eğrilik özdeş olarak sıfırdır gerek ve yeter koşul $\mathbf{En} + \mathbf{Gl} - 2\mathbf{Fm} = 0$ dir.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{En} &= \|q\|^4 \|U_1\|^2 \langle vec[(2q_v U_2 + q(U_2)_v)\overline{q}], \mathbf{N} \rangle \\
&= \|q\|^4 \|U_1\|^2 \left\langle vec[(2q_v U_1 U_1^{-1} U_2 + q(U_2)_v)\overline{q}], \mathbf{N} \right\rangle \\
&= \|q\|^4 \|U_1\|^2 \left\langle vec[(2q_v U_1 \frac{\overline{U_1}}{\|U_1\|^2} U_2 + q(U_2)_v)\overline{q}], \mathbf{N} \right\rangle \\
&= 2\|q\|^4 \left\langle vec(q_v U_1 \overline{U_1} U_2 \overline{q}), \mathbf{N} \right\rangle + \|q\|^4 \|U_1\|^2 \langle vec(q(U_2)_v \overline{q}) \rangle ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Gl} &= \|q\|^4 \|U_2\|^2 \langle vec[(2q_u U_1 + q(U_1)_u)\overline{q}], \mathbf{N} \rangle \\
&= \|q\|^4 \|U_2\|^2 \left\langle vec[(2q_u U_2 U_2^{-1} U_1 + q(U_1)_u)\overline{q}], \mathbf{N} \right\rangle \\
&= \|q\|^4 \|U_2\|^2 \left\langle vec[(2q_u U_2 \frac{\overline{U_2}}{\|U_2\|^2} U_1 + q(U_1)_u)\overline{q}], \mathbf{N} \right\rangle \\
&= 2\|q\|^4 \left\langle vec(q_u U_2 \overline{U_2} U_1 \overline{q}), \mathbf{N} \right\rangle + \|q\|^4 \|U_2\|^2 \langle vec(q(U_1)_u \overline{q}) \rangle \\
&= 2\|q\|^4 \left\langle vec(q_v U_1 \overline{U_2} U_1 \overline{q}), \mathbf{N} \right\rangle + \|q\|^4 \|U_2\|^2 \langle vec(q(U_1)_u \overline{q}) \rangle
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
-2\mathbf{Fm} &= -2\|q\|^4 \langle U_1, U_2 \rangle \langle vec[(2q_v U_1 + q(U_1)_v)\overline{q}], \mathbf{N} \rangle \\
&= -4\|q\|^4 \langle U_1, U_2 \rangle \langle vec(q_v U_1 \overline{q}), \mathbf{N} \rangle - 2\|q\|^4 \langle U_1, U_2 \rangle \langle vec(q(U_1)_v \overline{q}), \mathbf{N} \rangle
\end{aligned}
$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathbf{En}+\mathbf{Gl}-2\mathbf{Fm} &= 2\left\|q\right\|^4\left\langle vec[q_vU_1(\overline{U_1}U_2+\overline{U_2}U_1-2\left\langle U_1,U_2\right\rangle)\overline{q}],\mathbf{N}\right\rangle \\ &\quad+\left\|q\right\|^4\left\langle vec[q(\left\|U_1\right\|^2(U_2)_v+\left\|U_2\right\|^2(U_1)_u-2\left\langle U_1,U_2\right\rangle(U_1)_v)\overline{q}],\mathbf{N}\right\rangle\end{aligned}$$

dir. Bu eşitliğin sıfır olduğunu göstermek için eşitliğin sağındaki iki terimin ayrı ayrı sıfır olduğu gösterilmelidir. İlk terim için,

$$\begin{aligned}\overline{U_1}U_2+\overline{U_2}U_1-2\left\langle U_1,U_2\right\rangle &= U_1U_2+U_2U_1-2\left\langle U_1,U_2\right\rangle \\ &= \left\langle U_1,U_2\right\rangle+U_1\times U_2+\left\langle U_1,U_2\right\rangle+U_2\times U_1-2\left\langle U_1,U_2\right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

dir. Diğer terim ise tek dereceli yüzeylerde U_1 ve U_2 sabit kuaterniyon olduğunda sıfırdır. Çift dereceli yüzeyler de ise $U_1=CU_2$ ve $(U_1)_v=(U_2)_u$ eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\left\|U_1\right\|^2(U_2)_v+\left\|U_2\right\|^2(U_1)_u-2\left\langle U_1,U_2\right\rangle(U_1)_v &= \left\|U_1\right\|^2C^{-1}(U_2)_u+\left\|U_2\right\|^2C(U_2)_u-2\left\langle U_1,U_2\right\rangle \\ &= \left[\left\|C\right\|^2\left\|U_2\right\|^2\frac{\overline{C}}{\left\|C\right\|^2}+\left\|U_2\right\|^2C-2\left\langle U_1,U_2\right\rangle\right](U_2)_u \\ &= \left[\left\|U_2\right\|^2(\overline{C}+C)-2\left\langle U_1,U_2\right\rangle\right](U_2)_u \qquad (3.55)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\overline{C}+C &= \overline{U_1U_2^{-1}}+U_1U_2^{-1} \\ &= \overline{\left(U_1\frac{\overline{U_2}}{\left\|U_2\right\|^2}\right)}+\left(U_1\frac{\overline{U_2}}{\left\|U_2\right\|^2}\right) \\ &= \frac{U_1\overline{U_2}+U_2\overline{U_1}}{\left\|U_2\right\|^2}\end{aligned}$$

dir. (3.55) da yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}\|U_1\|^2(U_2)_v+\|U_2\|^2(U_1)_u-2\langle U_1,U_2\rangle(U_1)_v &= \left(\|U_2\|^2(\overline{C}+C)-2\langle U_1,U_2\rangle\right)(U_2)_u\\ &= \left(\|U_2\|^2\left(\frac{U_1\overline{U_2}+U_2\overline{U_1}}{\|U_2\|^2}\right)-2\langle U_1,U_2\rangle\right)(U_2)_u\\ &= \left(U_1\overline{U_2}+U_2\overline{U_1}\right)(U_2)_u\\ &= \left(\langle U_1,U_2\rangle+U_1\times U_2+\langle U_1,U_2\rangle+U_2\times U_1-2\langle U_1,U_2\rangle\right)(U_2)_u\\ &= \left(\langle U_1,U_2\rangle+U_1\times U_2+\langle U_1,U_2\rangle+U_2\times U_1-2\langle U_1,U_2\rangle\right)(U_2)_u\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, çift dereceli polinom PN yüzeyleri için de ispat tamamlanır [10].

Örnek 3.13. Kontrol noktalarından ikisi

$$q_{00}=(1,0,0,0),\quad q_{01}=(2,1,3,4)$$

ve

$$C=(-\frac{1}{4},0,0,\frac{1}{4})$$

seçilirse, $c_1=c_2=0$ olduğundan son kontrol noktası

$$\begin{aligned}q_{10}&=q_{01}C\\ &=(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2})\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (3.52) eşitliğinden

$$\begin{aligned}U_{10}^{[2]}&=CU_{01}^{[2]}\\ &=(0,-\frac{7}{48},-\frac{1}{48},0)\end{aligned}$$

olup (3.35) eşitliğinde yerine yazılması ile

$$\begin{aligned}U_2&=U_{00}^{[2]}+U_{10}^{[2]}u+U_{01}^{[2]}v\\ &=(0,-\frac{7u}{48}+\frac{v}{4}+\frac{1}{2},-\frac{u}{48}+\frac{v}{3}-\frac{1}{3},0)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.53) eşitliğinden de

$$
\begin{aligned}
U_1 &= CU_2 \\
&= (0, \frac{u}{24} - \frac{7v}{48} - \frac{1}{24}, -\frac{u}{32} - \frac{v}{48} + \frac{5}{24}, 0)
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.37) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= qU_1\overline{q} \\
&= (0, \frac{25u^3}{192} - \frac{25u^2v}{64} - \frac{35u^2}{48} - \frac{25uv^2}{16} + \frac{15uv}{4} + \frac{3u}{8} + \frac{25v^3}{8} - \frac{5v^2}{3} - \frac{95v}{48} - \frac{1}{24}, \\
&- \frac{25u^3}{384} - \frac{25u^2v}{64} + \frac{29u^2}{48} + \frac{25uv^2}{8} - \frac{11uv}{12} - \frac{59u}{96} - \frac{25v^3}{8} - 3v^2 + \frac{23v}{48} + \frac{5}{24}, \\
&- \frac{25u^3}{192} + \frac{25u^2v}{16} + \frac{3u^2}{32} - \frac{25uv^2}{8} - \frac{91uv}{24} + \frac{u}{8} + \frac{41v^2}{6} + \frac{2v}{3})
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_2 &= qU_2\overline{q} \\
&= (0, -\frac{25u^3}{192} - \frac{25u^2v}{16} + \frac{15u^2}{8} + \frac{75uv^2}{8} - \frac{10uv}{3} - \frac{95u}{48} - \frac{25v^3}{3} - \frac{25v^2}{3} + \frac{59v}{12} + \frac{1}{2}, \\
&- \frac{25u^3}{192} + \frac{25u^2v}{8} - \frac{11u^2}{24} - \frac{75uv^2}{8} - 6uv + \frac{23u}{48} + \frac{25v^3}{6} + \frac{47v^2}{3} + 3v - \frac{1}{3}, \\
&+ \frac{25u^3}{48} - \frac{25u^2v}{8} - \frac{91u^2}{48} + \frac{41uv}{3} + \frac{2u}{3} + \frac{25v^3}{3} - \frac{73v^2}{6} - \frac{11v}{3})
\end{aligned}
$$

dir. Lemma 3.1. den

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}(u,v) = (&\frac{25u^4}{768} - \frac{25u^3v}{192} - \frac{35u^3}{144} - \frac{25u^2v^2}{32} + \frac{15u^2v}{8} + \frac{3u^2}{16} + \frac{25uv^3}{8} - \frac{5uv^2}{3} - \frac{95uv}{48} - \frac{u}{24} - \frac{25v^4}{12} - \frac{25v^3}{9} + \frac{59v^2}{24} + \frac{v}{2}, \\
&- \frac{25u^4}{1536} - \frac{25u^3v}{192} + \frac{29u^3}{144} + \frac{25u^2v^2}{16} - \frac{11u^2v}{24} - \frac{59u^2}{192} - \frac{25uv^3}{8} - 3uv^2 + \frac{23uv}{48} + \frac{5u}{24} + \frac{25v^4}{24} + \frac{47v^3}{9} + \frac{3v^2}{2} - \frac{v}{3}, \\
&- \frac{25u^4}{768} + \frac{25u^3v}{48} + \frac{u^3}{32} - \frac{25u^2v^2}{16} - \frac{91u^2v}{48} + \frac{u^2}{16} + \frac{41uv^2}{6} + \frac{2uv}{3} + \frac{25v^4}{12} - \frac{73v^3}{18} - \frac{11v^2}{6})
\end{aligned}
$$

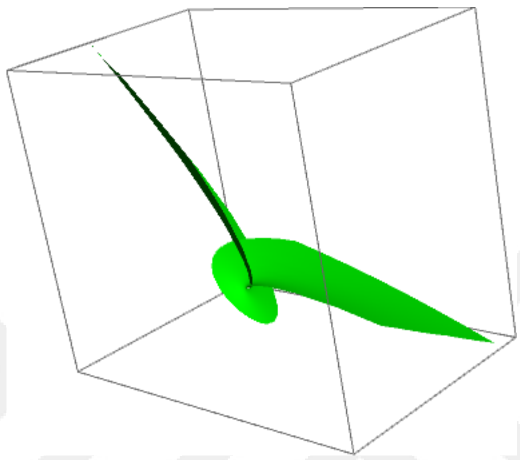
yüzeyi bulunur. Bkz. Şekil 3.8. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{\left(-60uv + 3u(5u-4) + 120v^2 + 16v + 4\right)^2 \left(25u^2 - 4u(25v+38) + 8v(25v+4) + 416\right)}{147456}, \\
\mathbf{F} &= -\frac{\left(-60uv + 3u(5u-4) + 120v^2 + 16v + 4\right)^2 \left(25u^2 - 4u(25v+38) + 8v(25v+4) + 416\right)}{73728}, \\
\mathbf{G} &= \frac{\left(-60uv + 3u(5u-4) + 120v^2 + 16v + 4\right)^2 \left(25u^2 - 4u(25v+38) + 8v(25v+4) + 416\right)}{18432}
\end{aligned}
$$

ve yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
\mathbf{l} &= \frac{1}{96}(-5u + 30v - 12), \\
\mathbf{m} &= \frac{5u}{16} - \frac{5v}{6} - \frac{2}{3}, \\
\mathbf{n} &= \frac{1}{6}(-5u + 5v + 22)
\end{aligned}$$

dir. Burada



Şekil 3.8. Özel Reel Kuartik Polinom PN Yüzeyi

$$\mathbf{En} + \mathbf{Gl} - 2\mathbf{Fm} = 0$$

olduğundan yüzey minimal yüzeydir. Ayrıca

$$\|(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v)(u,v)\| = \frac{\left(-60uv + 3u(5u-4) + 120v^2 + 16v + 4\right)^2 \left|25u^2 - 4u(25v+38) + 8v(25v+4) + 416\right|}{73728}$$

olduğundan bu yüzey özel reel kuartik polinom PN yüzeyidir [10].

4. Polinom Pisagor Normal Yüzeylere Split Kuaterniyon Yaklaşımı

Bu bölümde, birim normal vektör alanı spacelike veya timelike olan yani timelike veya spacelike kübik, kuintik ve kuartik polinom PN yüzeyleri incelenecektir.

4.1. Timelike Polinom PN Yüzeyi

(2.3) formunda verilen bir $q(u,v)$ split kuaterniyon polinomu yardımıyla birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_3$$

olan $\mathbf{S} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_1$ split polinom parametrik yüzeyi elde edilecektir. Burada $\mathbf{e}_3$, (2.4) eşitliğindeki gibi tanımlı ve $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbf{S}$ yüzeyinin uyarlanmış çatısıdır. $\mathbf{S}$ yüzeyinin teğet düzlemi her (u,v) parametresi için $\mathbf{h}_1(u,v)$ ve $\mathbf{h}_2(u,v)$ vektörleri tarafından gerilir. Bundan ötürü, $\mathbf{S}_u$ ve $\mathbf{S}_v$,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u &= \varphi_1\mathbf{h}_1 + \varphi_2\mathbf{h}_2 = \mathbf{g}_1, \\ \mathbf{S}_v &= \varphi_3\mathbf{h}_1 + \varphi_4\mathbf{h}_2 = \mathbf{g}_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

formunda yazılabilir. Burada φ_i $(1 \leq i \leq 4)$, iki değişkenli polinom ya da rasyonel fonksiyon, $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ iki değişkenli polinomlardır. $\mathbf{S}$ nin bir yüzey belirtmesi için

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u} \tag{4.2}$$

olmalıdır. Eğer $\mathbf{S}$ bir yüzey ise

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = g\left(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_u\right) &= g(\varphi_1\mathbf{h}_1 + \varphi_2\mathbf{h}_2, \varphi_1\mathbf{h}_1 + \varphi_2\mathbf{h}_2) \\ &= \varphi_1^2 g(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1) + 2\varphi_1\varphi_2 g(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) + \varphi_2^2 g(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_2) \\ &= (-\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\left\|q\right\|_*^4 \end{aligned}$$

olup, burada $-\varphi_1^2+\varphi_2^2 \neq 0$ dir.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} = g\left(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v\right) &= g(\varphi_1\mathbf{h}_1 + \varphi_2\mathbf{h}_2, \varphi_3\mathbf{h}_1 + \varphi_4\mathbf{h}_2) \\
&= \varphi_1\varphi_3 g(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1) + (\varphi_1\varphi_4 + \varphi_2\varphi_3) g(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) + \varphi_2\varphi_4 g(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_2) \\
&= (-\varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_4) \|q\|_*^4
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G} = g\left(\mathbf{S}_v, \mathbf{S}_v\right) &= g(\varphi_3\mathbf{h}_1 + \varphi_4\mathbf{h}_2, \varphi_3\mathbf{h}_1 + \varphi_4\mathbf{h}_2) \\
&= \varphi_3^2 g(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1) + 2\varphi_3\varphi_4 g(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) + \varphi_4^2 g(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_2) \\
&= -\varphi_3^2 \|q\|_*^4 + \varphi_4^2 \|q\|_*^4 \\
&= \left(-{\varphi_3}^2 + {\varphi_4}^2\right) \|q\|_*^4
\end{aligned}
$$

olup, burada $-\varphi_3^2+\varphi_4^2 \neq 0$ dir.

$$
g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1}) = \mathbf{F}^2 - \mathbf{EG} = (\varphi_1\varphi_4 - \varphi_2\varphi_3)^2 \|q\|_*^8
$$

olduğundan bu yüzey timelikedır.

Lemma 4.1. g_1 ve g_2 (4.2) eşitliğini sağlayan iki polinom fonksiyonu olsun. O zaman, $\mathrm{S}_u = \mathrm{g}_1$ ve $\mathrm{S}_v = \mathrm{g}_2$ olacak şekilde bir S yüzeyi vardır ve

$$
\mathbf{S}(u,v) = \frac{1}{2}\int_0^u (\mathbf{g}_1(u,v) + \mathbf{g}_1(u,0))du + \frac{1}{2}\int_0^v (\mathbf{g}_2(u,v) + \mathbf{g}_2(0,v))dv + \mathbf{S}(0,0) \tag{4.3}
$$

formundadır.

İspat. (4.1) eşitliklerinden ilki olan $\mathbf{S}_u = \mathbf{g}_1$ eşitliğinin her iki tarafının u ya göre integrali alındığında

$$
\mathbf{S}(u,v) = \int_0^u \mathbf{g}_1(u,v)du + C(v)
$$

elde edilir. Burada C, v ye bağlı tek değişkenli bir fonksiyondur. Bu eşitliğin v ye göre türevi alınıp, (4.2) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_v(u,v) &= \int_0^u \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v}(u,v)du + C^{'}(v)\\ &= \int_0^u \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u}(u,v)du + C^{'}(v)\\ &= \mathbf{g}_2(u,v) - \mathbf{g}_2(0,v) + C^{'}(v)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\mathbf{S}_v = \mathbf{g}_2$ eşitliği kullanıldığında

$$C^{'}(v) = \mathbf{g}_2(0,v)$$

elde edilir ve v ye göre integrali alındığında

$$C(v) = \int_0^v \mathbf{g}_2(0,v)dv + c_1$$

bulunur ve böylece

$$\mathbf{S}(u,v) = \int_0^u \mathbf{g}_1(u,v)du + \int_0^v \mathbf{g}_2(0,v)dv + sbt \tag{4.4}$$

dir.

Benzer bir şekilde, (4.1) eşitliklerinden ikincisi olan $\mathbf{S}_v = \mathbf{g}_2$ eşitliğinin her iki tarafın v ye göre integrali alındığında

$$\mathbf{S}(u,v) = \int_0^v \mathbf{g}_2(u,v)du + C(u)$$

elde edilir. Burada C, u ya bağlı tek değişkenli bir fonksiyondur. Bu eşitliğin u ya göre türevi alınıp, (4.2) eşitliği de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_v(u,v) &= \int_0^v \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u}(u,v)du + C^{'}(u)\\ &= \int_0^v \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v}(u,v)dv + C^{'}(u)\\ &= \mathbf{g}_1(u,v) - \mathbf{g}_1(u,0) + C^{'}(u)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\mathbf{S}_u = \mathbf{g}_1$ eşitliği kullanıldığında

$$C^{'}(u) = \mathbf{g}_1(u, 0)$$

elde edilir ve u ya göre integral alındığında

$$C(u) = \int_0^u \mathbf{g}_1(u, 0)du + c_2$$

olarak bulunur ve böylece

$$\mathbf{S}(u, v) = \int_0^v \mathbf{g}_2(u, v)dv + \int_0^u \mathbf{g}_1(u, 0)du + sbt \tag{4.5}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla (4.4) ve (4.5) eşitlikleri yardımıyla (4.3) eşitliği bulunur.
Bir sonraki Lemma, Lemma 4.1. de tanımlanan **S** yüzeyi elde edilişi için farklı bir yol göstermektedir.

Lemma 4.2. Kabul edelim ki,

$$\mathbf{g}_l(u, v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \mathbf{B}_{ij}^{[l]} u^i v^j, l = 1, 2 \tag{4.6}$$

olsun. O zaman (4.2) eşitliği doğrudur gerek ve yeter koşul

$$(j+1)\mathbf{B}_{i(j+1)}^{[1]} = (i+1)\mathbf{B}_{(i+1)j}^{[2]}, \quad i = 0, 1, ..., m-1, \quad j = 0, 1, ..., m-1-i \tag{4.7}$$

dir. Aynı zamanda (4.3) eşitliğiyle tanımlı **S** yüzeyi

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{m+1-i} \mathbf{S}_{ij} u^i v^j \tag{4.8}$$

formundadır. Burada

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}_{i0} = \frac{1}{i}\mathbf{B}_{(i-1)0}^{[1]}, \quad \mathbf{S}_{0i} = \frac{1}{i}\mathbf{B}_{0(i-1)}^{[2]}, \quad i = 1, 2, ..., m+1 \\ &\mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{i}\mathbf{B}_{(i-1)j}^{[2]} = \frac{1}{j}\mathbf{B}_{i(j-1)}^{[2]}, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., m+1-i \end{aligned} \tag{4.9}$$

ve $\mathbf{S}_{00}$ keyfi bir sabittir.

İspat. (4.7) eşitliğinin ispatı için ilk olarak

$$\mathbf{g}_1(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\mathbf{B}_{ij}^{[1]}u^iv^j \tag{4.10}$$

eşitliğinin v ye göre kısmi türevi alınıp,

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v}=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-i}j\mathbf{B}_{ij}^{[1]}u^iv^{j-1}$$

ifadesinde j yerine $j+1$ yazılırsa

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v}=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1-i}(j+1)\mathbf{B}_{i(j+1)}^{[1]}u^iv^j \tag{4.11}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\mathbf{g}_2(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\mathbf{B}_{ij}^{[2]}u^iv^j \tag{4.12}$$

eşitliğinin u ya göre kısmi türevi alınıp,

$$\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}i\mathbf{B}_{ij}^{[2]}u^{i-1}v^j$$

ifadesinde i yerine $i+1$ yazılırsa

$$\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u}=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1-i}(i+1)\mathbf{B}_{(i+1)j}^{[2]}u^iv^j \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.2) eşitliğinin doğruluğu kabul edildiğinde (4.11) ve (4.13) denklemlerinde polinomların eşitliği kullanılırsa (4.7) eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (4.7) eşitliğinden (4.2) eşitliğinin doğruluğu da gösterilir.

(4.10) ve (4.12) eşitlikleri (4.3) ifadesinde yerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(u,v)&=\mathbf{S}(0,0)+\frac{1}{2}\int_0^u(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\mathbf{B}_{ij}^{[1]}u^iv^j+\sum_{i=0}^{m}\mathbf{B}_{i0}^{[1]}u^i)du+\frac{1}{2}\int_0^v(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\mathbf{B}_{ij}^{[2]}u^iv^j+\sum_{j=0}^{m}\mathbf{B}_{0j}^{[2]}v^j)dv\\&=\mathbf{S}(0,0)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m+1-i}\frac{1}{2}(\frac{1}{i}\mathbf{B}_{(i-1)j}^{[1]}+\frac{1}{j}\mathbf{B}_{i(j-1)}^{[2]})u^iv^j+\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{i}\mathbf{B}_{(i-1)0}^{[1]}u^i+\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{j}\mathbf{B}_{0(j-1)}^{[2]}v^j\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. Ayrıca (4.8) ve (4.14) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{i0} = \frac{1}{i}\mathbf{B}^{[1]}_{(i-1)0}, \quad \mathbf{S}_{0i} = \frac{1}{i}\mathbf{B}^{[2]}_{0(i-1)}, \quad i = 1, 2, \cdots, m+1 \\
&\mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{i}\mathbf{B}^{[1]}_{(i-1)j} = \frac{1}{j}\mathbf{B}^{[2]}_{i(j-1)}, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, m+1-i,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

dir. Burada $\mathbf{S}_{00}$ keyfi bir sabittir.

(2.3) eşitliği ile verilen q split kuaterniyon polinomu (4.2) eşitliğini sağlıyorsa Lemma 4.1. ve Lemma 4.2. yardımı ile elde edilen $\mathbf{S}$ yüzeyi bir polinom PN yüzeyi ifade eder. Böyle bir yüzeyin derecesi

$$2der(q) + \max_{i=1,2,3,4}(der(\varphi_i)) + 1$$

dir.

Özel olarak, φ_i ler birer sabit olarak seçilirse, $2der(q) + 1$ dereceli bir split polinom PN yüzeyi elde edilir. $\mathbf{S}(u, v)$ yüzeyinin $v = v_0 = sbt$ için $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{S}(u, v_0)$ parametre eğrisinin hodografı için

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{r_1}'(u), \mathbf{r_1}'(u)) &= g(\varphi_1\mathbf{h}_1(u, v_0) + \varphi_2\mathbf{h}_2(u, v_0), \varphi_1\mathbf{h}_1(u, v_0) + \varphi_2\mathbf{h}_2(u, v_0)) \\
&= \varphi_1^2 g(\mathbf{h}_1(u, v_0), \mathbf{h}_1(u, v_0)) + 2\varphi_1\varphi_2 g(\mathbf{h}_1(u, v_0), \mathbf{h}_2(u, v_0)) + \varphi_2^2 g(\mathbf{h}_2(u, v_0), \mathbf{h}_2(u, v_0)) \\
&= -\varphi_1^2 \|q\|_*^4 + \varphi_2^2 \|q\|_*^4 \\
&= \|q\|_*^4 (-\varphi_1^2 + \varphi_2^2)
\end{aligned}$$

dir. φ_1 ve φ_2 birer sabit olduğundan $\mathbf{r_1}$ parametre eğrisi $\mathbf{S}(u, v)$ polinom PN yüzeyi üzerinde yatan bir PH eğrisidir. Benzer şekilde $\mathbf{S}(u, v)$ yüzeyinin $u = u_0 = sbt$ için $\mathbf{r}_2(v) = \mathbf{S}(u_0, v)$ parametre eğrisinin hodografı için

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{r_2}'(v), \mathbf{r_2}'(v)) &= g(\varphi_3\mathbf{h}_1(u_0, v) + \varphi_4\mathbf{h}_2(u_0, v), \varphi_3\mathbf{h}_1(u_0, v) + \varphi_4\mathbf{h}_2(u_0, v)) \\
&= \varphi_3^2 g(\mathbf{h}_1(u_0, v), \mathbf{h}_1(u_0, v)) + 2\varphi_3\varphi_4 g(\mathbf{h}_1(u_0, v), \mathbf{h}_2(u_0, v)) + \varphi_4^2 g(\mathbf{h}_2(u_0, v), \mathbf{h}_2(u_0, v)) \\
&= -\varphi_3^2 \|q\|_*^4 + \varphi_4^2 \|q\|_*^4 \\
&= \|q\|_*^4 (-\varphi_3^2 + \varphi_4^2)
\end{aligned}$$

dir. φ_3 ve φ_4 birer sabit olduğundan $\mathbf{r_2}$ parametre eğrisi $\mathbf{S}(u,v)$ polinom PN yüzeyi üzerinde yatan bir diğer PH eğrisidir.

Çift dereceli bir polinom PN yüzeyini oluşturmak için φ_i ler tek dereceli polinomlar olarak seçilmelidir. Özel olarak, φ_i birinci dereceden fonksiyon olarak seçilirse $2der(q)+2$ dereceden polinom PN yüzeyi elde edilir.

(4.2) eşitliği, keyfi φ_i fonksiyonları ile (2.3) ve (4.1) eşitlikleri yardımıyla tanımlanan keyfi split kuaterniyon polinomları için her zaman sağlanmaz.

4.1.1. Tek Dereceli Timelike Split Polinom PN Yüzeyinin Yapısı

(2.3) formunda verilen bir $q(u,v)$ split kuaterniyon polinomu ve (2.4) eşitliğiyle tanımlı $\mathbf{h}_i$, $(1 \leq i \leq 4)$ dönüşümünü ele alalım.

$$\varphi_i(u,v) = \alpha_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3,4$$

için

$$\begin{aligned} U_1 &= \varphi_1\mathbf{i} + \varphi_2\mathbf{j}, \\ U_2 &= \varphi_3\mathbf{i} + \varphi_4\mathbf{j} \end{aligned} \tag{4.16}$$

gibi iki split kuaterniyon seçilir ve (4.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \varphi_1\mathbf{h}_1 + \varphi_2\mathbf{h}_2 \\ &= \varphi_1(q * \mathbf{i} * \overline{q}) + \varphi_2(q * \mathbf{j} * \overline{q}) \\ &= q * (\varphi_1\mathbf{i} + \varphi_2\mathbf{j}) * \overline{q} \\ &= q * U_1 * \overline{q} \end{aligned} \tag{4.17}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2 &= \varphi_3\mathbf{h}_1 + \varphi_4\mathbf{h}_2 \\ &= \varphi_3(q * \mathbf{i} * \overline{q}) + \varphi_4(q * \mathbf{j} * \overline{q}) \\ &= q * (\varphi_3\mathbf{i} + \varphi_4\mathbf{j}) * \overline{q} \\ &= q * U_2 * \overline{q} \end{aligned} \tag{4.18}$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca, $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$

$$\mathbf{B}_{i,j}^{[l]} = \sum_{k=\max\{0,i-n\}}^{\min\{i,n\}} \sum_{r=\max\{0,j+i-n-k\}}^{\min\{j,n-k\}} q_{kr} * U_l * \overline{q}_{(i-k)(j-r)}, \quad l = 1, 2 \tag{4.19}$$

eşitliğinde $m = 2n$ alınarak (4.6) eşitliğindeki gibi ifade edilebilir.

Lemma 4.1. ve Lemma 4.2. den $m = 2n$ için q split kuaterniyon polinomu (4.7) eşitliği sağlandığında $n(2n+1)$ vektör denklemli bir polinom PN yüzeyi belirtir. Bu denklemlerin $\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix}$ kombinasyonlu kuaterniyon katsayıları ve dört α_i parametresi arasında lineer olmayan bağıntılar vardır.

$n \geq 2$ için q split kuaterniyon polinomu $4\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} + 4$ serbest parametre ile $3n(2n+1)$ skalar denkleme sahip olduğundan bir çözüm bulunamaz.

$\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ nin kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} &= q_v * U_1 * \overline{q} + q * U_1 * \overline{q}_v \\ &= q_v * U_1 * \overline{q} - \overline{q_v * U_1 * \overline{q}} \\ &= 2vec(q_v * U_1 * \overline{q}) \end{aligned} \tag{4.20}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u} &= q_u * U_2 * \overline{q} + q * U_2 * \overline{q}_u \\ &= q_u * U_2 * \overline{q} - \overline{q_u * U_2 * \overline{q}} \\ &= 2vec(q_u * U_2 * \overline{q}) \end{aligned} \tag{4.21}$$

formundadır. Burada (4.2) eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul

$$vec(q_v * U_1 * \overline{q}) - vec(q_u * U_2 * \overline{q}) = 0$$

olup,

$$vec((q_v * U_1 - q_u * U_2) * \overline{q}) = 0 \tag{4.22}$$

dir. (4.22) eşitliği doğrudur gerek ve yeter şart

$$q_v * U_1 - q_u * U_2 = \psi q \tag{4.23}$$

dir. Burada ψ bir skalar fonksiyondur. (4.23) eşitliğinin sol tarafı $n-1$ dereceli bir split kuaterniyon polinomu olduğundan, ψ rasyoneldir ve payının derecesi paydasının derecesinden bir derece eksiktir. Özellikle $\psi \equiv 0$ durumunda aşağıdaki teorem verilen yüzey için çözüm verir.

Teorem 4.3. (2.3) eşitliği ile verilen q split kuaterniyon polinomunun katsayıları $i = 0, 1, \cdots, n-1, j = 0, 1, \cdots, n-i-1$ için

$$(j+1)q_{i(j+1)} * U_1 = (i+1)q_{(i+1)j} * U_2 \tag{4.24}$$

eşitliğini sağlıyorsa, (4.3), (4.17) ve (4.18) eşitlikleri ile tanımlı $\mathbf{S}$ parametrik yüzeyi

$$\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v = (\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)\|q\|_*^2(\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2), \quad \mathbf{N} = \mathbf{e}_3$$

olacak şekilde $2n+1$ dereceli bir polinom PN yüzeyidir.

İspat. (4.23) eşitliği, (4.19) eşitliği ve Lemma 4.2. yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$q_v * U_1 - q_u * U_2 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}((j+1)q_{i(j+1)} * U_1 - (i+1)q_{(i+1)j} * U_2)u^i v^j = \psi q.$$

(4.23) eşitliğinde $\psi \equiv 0$ seçilirse (4.2) elde edilir. Ayrıca (4.3) eşitliği ile verilen yüzey $\mathbf{S}_u = \mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{S}_v = \mathbf{g}_2$ kısmi türevlerine sahiptir. Dahası

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v &= (\alpha_1\mathbf{h}_1 + \alpha_2\mathbf{h}_2) \times (\alpha_3\mathbf{h}_1 + \alpha_4\mathbf{h}_2)\\ &= (\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)(\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2)\\ &= (\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)\|q\|_*^2\mathbf{h}_3\end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.3. sadece bir polinom PN yüzeyinin varolabilmesi için gerekli şartları ifade eder. (4.24) eşitliğinin açık hali aşağıdaki Lemma ile verilebilir.

Lemma 4.4. (4.24) eşitliği sağlanır gerek ve yeter şart

$$q_{\lceil \frac{r}{2} \rceil + t \, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - t} = \frac{\left(\lceil \frac{r}{2} \rceil\right)! \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor\right)!}{\left(\lceil \frac{r}{2} \rceil + t\right)! \left(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - t\right)!} Q_r * (U_1 * U_2^{-1})^t, \quad t = -\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil, \cdots, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$$

dir. Burada $r = 1, 2, \cdots, n$ ve Q_r keyfi bir null olmayan split kuaterniyondur.

4.1.1.1. Timelike Kübik Polinom PN Yüzeyi

Bir timelike kübik polinom PN yüzeyi oluşturulurken $n = 1$ için (2.3) eşitliğiyle ifade edilen q split kuaterniyon polinomu alınırsa, Lemma 4.4. de $r = 1$ için $t = -1, 0$ olup kontrol noktaları

$$\begin{aligned} & q_{00}, \\ & q_{10} = Q_1, \\ & q_{01} = Q_1 * U_2 * U_1^{-1} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Q_1 yerine $Q_1 * U_2^{-1}$ seçilirse kontrol noktaları

$$\begin{aligned} & q_{00}, \\ & q_{10} = Q_1 * U_2^{-1}, \\ & q_{01} = Q_1 * U_1^{-1} \end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.19) ifadesinde $k = 0, 1$ ve $l = 1, 2$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{00}^{[l]} &= q_{00} * U_l * \overline{q}_{00}, \\ \mathbf{B}_{(1-k)k}^{[l]} &= 2vec(q_{00} * U_l * \overline{q}_{(1-k)k}), \\ \mathbf{B}_{11}^{[l]} &= 2vec(q_{01} * U_l * \overline{q}_{10}), \\ \mathbf{B}_{(2-2k)2k}^{[l]} &= q_{(1-k)k} * U_l * \overline{q}_{(1-k)k} \end{aligned} \tag{4.26}$$

dir. Dolayısıyla Lemma 4.2. yardımıyla bir timelike kübik polinom PN yüzeyi elde edilir.

Örnek 4.5. Kontrol noktalarını belirleyebilmek için

$$q_{00} = (1, 0, 0, 0), \qquad Q_1 = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$$

ve

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{8}, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{24}$$

serbest parametreleri seçilir ve bu parametreler (4.16) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$U_1 = (0, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0), \quad U_2 = (0, \frac{1}{8}, -\frac{1}{24}, 0)$$

olup, (4.25) eşitliğinden kontrol noktaları

$$\begin{aligned}
q_{00} &= (1, 0, 0, 0), \\
q_{10} &= Q_1 * U_2^{-1} = (\frac{33}{4}, \frac{13}{2}, -\frac{15}{2}, \frac{3}{4}), \\
q_{01} &= Q_1 * U_1^{-1} = (-\frac{1}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{13}{12}, -\frac{11}{8})
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.26) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{00}^{[1]} &= q_{00} * U_1 * \overline{q}_{00} = (\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0) \\
\mathbf{B}_{10}^{[1]} &= 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{10}) = (3, -12, 6) \\
\mathbf{B}_{01}^{[1]} &= 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{01}) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}) \\
\mathbf{B}_{11}^{[1]} &= 2vec(q_{01} * U_1 * \overline{q}_{10}) = (\frac{261}{8}, -\frac{451}{24}, \frac{47}{2}) \\
\mathbf{B}_{20}^{[1]} &= q_{10} * U_1 * \overline{q}_{10} = (-\frac{325}{8}, \frac{9}{8}, -\frac{111}{2}) \\
\mathbf{B}_{02}^{[1]} &= q_{01} * U_1 * \overline{q}_{01} = (-\frac{325}{288}, \frac{1}{32}, -\frac{37}{24})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{00}^{[2]} &= q_{00} * U_2 * \overline{q}_{00} = (\frac{1}{8}, -\frac{1}{24}, 0) \\
\mathbf{B}_{10}^{[2]} &= 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{10}) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}) \\
\mathbf{B}_{01}^{[2]} &= 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{01}) = (\frac{1}{12}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}) \\
\mathbf{B}_{11}^{[2]} &= 2vec(q_{01} * U_2 * \overline{q}_{10}) = (-\frac{325}{144}, \frac{1}{16}, -\frac{37}{12}) \\
\mathbf{B}_{20}^{[2]} &= q_{10} * U_2 * \overline{q}_{10} = (\frac{261}{16}, -\frac{451}{48}, \frac{47}{4}) \\
\mathbf{B}_{02}^{[2]} &= q_{01} * U_2 * \overline{q}_{01} = (\frac{29}{64}, -\frac{451}{1728}, \frac{47}{144})
\end{aligned}$$

olup, Lemma 4.2. den

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1(u,v) = (&\frac{1}{4} + 3u - \frac{325u^2}{288} + 2v + \frac{261uv}{8} - \frac{325v^2}{288},\\ &-\frac{3}{4} - 12u - \frac{9u^2}{8} - \frac{v}{2} - \frac{451uv}{24} + \frac{v^2}{32},\\ &-6u - \frac{111u^2}{2} + \frac{4v}{3} + \frac{47uv}{2} - \frac{37v^2}{24}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_2(u,v) = (&\frac{1}{8} + 2u + \frac{261u^2}{16} + \frac{v}{12} - \frac{325uv}{144} + \frac{29v^2}{64},\\ &-\frac{1}{24} - \frac{u}{2} - \frac{451u^2}{48} - \frac{v}{3} + \frac{uv}{16} - \frac{451v^2}{1728},\\ &\frac{4u}{3} + \frac{47u^2}{4} - \frac{v}{6} - \frac{37uv}{12} + \frac{47v^2}{144})\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(u,v) = (&\frac{1555u^3}{432} - \frac{181u^2v}{144} - \frac{23u^2}{8} - \frac{325uv^2}{288} + 2uv + \frac{u}{4} + \frac{1987v^3}{3456} - \frac{17v^2}{32} + \frac{v}{8},\\ &-\frac{551u^3}{144} + \frac{17u^2}{8} + \frac{uv^2}{32} - \frac{uv}{2} - \frac{3u}{4} - \frac{233u^3}{1152} - \frac{7v^2}{32} + \frac{3v}{8},\\ &\frac{19u^3}{36} + \frac{11u^2v}{12} - \frac{11u^2}{12} - \frac{37uv^2}{24} + \frac{163v^3}{288})\end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir.

$$g(\mathbf{N_1},\mathbf{N_1}) = \frac{\left(3852u^2 + 1188u - 107v^2 - 18v + 72\right)^4}{3869835264} > 0$$

olduğundan yüzeyimiz timelike yüzeydir. Ayrıca

$$\|(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v)(u,v)\|_* = \frac{(3852u^2 + 1188u - 107v^2 - 18v + 72)^2}{764411904}$$

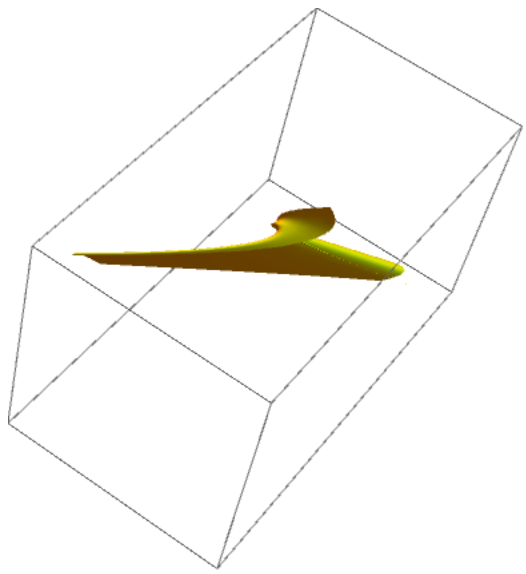
olduğundan bu yüzey bir timelike kübik polinom PN yüzeydir. Bkz. Şekil 4.1.

Ayrıca, timelike kübik polinom PN yüzeylerinin yapısıyla

$$\mathbf{S}(u,v) = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3 + \mathbf{C}$$

formundaki timelike polinom PN yüzeylerinin bir ailesi de elde edilebilir. Burada $c_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3,\ \ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$ sabit vektördür.

q split kuaterniyon polinomu $q(u,v) = (-v,1,0,u)$ ve $U_1 = (0,1,0,0)$, $U_2 = (0,0,1,0)$ olsun.



Şekil 4.1. Timelike Kübik Polinom PN yüzeyi

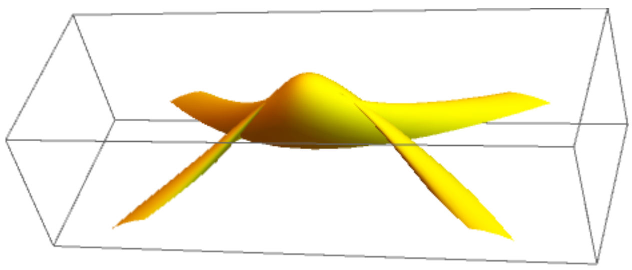
(4.20) ve (4.21) eşitliklerinden

$$\mathbf{g}_1(u,v) = (1+u^2+v^2, -2uv, 2u)$$
$$\mathbf{g}_2(u,v) = (2uv, 1-u^2-v^2, 2v)$$

bulunur ve Lemma 4.1. den

$$\mathbf{P}_1 = (u+\frac{u^3}{3}+uv^2, -\frac{1}{3}v(-3+3u^2+v^2), u^2+v^2)$$

yüzeyi elde edilir. Bkz. Şekil 4.2. Bu yüzeyin birim normali



Şekil 4.2. $\mathbf{P}_1$ Timelike Kübik Polinom PN Yüzeyi

$$\mathbf{N}(u,v) = (-\frac{2u}{1-u^2+v^2}, \frac{2v}{1-u^2+v^2}, 1-\frac{1}{1-u^2+v^2})$$

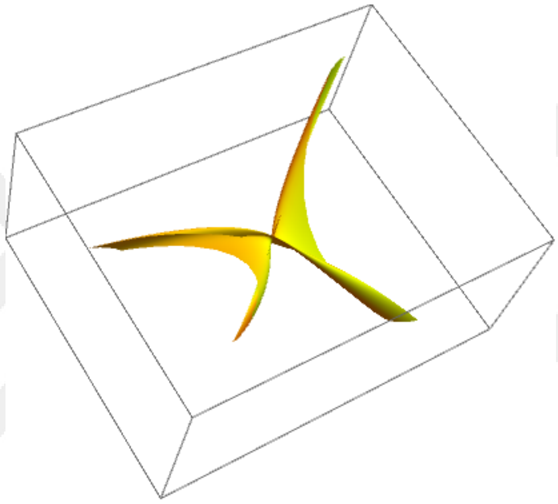
dir. Benzer şekilde $U_1 = (0, 0, -1, 0)$ ve $U_2 = (0, 1, 0, 0)$ seçilirse (4.20) ve (4.21) eşitliklerinden

$$\mathbf{g}_1(u, v) = (2uv, 1 - u^2 - v^2, 2v)$$
$$\mathbf{g}_2(u, v) = (1 + u^2 + v^2, -2uv, 2u)$$

bulunur ve Lemma 4.1. den

$$\mathbf{P}_2 = (2u^2v + \frac{v^3}{3} + v, -\frac{u^3}{3} - 2uv^2 + u, 4uv)$$

yüzeyi elde edilir. Bkz. Şekil 4.3. Bu yüzeyin birim normali



Şekil 4.3. $\mathbf{P}_2$ Timelike Kübik Polinom PN Yüzeyi

$$\mathbf{N}(u, v) = (-\frac{2u}{1 - u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 - u^2 + v^2}, 1 - \frac{1}{1 - u^2 + v^2})$$

dir. Ancak $\mathbf{P}_3$ yüzeyi benzer şekilde bulunamamaktadır. Bu durumda

$$\frac{v}{1 - u^2 + v^2}\mathbf{h}_1(u, v) + \frac{u}{1 - u^2 + v^2}\mathbf{h}_2(u, v) = (v, -u, 0) := \hat{\mathbf{h}}(u, v)$$

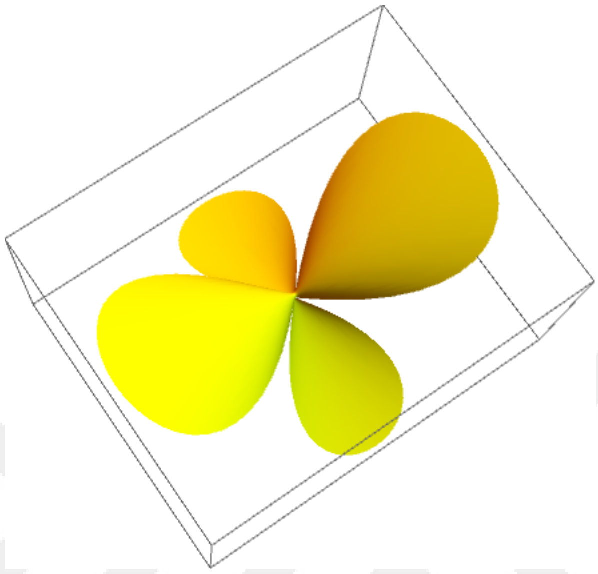
lineer dönüşümü yardımı ile

$$g_1(u, v) = \frac{-4v}{3}\hat{\mathbf{h}}(u, v) + \mathbf{h}_1(u, v)$$
$$g_2(u, v) = \frac{4u}{3}\hat{\mathbf{h}}(u, v) + \mathbf{h}_2(u, v)$$

eşitlikleri elde edilir ve Lemma 4.1. den

$$\mathbf{P}_3 = (\frac{1}{3}u(3+u^2-v^2), \frac{1}{3}v(-3-u^2+v^2), u^2-v^2)$$

yüzeyi de elde edilir. Bkz. Şekil 4.4. Bu yüzeyin birim normali



Şekil 4.4. $\mathbf{P}_3$ Timelike Kübik Polinom PN Yüzeyi

$$\mathbf{N}(u,v) = (-\frac{2u}{1-u^2+v^2}, \frac{2v}{1-u^2+v^2}, 1-\frac{1}{1-u^2+v^2})$$

dir. Bu örnek, φ_i seçiminin ikinci dereceden rasyonel foksiyonlar olması durumunda da bir timelike kübik polinom PN yüzeyinin elde edilebileceğini ifade eder. Bir sonraki Lemma $\hat{\mathbf{h}}$ nın $\mathbf{h}_1$ ve $\mathbf{h}_2$ cinsinden nasıl ifade edilebileceğini göstermektedir.

Lemma 4.6. $n = 1$ için q, (2.3) eşitliği ile verilen bir lineer split kuaterniyon ve

$$p_1(u,v) = g(\mathbf{w}, vec(q_{00}^{-1} * q * \mathbf{j})),$$
$$p_2(u,v) = g(-\mathbf{w}, vec(q_{00}^{-1} * q * \mathbf{i}))$$

olsun. Burada $\mathbf{w} = vec(q_{00}^{-1} * q_{10}) \times vec(q_{00}^{-1} * q_{01})$ dir. Bu durumda

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{\|q_{00}\|_*^4}{\|q\|_*^2}(p_1\mathbf{h}_1 + p_2\mathbf{h}_2) \tag{4.27}$$

formunda bir lineer polinom dönüşümüdür.

İspat. Genelliği bozmadan

$$q_{00} = (1,0,0,0)$$

olarak seçebiliriz. Diğer kontrol noktaları

$$q_{10} = (a_0, a_1, a_2, a_3), \quad q_{01} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$$

olsun. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} p_1(u,v) &= g(\mathbf{w}, ((0,1,0) + (-a_3, a_0, a_1)u + (-b_3, b_0, b_1)v)), \\ p_2(u,v) &= g(\mathbf{w}, ((-1,0,0) + (a_0, -a_3, a_2)u + (b_0, -b_3, b_2)v)) \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Burada

$$p_1\mathbf{h}_1 + p_2\mathbf{h}_2 = \|q\|_*^2 \begin{pmatrix} g(\mathbf{w}, ((0,1,0) + (a_3, a_0, a_1)u + (b_3, b_0, b_1)v)) \\ g(\mathbf{w}, ((1,0,0) + (a_0, a_3, a_2)u + (b_0, b_3, b_2)v)) \\ g(\mathbf{w}, ((0,0,2a_3)u + (0,0,2b_3)v)) \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir.

Lemma 4.6. nın bir sonucu olarak aşağıdaki gibi bazı kübik yüzeylerde oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1(u,v) &= \hat{\varphi}_1(u,v)\hat{\mathbf{h}}(u,v) + \alpha_1\mathbf{h}_1(u,v) + \alpha_2\mathbf{h}_2(u,v) \\ \mathbf{g}_2(u,v) &= \hat{\varphi}_2(u,v)\hat{\mathbf{h}}(u,v) + \alpha_3\mathbf{h}_1(u,v) + \alpha_4\mathbf{h}_2(u,v) \end{aligned} \tag{4.28}$$

formunda olup burada $\hat{\varphi}_1$ ve $\hat{\varphi}_2$ bazı lineer fonksiyonlardır. (4.28) eşitliğinde kısmi türevler alınıp (4.2) eşitliğinin kullanılması ile $\hat{\varphi}_1$ ve $\hat{\varphi}_2$ nin altı katsayısı ve α_i dört parametresi ile on bilinmeyen ve dokuz skalardan oluşan bir lineer denklem sistemi oluşur. Bu denklem sistemi α_i lerden biri sabitlenerek çözülebilir.

Örnek 4.7. $q(u,v) = (2,-16,2,0) + (-2,2,2,1)u + (-4,0,1,2)v$ split kuaterniyon polinomu verilsin. Lemma 4.6. dan

$$\begin{aligned} p_1(u,v) &= \frac{183u + 50v - 880}{32768} \\ p_2(u,v) &= \frac{91u + 39v - 169}{16384} \end{aligned}$$

katsayıları ve

$$\mathbf{h}_1(u,v) = (13u^2 + 24uv - 64u + 21v^2 - 12v + 264, 4u^2 - 12uv - 52u - 16v^2 - 24v - 64,$$
$$12u^2 + 28uv - 32u + 8v^2 - 52v - 8),$$
$$\mathbf{h}_2(u,v) = (-12u^2 - 20uv + 60u - 16v^2 + 40v + 64, -3u^2 + 16uv + 48u + 19v^2 - 20v - 256,$$
$$-12u^2 - 26uv + 68u - 4v^2 + 120v - 64)$$

bulunur. Bulunan ifadeler (4.27) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\hat{\mathbf{h}}(u,v) = (130u - 36v - 1984, 124u + 124v + 1116, 8u + 16v + 224)$$

elde edilir. $\alpha_4 = 1790$ için $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ ve $\hat{\mathbf{h}}$ nın (4.28) de yerine yazılmasıyla elde edilen denklem sisteminin çözülmesiyle

$$\hat{\varphi}_1(u,v) = 133 + 7v$$
$$\hat{\varphi}_2(u,v) = 70 - 7u$$
$$\alpha_1 = 946,\ \ \alpha_2 = 860,\ \ \alpha_3 = 1969$$

katsayıları bulunur. Bu katsayıların (4.28) eşitliğinde yerine yazılmasıyla

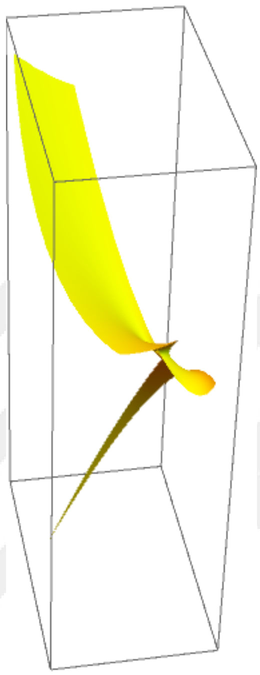
$$\mathbf{g}_1(u,v) = (1978u^2 + 6414uv + 8346u + 5854v^2 + 4372v + 40912,$$
$$1204u^2 + 3276uv + 8580u + 2072v^2 - 15600v - 132276,$$
$$1032u^2 + 4184uv + 29272u + 4240v^2 + 57704v - 32816),$$

$$\mathbf{g}_2(u,v) = (3207u^2 + 11708uv + 4372u + 12709v^2 + 45452v + 495496,$$
$$1638u^2 + 4144uv - 15600u + 2506v^2 - 74376v - 506136,$$
$$2092u^2 + 8480uv + 57704u + 8592v^2 + 113532v - 114632)$$

ve Lemma 4.1. yardımıyla

$$\mathbf{S}(u,v)=(\frac{1978u^3}{3}+\frac{13283u^2v}{2}+4173u^2+11771uv^2+8744uv+40912u+\frac{12709v^3}{3}+22726v^2+495496v,$$
$$\frac{1204u^3}{3}+3493u^2v+4290u^2+3927uv^2-31200uv-132276u+\frac{2506v^3}{3}-37188v^2-506136v,$$
$$344u^3+4198u^2v+14636u^2+8452uv^2+115408uv-32816u+2864v^3+56766v^2-114632v)$$

yüzeyi elde edilir. Bkz. Şekil 4.5. Burada



Şekil 4.5. Timelike Kübik Polinom PN Yüzeyi

$$g(\mathbf{N_1},\mathbf{N_1})=784(86u+179v+2541)^4\left(3u^2+8u(v-10)+v(11v-20)+256\right)^2>0$$

olduğundan yüzeyimiz timelike yüzeydir. Ayrıca

$$\|(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v)(u,v)\|_*=28(86u+179v+2541)^2\left|3u^2+8u(v-10)+v(11v-20)+256\right|$$

olduğundan bu yüzey bir timelike kübik polinom PN yüzeyidir. Bu örnekte farklı α_4 için farklı polinom PN yüzeyleri elde edilebilir.

4.1.1.2. Timelike Kuintik Polinom PN Yüzeyi

Bir timelike kuintik polinom PN yüzeyini oluşturulurken $n = 2$ için (2.3) eşitliğiyle tanımlanan

$$q = q_{00} + q_{10}u + q_{01}v + q_{11}uv + q_{20}u^2 + q_{02}v^2$$

split kuaterniyon polinomu seçilir. Lemma 4.6. da $r = 1, 2$ için $t = -1, 0, 1$ olup kontrol noktaları

$$\begin{aligned} &q_{00}, \\ &q_{10} = Q_1 * U_2^{-1}, \\ &q_{01} = Q_1 * U_1^{-1}, \\ &q_{11} = Q_2, \\ &q_{20} = \frac{1}{2}Q_2 * U_1 * U_2^{-1}, \\ &q_{02} = \frac{1}{2}Q_2 * U_2 * U_1^{-1} \end{aligned} \tag{4.29}$$

şeklindedir. (4.25) eşitliğindeki Q_1 ve (4.29) eşitliğindeki Q_2 bir polinom PN yüzeyi yapısındaki serbestlik derecelerini temsil eden null olmayan split kuaterniyonlardır.
(4.19) ifadesinde $k = 0, 1$ ve $l = 1, 2$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{00}^{[l]} &= q_{00} * U_l * \overline{q}_{00}, \\ \mathbf{B}_{(1-k)k}^{[l]} &= 2vec(q_{00} * U_l * \overline{q}_{(1-k)k}), \\ \mathbf{B}_{11}^{[l]} &= 2vec(q_{01} * U_l * \overline{q}_{10} + q_{00} * U_l * \overline{q}_{11}), \\ \mathbf{B}_{(2-2k)2k}^{[l]} &= q_{(1-k)k} * U_l * \overline{q}_{(1-k)k} + 2vec(q_{00} * U_l * \overline{q}_{(2-2k)2k}), \\ \mathbf{B}_{(3-3k)3k}^{[l]} &= 2vec(q_{(1-k)k} * U_l * \overline{q}_{(2-2k)2k}), \\ \mathbf{B}_{(2-k)(1+k)}^{[l]} &= 2vec(q_{(1-k)k} * U_l * \overline{q}_{11} + q_{k(1-k)} * U_l * \overline{q}_{(2-2k)2k}), \\ \mathbf{B}_{22}^{[l]} &= q_{11} * U_l * \overline{q}_{11} + 2vec(q_{02} * U_l * \overline{q}_{20}), \\ \mathbf{B}_{(4-4k)4k}^{[l]} &= q_{(2-2k)2k} * U_l * \overline{q}_{(2-2k)2k}, \\ \mathbf{B}_{(3-2k)(1+2k)}^{[l]} &= 2vec(q_{11} * U_l * \overline{q}_{(2-2k)2k}) \end{aligned} \tag{4.30}$$

olup, Lemma 4.2. yardımıyla bir timelike kuintik polinom PN yüzeyi elde edilir.

Örnek 4.8. Kontrol noktalarını belirleyebilmek için

$$q_{00} = (1,0,0,0), \ \ Q_1 = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}), \ \ Q_2 = (0, -\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10})$$

ve

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{4}, \ \ \alpha_3 = -\frac{1}{8}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{24}$$

serbest parametreleri seçilir ve bu parametreler (4.16) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$U_1 = (0, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0), \quad U_2 = (0, -\frac{1}{8}, \frac{1}{24}, 0)$$

bulunur. (4.29) eşitliğinden kontrol noktaları

$$\begin{aligned}
&q_{00} = (1,0,0,0),\\
&q_{10} = Q_1 * U_2^{-1} = (-\frac{33}{4}, -\frac{13}{2}, \frac{15}{2}, -\frac{3}{4}),\\
&q_{01} = Q_1 * U_1^{-1} = (-\frac{1}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{13}{12}, -\frac{11}{8}),\\
&q_{11} = Q_2 = (0, -\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}),\\
&q_{20} = \frac{1}{2} Q_2 * U_1 * U_2^{-1} = (\frac{3}{10}, -1, \frac{3}{8}, 0),\\
&q_{02} = \frac{1}{2} Q_2 * U_2 * U_1^{-1} = (\frac{1}{120}, -\frac{1}{36}, \frac{1}{96}, 0)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.30) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_{00}^{[1]} = q_{00} * U_1 * \overline{q}_{00} = (\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0)\\
&\mathbf{B}_{10}^{[1]} = 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{10}) = (-3, 12, 6)\\
&\mathbf{B}_{01}^{[1]} = 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{01}) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3})\\
&\mathbf{B}_{11}^{[1]} = 2vec(q_{01} * U_1 * \overline{q}_{10} + q_{00} * U_1 * \overline{q}_{11}) = (-\frac{1311}{80}, \frac{2261}{120}, -\frac{1127}{48})\\
&\mathbf{B}_{20}^{[1]} = q_{10} * U_1 * \overline{q}_{10} + 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{1619}{40}, \frac{27}{40}, -\frac{867}{16})\\
&\mathbf{B}_{02}^{[1]} = q_{01} * U_1 * \overline{q}_{01} + 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{02}) = (\frac{39}{40}, -\frac{893}{4320}, \frac{161}{240})\\
&\mathbf{B}_{30}^{[1]} = 2vec(q_{10} * U_1 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{223}{20}, \frac{63}{5}, -\frac{363}{40})\\
&\mathbf{B}_{03}^{[1]} = 2vec(q_{01} * U_1 * \overline{q}_{02}) = (-\frac{1}{40}, \frac{187}{4320}, \frac{1}{240})
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{21}^{[1]} = 2vec(q_{10} * U_1 * \overline{q}_{11} + q_{01} * U_1 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{27}{10}, \frac{187}{40}, \frac{9}{20})$$
$$\mathbf{B}_{12}^{[1]} = 2vec(q_{01} * U_1 * \overline{q}_{11} + q_{10} * U_1 * \overline{q}_{02}) = (-\frac{29}{45}, \frac{3211}{4320}, -\frac{1}{2})$$
$$\mathbf{B}_{22}^{[1]} = q_{11} * U_1 * \overline{q}_{11} + 2vec(q_{02} * U_1 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{1631}{230400}, \frac{427}{25600}, \frac{7}{640})$$
$$\mathbf{B}_{40}^{[1]} = q_{20} * U_1 * \overline{q}_{20} = (-\frac{1631}{6400}, \frac{3843}{6400}, \frac{63}{160})$$
$$\mathbf{B}_{04}^{[1]} = q_{02} * U_1 * \overline{q}_{02} = (-\frac{1631}{8294400}, \frac{427}{921600}, \frac{7}{23040})$$
$$\mathbf{B}_{31}^{[1]} = 2vec(q_{11} * U_1 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{1569}{3200}, \frac{1919}{9600}, \frac{1}{80})$$
$$\mathbf{B}_{13}^{[1]} = 2vec(q_{11} * U_1 * \overline{q}_{02}) = (-\frac{523}{38400}, \frac{1919}{35600}, \frac{1}{2880})$$

ve

$$\mathbf{B}_{00}^{[2]} = q_{00} * U_2 * \overline{q}_{00} = (-\frac{1}{8}, \frac{1}{24}, 0)$$
$$\mathbf{B}_{10}^{[2]} = 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{10}) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$$
$$\mathbf{B}_{01}^{[2]} = 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{01}) = (-\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$$
$$\mathbf{B}_{11}^{[2]} = 2vec(q_{01} * U_2 * \overline{q}_{10} + q_{00} * U_2 * \overline{q}_{11}) = (-\frac{1619}{720}, \frac{3}{80}, -\frac{289}{96})$$
$$\mathbf{B}_{20}^{[2]} = q_{10} * U_2 * \overline{q}_{10} + 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{7831}{480}, \frac{13531}{1440}, -\frac{40607}{3456})$$
$$\mathbf{B}_{02}^{[2]} = q_{01} * U_2 * \overline{q}_{01} + 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{02}) = (-\frac{169}{320}, \frac{2471}{8640}, -\frac{91}{288})$$
$$\mathbf{B}_{30}^{[2]} = 2vec(q_{10} * U_2 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{9}{10}, \frac{181}{120}, \frac{3}{20})$$
$$\mathbf{B}_{03}^{[2]} = 2vec(q_{01} * U_2 * \overline{q}_{02}) = (-\frac{223}{4320}, \frac{7}{720}, -\frac{121}{17280})$$
$$\mathbf{B}_{21}^{[2]} = 2vec(q_{10} * U_2 * \overline{q}_{11} + q_{01} * U_2 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{223}{240}, \frac{21}{20}, -\frac{121}{160})$$
$$\mathbf{B}_{12}^{[2]} = 2vec(q_{01} * U_2 * \overline{q}_{11} + q_{10} * U_2 * \overline{q}_{02}) = (-\frac{3}{40}, \frac{187}{1440}, \frac{1}{80})$$
$$\mathbf{B}_{22}^{[2]} = q_{11} * U_2 * \overline{q}_{11} + 2vec(q_{02} * U_2 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{523}{25600}, \frac{1919}{230400}, \frac{1}{1920})$$
$$\mathbf{B}_{40}^{[2]} = q_{20} * U_2 * \overline{q}_{20} = (-\frac{1569}{12800}, \frac{1919}{38400}, \frac{1}{320})$$
$$\mathbf{B}_{04}^{[2]} = q_{02} * U_2 * \overline{q}_{02} = (-\frac{523}{5529600}, \frac{1919}{49766400}, \frac{1}{414720})$$
$$\mathbf{B}_{31}^{[2]} = 2vec(q_{11} * U_2 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{1631}{57600}, \frac{427}{6400}, \frac{7}{160})$$
$$\mathbf{B}_{13}^{[2]} = 2vec(q_{11} * U_2 * \overline{q}_{02}) = (-\frac{1631}{2073600}, \frac{427}{230400}, \frac{7}{5760})$$

olup, Lemma 4.2. den

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1(u,v) = (&\frac{1}{4} - 3u - \frac{1619u^2}{40} - \frac{223u^3}{20} - \frac{1631u^4}{6400} + 2v - \frac{1311uv}{40} - \frac{27u^2v}{10} \\
&- \frac{1569u^3v}{3200} - \frac{1619v^2}{1440} - \frac{233uv^2}{240} - \frac{1631u^2v^2}{38400} - \frac{v^3}{40} - \frac{523uv^3}{38400} - \frac{1631v^4}{32000}, \\
&- \frac{3}{4} + 12u + \frac{27u^2}{40} + \frac{63u^3}{5} + \frac{3843u^4}{6400} - \frac{v}{2} + \frac{2261uv}{120} + \frac{187u^2v}{40} \\
&+ \frac{1919u^3v}{9600} + \frac{3v^2}{160} + \frac{21uv^2}{20} + \frac{1281u^2v^2}{12800} + \frac{187v^3}{4320} + \frac{1919uv^3}{345600} + \frac{427v^4}{921600}, \\
&- 6u - \frac{867u^2}{16} - \frac{363u^3}{40} + \frac{63u^4}{160} + \frac{4v}{3} - \frac{1127uv}{48} + \frac{9u^2v}{20} - \frac{u^3v}{80} \\
&- \frac{289v^2}{192} - \frac{121uv^2}{160} + \frac{21u^2v^2}{320} + \frac{v^3}{240} + \frac{uv^3}{2880} + \frac{7v^4}{23040}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_2(u,v) = (&-\frac{1}{8} + 2u - \frac{1311u^2}{80} - \frac{9u^3}{10} - \frac{1569u^4}{12800} - \frac{v}{12} - \frac{1619uv}{720} - \frac{223u^2v}{240} \\
&- \frac{1631u^3v}{57600} - \frac{437v^2}{960} - \frac{3uv^2}{40} - \frac{523u^2v^2}{25600} - \frac{223v^3}{25920} - \frac{1631uv^3}{2073600} - \frac{523v^4}{5529600}, \\
&+ \frac{1}{24} - \frac{u}{2} + \frac{2261u^2}{240} + \frac{187u^3}{120} + \frac{1919u^4}{38400} + \frac{v}{3} + \frac{3uv}{80} + \frac{21u^2v}{20} \\
&+ \frac{427u^3v}{6400} + \frac{2261v^2}{8640} + \frac{187uv^2}{1140} + \frac{1919u^2v^2}{230400} + \frac{7v^3}{120} + \frac{427uv^3}{230400} + \frac{1919v^4}{49766400}, \\
&+ \frac{4u}{3} - \frac{1127u^2}{96} + \frac{u^3}{20} + \frac{u^4}{320} + \frac{v}{6} - \frac{289uv}{96} - \frac{121u^2v}{160} + \frac{7u^3v}{160} \\
&- \frac{1127v^2}{3456} + \frac{uv^2}{80} + \frac{u^2v^2}{1920} - \frac{121v^3}{17280} + \frac{7uv^3}{5760} + \frac{v^4}{414720})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(u,v) = (&\frac{u}{4} - \frac{3u^2}{2} - \frac{1619u^3}{120} - \frac{223u^4}{80} - \frac{1631u^5}{32000} - \frac{v}{8} + 2uv - \frac{1311u^2v}{80} - \frac{9u^3v}{10} - \frac{1569u^4v}{12800} - \frac{v^2}{24} \\
&- \frac{1619uv^2}{1440} - \frac{223u^2v^2}{480} - \frac{1631u^3v^2}{115200} - \frac{437v^3}{2880} - \frac{uv^3}{40} + \frac{523u^2v^3}{76800} - \frac{223v^4}{103680} - \frac{1631uv^4}{8294400} - \frac{523v^5}{27648000}, \\
&- \frac{3u}{4} + 6u^2 + \frac{9u^3}{40} + \frac{63u^4}{20} + \frac{3843u^5}{32000} + \frac{v}{24} - \frac{uv}{2} + \frac{2261u^2v}{240} + \frac{187u^3v}{120} + \frac{1919u^4v}{38400} + \frac{v^2}{6} \\
&+ \frac{3uv^2}{160} + \frac{21u^2v^2}{40} - \frac{427u^3v^2}{12800} + \frac{2261v^3}{25920} + \frac{187uv^3}{4320} + \frac{1919u^2v^3}{691200} + \frac{7v^4}{2280} + \frac{427uv^4}{921600} + \frac{1919v^5}{248832000}, \\
&3u^2 - \frac{289u^3}{16} - \frac{363u^4}{160} + \frac{63u^5}{800} + \frac{4uv}{3} - \frac{1127u^2v}{96} + \frac{3u^3v}{20} + \frac{u^4v}{20} + \frac{v^2}{12} - \frac{289uv^2}{192} - \frac{121u^2v^2}{320} \\
&+ \frac{7u^3v^2}{320} - \frac{1127v^3}{10368} + \frac{uv^3}{240} + \frac{u^2v^3}{5760} - \frac{121v^4}{69120} + \frac{7uv^4}{23040} + \frac{v^5}{2073600})
\end{aligned}$$

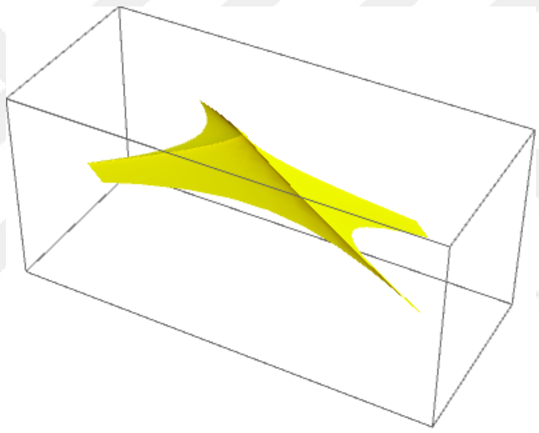
yüzeyi bulunur. Bkz. Şekil 4.6. Burada

$$g(\mathbf{N_1},\mathbf{N_1}) = \mathbf{F}^2 - \mathbf{E}\mathbf{G} = \frac{1}{26623333280885243904000000000}(1968624u^4 + 5028480u^3 - 109368u^2v^2$$
$$- 3343680u^2v + 112181760u^2 - 139680uv^2 - 34214400u + 1519v^4 + 92880v^3$$
$$- 3047040v^2 - 518400v + 2073600)^4 > 0$$

olduğundan bu yüzey bir timelike yüzeydir. Ayrıca

$$\|(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v)(u,v)\|_* = \frac{1}{51597803520000}(1968624u^4 + 5028480u^3 - 109368u^2v^2 - 3343680u^2v + 112181760u^2$$
$$- 139680uv^2 - 34214400u + 1519v^4 + 92880v^3 - 3047040v^2 - 518400v + 2073600)^2$$

olduğundan bu yüzey bir kuintik polinom PN yüzeyidir.



Şekil 4.6. Timelike Kunitik Polinom PN Yüzeyi

4.1.2. Çift Dereceli Timelike Split Polinom PN Yüzeyinin Yapısı

(2.3) formunda verilen bir $q(u,v)$ split kuaterniyon polinomundan çift dereceli bir polinom PN yüzeyi elde edebilmek için (4.1) eşitliği ile verilen φ_i ler birer lineer fonksiyon olarak

$$\varphi_i(u,v) = \alpha_i + \beta_i u + \gamma_i v, \;\; \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}, \;\; i = 1,2,3,4$$

şeklinde seçilecektir. (4.16) eşitliğinden

$$\begin{aligned} U_1 &= \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} \\ &= (0, \alpha_1 + \beta_1 u + \gamma_1 v, \alpha_2 + \beta_2 u + \gamma_2 v, 0) \\ &= (0, \alpha_1, \alpha_2, 0) + (0, \beta_1, \beta_2, 0)u + (0, \gamma_1, \gamma_2, 0)v \\ &= U_{00}^{[1]} + U_{10}^{[1]} u + U_{01}^{[1]} v \end{aligned} \tag{4.31}$$

ve

$$\begin{aligned} U_2 &= \varphi_3 \mathbf{i} + \varphi_4 \mathbf{j} \\ &= (0, \alpha_3 + \beta_3 u + \gamma_3 v, \alpha_4 + \beta_4 u + \gamma_4 v, 0) \\ &= (0, \alpha_3, \alpha_4, 0) + (0, \beta_3, \beta_4, 0)u + (0, \gamma_3, \gamma_4, 0)v \\ &= U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]} u + U_{01}^{[2]} v \end{aligned} \tag{4.32}$$

olup, burada

$$\begin{aligned} &U_{00}^{[1]} = (0, \alpha_1, \alpha_2, 0), \quad U_{10}^{[1]} = (0, \beta_1, \beta_2, 0), \quad U_{01}^{[1]} = (0, \gamma_1, \gamma_2, 0) \\ &U_{00}^{[2]} = (0, \alpha_3, \alpha_4, 0), \quad U_{10}^{[2]} = (0, \beta_3, \beta_4, 0), \quad U_{01}^{[2]} = (0, \gamma_3, \gamma_4, 0) \end{aligned} \tag{4.33}$$

dir. (4.17) ve (4.18) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= q * U_1 * \overline{q} \\ &= q * (U_{00}^{[1]} + U_{10}^{[1]} u + U_{01}^{[1]} v) * \overline{q} \\ \mathbf{g}_2 &= q * U_2 * \overline{q} \\ &= q * (U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]} u + U_{01}^{[2]} v) * \overline{q} \end{aligned} \tag{4.34}$$

ifadeleri elde edilir. $\mathbf{S}$ bir yüzey ise

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = g(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_u) &= g(q * U_1 * \overline{q}, q * U_1 * \overline{q}) \\ &= \|q\|_*^4 \, g(U_1, U_1) \\ &= \left(-(\alpha_1 + \beta_1 u + \gamma_1 v)^2 + (\alpha_2 + \beta_2 u + \gamma_2 v)^2\right) \|q\|_*^4 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = g(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v) &= g(q * U_1 * \overline{q}, q * U_2 * \overline{q}) \\ &= \|q\|_*^4 \, g(U_1, U_2) \\ &= (-(\alpha_1 + \beta_1 u + \gamma_1 v)(\alpha_3 + \beta_3 u + \gamma_3 v) + (\alpha_2 + \beta_2 u + \gamma_2 v)(\alpha_4 + \beta_4 u + \gamma_4 v)) \|q\|_*^4\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{G} = g(\mathbf{S}_v, \mathbf{S}_v) &= g(q * U_2 * \overline{q}, q * U_2 * \overline{q}) \\ &= \|q\|_*^4 \, g(U_2, U_2) \\ &= \left(-(\alpha_3 + \beta_3 u + \gamma_3 v)^2 + (\alpha_4 + \beta_4 u + \gamma_4 v)^2\right) \|q\|_*^4 ,\end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned}g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1}) &= \mathbf{F}^2 - \mathbf{EG} \\ &= [(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4) + (-\alpha_4\beta_1 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_1\beta_4)u + (-\alpha_4\gamma_1 + \alpha_3\gamma_2 + \alpha_2\gamma_3 - \alpha_1\gamma_4)v \\ &+ (-\beta_4\gamma_1 + \beta_3\gamma_2 + \beta_2\gamma_3 - \beta_1\gamma_4)uv + (\beta_2\beta_3 - \beta_1\beta_4)u^2 + (\gamma_2\gamma_3 - \gamma_1\gamma_4)v^2]^2 \|q\|_*^8\end{aligned}$$

olduğundan bu yüzey timelikedır. (4.34) eşitliğinde $\mathbf{g}_1$ in v ye göre ve $\mathbf{g}_2$ nin u ya göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} &= q_v * U_1 * \overline{q} + q * U_{01}^{[1]} * \overline{q} + q * U_1 * \overline{q}_v \\ &= q_v * U_1 * \overline{q} + q * U_{01}^{[1]} * \overline{q} - \overline{q_v * U_1 * \overline{q}} \\ &= vec(2q_v * U_1 * \overline{q} + q * U_{01}^{[1]} * \overline{q})\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u} &= q_u * U_2 * \overline{q} + q * U_{10}^{[2]} * \overline{q} + q * U_2 * \overline{q}_u \\ &= q_u * U_2 * \overline{q} + q * U_{10}^{[2]} * \overline{q} - \overline{q_u * U_2 * \overline{q}} \\ &= vec(2q_u * U_2 * \overline{q} + q * U_{10}^{[2]} * \overline{q})\end{aligned}$$

formundadır. Buradan (4.2) eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul

$$vec(2q_v * U_1 * \overline{q} + q * U_{01}^{[1]} * \overline{q}) - vec(2q_u * U_2 * \overline{q} + q * U_{10}^{[2]} * \overline{q}) = 0$$

olup,

$$((2q_v * U_1 + q * U_{01}^{[1]} - 2q_u * U_2 - q * U_{10}^{[2]}) * \overline{q}) = 0 \tag{4.35}$$

dir. (4.35) eşitliği doğrudur gerek ve yeter şart

$$2q_v * U_1 + q * U_{01}^{[1]} - 2q_u * U_2 - q * U_{10}^{[2]} = \psi q \tag{4.36}$$

dir. Burada ψ bir skalar fonksiyondur. (4.36) eşitliğinin sol tarafı u, v değişkenlerine bağlı n dereceli bir split kuaterniyon polinomu olduğundan, ψ yi ψ_0 sabiti olarak seçebiliriz. O zaman, (4.36) eşitliğinde $4\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix}$ kombinasyonlu kuaterniyon katsayıları ve U_i nin 12 katsayısı arasında lineer olmayan bağıntılar vardır.

4.1.2.1. Timelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi

(2.3) eşitliğinde $n = 1$ alındığında

$$q(u, v) = q_{00} + q_{10}u + q_{01}v$$

dir. $q_v = q_{01}$, $q_u = q_{10}$ ile (4.31) ve (4.32) eşitlikleri (4.36) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$2q_{01} * (U_{00}^{[1]} + U_{10}^{[1]}u + U_{01}^{[1]}v) - 2q_{01} * (U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]}u + U_{01}^{[2]}v) + q * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten aşağıdaki üç kuaterniyon denklemi elde edilir:

$$2q_{01} * U_{00}^{[1]} - 2q_{10} * U_{00}^{[2]} + q_{00} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0, \tag{4.37}$$

$$2q_{01} * U_{10}^{[1]} - 2q_{10} * U_{10}^{[2]} + q_{10} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0, \tag{4.38}$$

$$2q_{01} * U_{01}^{[1]} - 2q_{10} * U_{01}^{[2]} + q_{01} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0. \tag{4.39}$$

(4.38) eşitliğinden

$$2q_{01} * U_{10}^{[1]} - 2q_{10} * U_{10}^{[2]} + q_{10} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

olup buradan

$$\begin{aligned} 2q_{01} * U_{10}^{[1]} &= 2q_{10} * U_{10}^{[2]} - q_{10} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} + \psi_0) \\ &= q_{10} * (3U_{10}^{[2]} - U_{01}^{[1]} + \psi_0) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafı soldan $\frac{1}{2}q_{01}^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} U_{10}^{[1]} &= -\frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{10} * (U_{01}^{[1]} - 3U_{10}^{[2]} - \psi_0) \\ &= -\frac{1}{2}C * (U_{01}^{[1]} - 3U_{10}^{[2]} - \psi_0) \end{aligned} \tag{4.40}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.39) eşitliğinden

$$2q_{01} * U_{01}^{[1]} - 2q_{10} * U_{01}^{[2]} + q_{01} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

olup, bu durumda

$$\begin{aligned} 2q_{10} * U_{01}^{[2]} &= 2q_{01} * U_{01}^{[1]} + q_{01} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \\ &= q_{01} * (3U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafı soldan $\frac{1}{2}q_{10}^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} U_{01}^{[2]} &= \frac{1}{2}q_{10}^{-1} * q_{01} * (3U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \\ &= \frac{1}{2}C^{-1} * (3U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \end{aligned} \tag{4.41}$$

elde edilir. Burada $C = (c_0, c_1, c_2, c_3) = q_{01}^{-1} * q_{10}$ dir. (4.33) eşitliğinin (4.40) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} (0, \beta_1, \beta_2, 0) &= -\frac{1}{2}(c_0, c_1, c_2, c_3) * (-\psi_0, \gamma_1 - 3\beta_3, \gamma_2 - 3\beta_4, 0) \\ &= -\frac{1}{2}(-c_0\psi_0 - c_1\gamma_1 + 3c_1\beta_3 + c_2\gamma_2 - 3c_2\beta_4, -c_1\psi_0 + c_0\gamma_1 - 3c_0\beta_3 + c_3\gamma_2 - 3c_3\beta_4, \\ &\quad - c_2\psi_0 + 3c_0\gamma_2 - 3c_0\beta_4 + c_3\gamma_1 - 3c_3\beta_3, -c_3\psi_0 - c_2\gamma_1 + 3c_2\beta_3 + c_1\gamma_2 - 3c_1\beta_4) \end{aligned} \tag{4.42}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.32) eşitliğinin (4.41) de yerine yazılmasıyla da

$$\begin{aligned} (0, 0, \gamma_3, \gamma_4) &= \frac{1}{2\left\|C\right\|_*}(c_0, -c_1, -c_2, -c_3) * (\psi_0, 3\gamma_1 - \beta_3, 3\gamma_2 - \beta_4, 0) \\ &= \frac{1}{2\left\|C\right\|_*}(-c_0\psi_0 + 3c_1\gamma_1 - c_1\beta_3 - 3c_2\gamma_2 + c_2\beta_4, c_1\psi_0 + 3c_0\gamma_1 - c_0\beta_3 - 3c_3\gamma_2 + c_3\beta_4, \\ &\quad c_2\psi_0 - 3c_3\gamma_1 + c_3\beta_3 + 3c_0\gamma_2 - c_0\beta_4, c_3\psi_0 + 3c_2\gamma_1 - c_2\beta_3 - 3c_1\gamma_2 + c_1\beta_4) \end{aligned} \tag{4.43}$$

dir. (4.42) ve (4.43) eşitliklerinde bulunan 8 denklemden oluşan sistemin çözülmesiyle

$$\begin{aligned} &\beta_1 = \frac{c_1\left\|C\right\|_*^2\psi_0}{2(c_1^2 - c_2^2)}, \quad \beta_2 = \frac{c_2\left\|C\right\|_*^2\psi_0}{2(c_1^2 - c_2^2)}, \quad \beta_3 = \frac{(2c_0c_1 - c_2c_3)\psi_0}{4(c_1^2 - c_2^2)}, \\ &\beta_4 = \frac{(2c_0c_2 - c_1c_3)\psi_0}{4(c_1^2 - c_2^2)}, \quad \gamma_1 = \frac{(2c_0c_1 + c_2c_3)\psi_0}{4(c_1^2 - c_2^2)}, \quad \gamma_2 = \frac{(2c_0c_2 + c_1c_3)\psi_0}{4(c_1^2 - c_2^2)}, \\ &\gamma_3 = \frac{c_1\psi_0}{2(c_1^2 - c_2^2)}, \quad \gamma_4 = \frac{c_2\psi_0}{2(c_1^2 - c_2^2)} \end{aligned} \tag{4.44}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $c_1^2 - c_2^2 \neq 0$ dir. Ayrıca (4.37) eşitliğinden

$$2q_{01} * U_{00}^{[1]} - 2q_{10} * U_{00}^{[2]} + q_{00} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

olup burada

$$2q_{01} * U_{00}^{[1]} = 2q_{10} * U_{00}^{[2]} - q_{00} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafının soldan $\frac{1}{2}q_{01}^{-1}$ ile çarpılmasıyla

$$U_{00}^{[1]} = C * U_{00}^{[2]} - \frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{00} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \tag{4.45}$$

elde edilir. (4.45) eşitliğinde (4.33) ün yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}(0,\alpha_1,\alpha_2,0) &= C * (0,\alpha_3,\alpha_4,0) - \frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{00} * ((0,\gamma_1,\gamma_2,0) - (0,\beta_3,\beta_4,0) - (\psi_0,0,0,0)) \\ &= C * (0,\alpha_3,\alpha_4,0) - \frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{00} * (\psi_0,\gamma_1-\beta_3,\gamma_2-\beta_4,0) \end{aligned} \tag{4.46}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} D = (d_0,d_1,d_2,d_3) &= -\frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{00} * (-1,\gamma_1-\beta_3,\gamma_2-\beta_4,0) \\ &= -\frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{00} * (-1,\frac{c_2c_3}{2(c_1^2-c_2^2)},\frac{c_1c_3}{2(c_1^2-c_2^2)},0) \end{aligned}$$

alınırsa (4.46) eşitliği

$$\begin{aligned}(0,\alpha_1,\alpha_2,0) &= C * (0,\alpha_3,\alpha_4,0) + \psi_0 D \\ &= C * (0,\alpha_3,\alpha_4,0) + \psi_0(d_0,d_1,d_2,d_3)\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}&\alpha_1 = c_0\alpha_3 + c_3\alpha_4 + d_1\psi_0, \quad \alpha_2 = c_3\alpha_3 + c_0\alpha_4 + d_2\psi_0, \\ &\alpha_3 = -\psi_0\frac{c_1d_0 - c_2d_3}{c_1^2-c_2^2}, \quad \alpha_4 = \psi_0\frac{c_2d_0 - c_1d_3}{c_1^2-c_2^2}\end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir. ψ_0 parametresi herhangi bir ek serbestlik derecesi getirmemektedir ve bu sabit çarpanla elde edilen $q(u,v)$ split kuaterniyon polinomundan elde edilen $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ nin sadece büyüklüğünü etkilemektedir. (4.33), (4.34), (4.44) ve (4.47) eşitlikleri ile birlikle Lemma 4.2. den $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ ve timelike kuartik polinom PN yüzeyi bulunur.

Şimdi $c_1^2 - c_2^2 = 0$ olduğu durumu ele alalım. Bu durumun gerçekleşebilmesi için ya $c_1 = \mp c_2$ yada $c_1 = c_2 = 0$ olmalıdır.

İlk olarak, $c_1 = \mp c_2$ $(c_1 \neq 0)$ durumunu ele alalım. (4.42) ve (4.43) eşitliklerinde $c_1 = \mp c_2$ yazılmasıyla

$$\begin{aligned}(0,\beta_1,\beta_2,0) &= -\frac{1}{2}(c_0,c_1,\mp c_1,c_3)*(-\psi_0,\gamma_1-3\beta_3,\gamma_2-3\beta_4,0)\\ &= -\frac{1}{2}(-c_0\psi_0-c_1\gamma_1+3c_1\beta_3\mp c_1\gamma_2\mp 3c_1\beta_4,-c_1\psi_0+c_0\gamma_1-3c_0\beta_3+c_3\gamma_2\\ &- 3c_3\beta_4,\mp c_1\psi_0+3c_0\gamma_2-3c_0\beta_4+c_3\gamma_1-3c_3\beta_3,-c_3\psi_0\mp c_1\gamma_1\mp 3c_1\beta_3+c_1\gamma_2-3c_1\beta_4)\end{aligned} \tag{4.48}$$

ve

$$\begin{aligned}(0,0,\gamma_3,\gamma_4) &= \frac{1}{2\left\|C\right\|_*}(c_0,-c_1,\mp c_1,-c_3)*(\psi_0,3\gamma_1-\beta_3,3\gamma_2-\beta_4,0)\\ &= \frac{1}{2\left\|C\right\|_*}(-c_0\psi_0+3c_1\gamma_1-c_1\beta_3\mp 3c_1\gamma_2\mp c_1\beta_4,c_1\psi_0+3c_0\gamma_1-c_0\beta_3-3c_3\gamma_2\\ &+ c_3\beta_4,\mp c_1\psi_0-3c_3\gamma_1+c_3\beta_3+3c_0\gamma_2-c_0\beta_4,c_3\psi_0\mp 3c_1\gamma_1-c_2\beta_3-3c_1\gamma_2+c_1\beta_4)\end{aligned} \tag{4.49}$$

dir. (4.48) ve (4.49) eşitlikleri ile oluşan denklem sistemi bağdaşamayan bir denklem sistemidir. Dolayısıyla bu durum için çözüm yoktur.

İkinci olarak, $C = (c_0,0,0,c_3), c_3 \neq 0$ olma durumunu ele alalım. (4.40) denkleminde $C = (c_0,0,0,c_3)$ yazılmasıyla

$$\begin{aligned}U_{10}^{[1]} = (0,\beta_1,\beta_2,0) &= -\frac{1}{2}C*(U_{01}^{[1]}-3U_{10}^{[2]}-\psi_0)\\ &= -\frac{1}{2}(c_0,0,0,c_3)*(-\psi_0,\gamma_1-3\beta_3,\gamma_2-3\beta_4,0)\\ &= -\frac{1}{2}(-c_0\psi_0,c_0\gamma_1-3c_0\beta_3+c_3\gamma_2-3c_3\beta_4,\\ &+ c_3\gamma_1-3c_3\beta_3+c_0\gamma_2-3c_0\beta_4,-c_3\psi_0)\end{aligned} \tag{4.50}$$

elde edilir. (4.50) eşitliğinin ilk bileşeninden $\psi_0 = 0$ dir. $\psi_0 = 0$ alındığında (4.36) eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}&2q_{01}*U_{10}^{[1]}-2q_{10}*U_{10}^{[2]}+q_{10}*(U_{01}^{[1]}-U_{10}^{[2]}) = 0\\ &2q_{01}*U_{01}^{[1]}-2q_{10}*U_{01}^{[2]}+q_{01}*(U_{01}^{[1]}-U_{10}^{[2]}) = 0\end{aligned}$$

dir. Burada q_{10} yerine $q_{01} * C$ yazılması ile

$$
\begin{aligned}
2q_{01} * U_{10}^{[1]} - 2q_{01} * C * U_{10}^{[2]} + q_{01} * C * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0 \\
2q_{01} * U_{01}^{[1]} - 2q_{01} * C * U_{01}^{[2]} + q_{01} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle

$$U_{10}^{[2]} = C * U_{01}^{[2]} \tag{4.51}$$

ve bu sonucun (4.37) eşitliğinde kullanılmasıyla da

$$U_1 = C * U_2 \tag{4.52}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$U_{00}^{[1]} = C * U_{00}^{[2]}, \;\; U_{10}^{[1]} = C * U_{10}^{[2]}, \;\; U_{01}^{[1]} = C * U_{01}^{[2]}$$

dir. $c_1 = c_2 = 0$ durumu için (4.44) ve (4.47) eşitliklerine göre daha basit bir çözüm elde edilir. Bulunan sonuçlar aşağıdaki Lemmada özetlenmiştir.

Lemma 4.9. $n = 1$ için (2.3) eşitliği ile verilen bir lineer split kuaterniyon

$$q(u, v) = q_{00} + (q_{10} * C)u + q_{01}v, \;\; C = (c_0, c_1, c_2, c_3)$$

olsun. U_1 ve U_2, $c_1^2 - c_2^2 \neq 0$ durumunda (4.31), (4.32), (4.44) ve (4.47) eşitliklerinin kullanılmasıyla bulunur. $c_1 = c_2 = 0$ durumunda ise

$$
\begin{aligned}
&U_2(u, v) = (0, \alpha_3, \alpha_4, 0) + C * (0, \gamma_3, \gamma_4, 0)u + (0, \gamma_3, \gamma_4, 0)v, \\
&U_1(u, v) = C * U_2(u, v)
\end{aligned}
$$

dir. Bu durumda, S parametrik polinom PN yüzeyi Lemma 4.1. ile elde edilebilir.

(4.19) ifadesinde $k = 0, 1$ ve $l = 1, 2$ için

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_{00}^{[l]} = q_{00} * U_{00}^{[l]} * \overline{q}_{00},\\
&\mathbf{B}_{(1-k)k}^{[l]} = vec((q_{00} * U_{(1-k)k}^{[l]} + 2q_{(1-k)k} * U_{00}^{[l]}) * \overline{q}_{(1-k)k}),\\
&\mathbf{B}_{(2-2k)2k}^{[l]} = vec((q_{(1-k)k} * U_{00}^{[l]} + 2q_{00} * U_{(1-k)k}^{[l]}) * \overline{q}_{(1-k)k}),\\
&\mathbf{B}_{11}^{[l]} = 2vec(q_{01} * U_{00}^{[l]} * \overline{q}_{10} + q_{10} * U_{01}^{[l]} * \overline{q}_{00} + q_{01} * U_{10}^{[l]} * \overline{q}_{00}),\\
&\mathbf{B}_{(3-3k)3k}^{[l]} = q_{(1-k)k} * U_{(1-k)k}^{[l]} * \overline{q}_{(1-k)k},\\
&\mathbf{B}_{(2-k)(1+k)}^{[l]} = vec((q_{(1-k)k} * U_{k(1-k)}^{[l]} + 2q_{k(1-k)} * U_{(1-k)k}^{[l]}) * \overline{q}_{(1-k)k})
\end{aligned} \tag{4.53}$$

dir. Dolayısıyla, Lemma 4.2. yardımıyla bir timelike kuartik polinom PN yüzeyi elde edilir.

Örnek 4.10. Kontrol noktalarından ikisi

$$q_{00} = (1, 0, 0, 0), \quad q_{01} = (2, 1, 3, 4)$$

olarak belirlenir ve

$$C = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4})$$

seçilirse, $c_1^2 - c_2^2 \neq 0$ olduğundan son kontrol noktası

$$\begin{aligned}
q_{10} &= q_{01} * C\\
&= (\frac{4}{3}, -1, -2, \frac{2}{3})
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.44) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = -\frac{1}{6}, \ \ \beta_2 = \frac{1}{12}, \ \ \beta_3 = \frac{3}{8}, \beta_4 = 0,\\
&\gamma_1 = \frac{5}{8}, \ \ \gamma_2 = -\frac{1}{2}, \gamma_3 = -2, \ \ \gamma_4 = 1
\end{aligned}$$

ve (4.47) eşitliğinden ise

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{11}{40}, \ \ \alpha_2 = -\frac{13}{80}\\
&\alpha_3 = -\frac{19}{80}, \ \ \alpha_4 = \frac{41}{80}
\end{aligned}$$

sabitleri bulunur. Bulunan sabitlerin (4.31) ve (4.32) de yerine konulmasıyla

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{00}^{[1]} + U_{10}^{[1]}u + U_{01}^{[1]}v \\ &= (0, \frac{11}{40}, -\frac{13}{0}, 0) + (0, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 0)u + (0, \frac{5}{8}, -\frac{1}{2}, 0)v \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} U_2 &= U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]}u + U_{01}^{[2]}v \\ &= (0, -\frac{19}{80}, \frac{41}{80}, 0) + (0, \frac{3}{8}, 0, 0)u + (0, -2, 1, 0)v \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (4.53) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{00}^{[1]} &= q_{00} * U_{00}^{[1]} * \overline{q}_{00} = (\frac{11}{40}, -\frac{13}{80}, 0) \\ \mathbf{B}_{10}^{[1]} &= vec((q_{00} * U_{10}^{[1]} + 2q_{10} * U_{00}^{[1]}) * \overline{q}_{00}) = (\frac{7}{20}, \frac{1}{60}, \frac{57}{40}) \\ \mathbf{B}_{01}^{[1]} &= vec((q_{00} * U_{01}^{[1]} + 2q_{01} * U_{00}^{[1]}) * \overline{q}_{00}) = (\frac{17}{40}, \frac{21}{20}, -\frac{79}{40}) \\ \mathbf{B}_{11}^{[1]} &= 2vec(q_{01} * U_{00}^{[1]} * \overline{q}_{10} + q_{10} * U_{01}^{[1]} * \overline{q}_{00} + q_{01} * U_{10}^{[1]} * \overline{q}_{00}) = (-\frac{89}{24}, -\frac{551}{120}, \frac{11}{10}) \\ \mathbf{B}_{20}^{[1]} &= vec((q_{10} * U_{00}^{[1]} + 2q_{00} * U_{10}^{[1]}) * \overline{q}_{10}) = (\frac{145}{72}, \frac{1469}{720}, \frac{4}{15}) \\ \mathbf{B}_{02}^{[1]} &= vec((q_{01} * U_{00}^{[1]} + 2q_{00} * U_{01}^{[1]}) * \overline{q}_{01}) = (\frac{41}{8}, \frac{297}{40}, -\frac{13}{5}) \\ \mathbf{B}_{30}^{[1]} &= q_{10} * U_{10}^{[1]} * \overline{q}_{10}) = (-\frac{25}{18}, -\frac{43}{36}, -\frac{2}{3}) \\ \mathbf{B}_{03}^{[1]} &= q_{01} * U_{01}^{[1]} * \overline{q}_{01} = (\frac{55}{4}, \frac{35}{4}, \frac{15}{2}) \\ \mathbf{B}_{21}^{[1]} &= vec((q_{10} * U_{01}^{[1]} + 2q_{01} * U_{10}^{[1]}) * \overline{q}_{10} = (\frac{65}{8}, \frac{13}{2}, \frac{9}{2}) \\ \mathbf{B}_{12}^{[1]} &= vec((q_{01} * U_{10}^{[1]} + 2q_{10} * U_{01}^{[1]}) * \overline{q}_{01}) = (-\frac{215}{12}, -\frac{157}{12}, -\frac{21}{2}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{00}^{[2]} &= q_{00} * U_{00}^{[2]} * \overline{q}_{00} = (-\frac{19}{80}, \frac{41}{80}, 0) \\ \mathbf{B}_{10}^{[2]} &= vec((q_{00} * U_{10}^{[2]} + 2q_{10} * U_{00}^{[2]}) * \overline{q}_{00}) = (\frac{17}{40}, \frac{21}{20}, -\frac{79}{40}) \\ \mathbf{B}_{01}^{[2]} &= vec((q_{00} * U_{01}^{[2]} + 2q_{01} * U_{00}^{[2]}) * \overline{q}_{00}) = (\frac{50}{3}, \frac{31}{3}, \frac{34}{3}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{11}^{[2]} = 2vec(q_{01} * U_{00}^{[2]} * \overline{q}_{10} + q_{10} * U_{01}^{[2]} * \overline{q}_{00} + q_{01} * U_{10}^{[2]} * \overline{q}_{00}) = (\frac{41}{4}, \frac{297}{20}, -\frac{26}{5})$$

$$\mathbf{B}_{20}^{[2]} = vec((q_{10} * U_{00}^{[2]} + 2q_{00} * U_{10}^{[2]}) * \overline{q}_{10}) = (-\frac{89}{48}, -\frac{551}{240}, \frac{11}{20})$$

$$\mathbf{B}_{02}^{[2]} = vec((q_{01} * U_{00}^{[2]} + 2q_{00} * U_{01}^{[2]}) * \overline{q}_{01}) = (-2, -\frac{121}{10}, \frac{47}{10})$$

$$\mathbf{B}_{30}^{[2]} = q_{10} * U_{10}^{[2]} * \overline{q}_{10} = (\frac{65}{24}, \frac{13}{6}, \frac{3}{2})$$

$$\mathbf{B}_{03}^{[2]} = q_{01} * U_{01}^{[2]} * \overline{q}_{01} = (-50, -34, -12)$$

$$\mathbf{B}_{21}^{[2]} = vec((q_{10} * U_{01}^{[2]} + 2q_{01} * U_{10}^{[2]}) * \overline{q}_{10}) = (-\frac{215}{12}, -\frac{157}{12}, -\frac{21}{2})$$

$$\mathbf{B}_{12}^{[2]} = vec((q_{01} * U_{10}^{[2]} + 2q_{10} * U_{01}^{[2]})\overline{q}_{01}) = (\frac{165}{4}, \frac{105}{4}, \frac{45}{2})$$

bulunur. Lemma 4.2. den

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1(u,v) = (&\frac{11}{400} + \frac{7u}{20} + \frac{145u^2}{72} - \frac{25u^3}{18} + \frac{17v}{40} - \frac{89uv}{24} + \frac{65u^2v}{8} + \frac{41v^2}{8} - \frac{215uv^2}{12} + \frac{55v^3}{4},\\ &-\frac{13}{80} + \frac{u}{60} + \frac{1469u^2}{720} - \frac{43u^3}{36} + \frac{21v}{20} - \frac{551uv}{120} + \frac{13u^2v}{2} + \frac{297v^2}{40} - \frac{157uv^2}{12} + \frac{35v^3}{4},\\ &\frac{57u}{40} + \frac{4u^2}{15} - \frac{2u^3}{3} - \frac{79v}{40} + \frac{11uv}{10} + \frac{9u^2v}{2} - \frac{13v^2}{5} - \frac{21uv^2}{2} + \frac{15v^3}{2}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_2(u,v) = (&-\frac{19}{80} + \frac{17u}{40} - \frac{89u^2}{48} + \frac{65u^3}{24} + \frac{23v}{20} + \frac{41uv}{4} - \frac{215u^2v}{12} - 2v^2 + \frac{165uv^2}{4} - 50v^3,\\ &\frac{41}{80} + \frac{21u}{20} - \frac{551u^2}{240} + \frac{13u^3}{6} + \frac{23v}{20} + \frac{297uv}{20} - \frac{157u^2v}{12} - \frac{121v^2}{10} + \frac{105uv^2}{4} - 34v^3,\\ &-\frac{79u}{40} + \frac{11u^2}{20} + \frac{3u^3}{2} + \frac{49v}{20} - \frac{26uv}{5} - \frac{21u^2v}{2} + \frac{47v^2}{10} + \frac{45uv^2}{2} - 12v^3)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(u,v) = (&\frac{11u}{40} + \frac{7u^2}{40} + \frac{145u^3}{216} - \frac{25u^4}{72} - \frac{19v}{80} + \frac{17uv}{40} - \frac{89u^2v}{48} + \frac{65u^3v}{24} + \frac{23v^2}{40}\\ &+ \frac{41uv^2}{8} - \frac{215u^2v^2}{24} - \frac{2v^3}{3} + \frac{55uv^3}{4} - \frac{25v^4}{2}, -\frac{13u}{80} + \frac{u^2}{120} + \frac{1469u^3}{2160} - \frac{43u^4}{144}\\ &+ \frac{41v}{80} + \frac{21uv}{20} - \frac{551u^2v}{240} + \frac{13u^3v}{6} + \frac{23v^2}{40} + \frac{297uv^2}{40} - \frac{157u^2v^2}{24} - \frac{121v^3}{30}\\ &+ \frac{35uv^3}{4} - \frac{17v^4}{2}, \frac{57u^2}{80} + \frac{4u^3}{45} - \frac{u^4}{6} - \frac{79uv}{40} + \frac{11u^2v}{20} + \frac{3u^3v}{2} + \frac{49v^2}{40}\\ &- \frac{13uv^2}{5} - \frac{21u^2v^2}{4} + \frac{47v^3}{30} + \frac{15uv^3}{2} - 3v^4)\end{aligned}$$

yüzeyi bulunur. Bkz. Şekil 4.7. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$\mathbf{E} = -\frac{(-27+20u-30v)(-7+4u-18v)(3-5u^2+12v-60v^2+8u+30uv)^2}{34560},$$
$$\mathbf{F} = \frac{(-23-128u+80u^2-620uv+358v+960v^2)(3-5u^2+12v-60v^2+8u+30uv)^2}{11520},$$
$$\mathbf{G} = -\frac{(11+15u-40v)(-2+u-8v)(3-5u^2+12v-60v^2+8u+30uv)^2}{960},$$

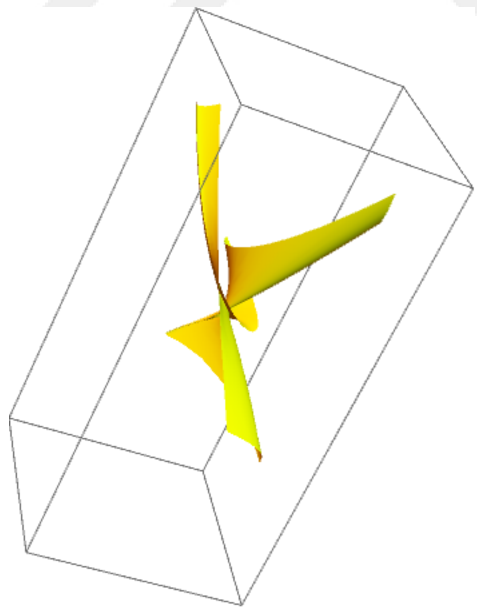
ve

$$\begin{aligned} g(\mathbf{N_1},\mathbf{N_1}) &= \mathbf{F}^2-\mathbf{EG} \\ &= \frac{(3-5u^2+12v-60v^2+8u+30uv)^4(-131+40u^2-240uv-194v+480v^2)^2}{132710400} > 0 \end{aligned}$$

olduğundan yüzeyimiz timelike yüzeydir. Ayrıca

$$\|(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v)(u,v)\|_* = \frac{\left(-5u^2+30uv+8u-60v^2+12v+3\right)^2\left|40u^2-240uv+6u+480v^2-194v-131\right|}{11520}$$

olduğundan bu yüzey bir timelike kuartik polinom PN yüzeyidir.



Şekil 4.7. Timelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi

4.1.2.2. Özel Çift Dereceli Timelike Polinom PN Yüzeyler

(4.36) eşitliği ile verilen n. dereceden q split kuaterniyonunun q_{ij} katsayıları arasında bazı bağıntılar vardır.
$n = 1$ durumu için $\psi_0 = 0$ ve $c_3 \neq 0$ olmak üzere $C = (c_0, 0, 0, c_3)$ split kuaterniyonu için (4.51) ve (4.52) eşitliklerini sağlayan U_1 ve U_2 lineer split kuaterniyon polinomlarını ele alalım. Bu durumda (4.36) eşitliğinde $\psi_0 = 0$ ve $q_{10} = q_{01} * C$ eşitliklerinin yerine yazılmasıyla

$$2q_{01} * C * U_2 - 2q_{01} * C * U_2 + q * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0$$

olup, buradan

$$q * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0$$

dir. Dolayısıyla

$$(U_1)_v = (U_2)_u$$

elde edilir.

Teorem 4.11. (2.3) eşitliği ile verilen split kuaterniyon polinomundaki katsayılar $c_3 \neq 0$ olmak üzere $C = (c_0, 0, 0, c_3)$ split kuaterniyonu için

$$(j+1)q_{i(j+1)} * C = (i+1)q_{(i+1)j}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, j = 0, 1, \cdots, n-i-1$$

ve

$$U_2(u, v) = (0, \alpha_3, \alpha_4, 0) + C * (0, \gamma_3, \gamma_4, 0)u + (0, \gamma_3, \gamma_4, 0)v$$
$$U_1(u, v) = C * U_2(u, v)$$

eşitliklerini sağlasın. Bu durumda, (4.34) eşitliği ve Lemma 4.1. ile tanımlanan parametrik S yüzeyi birim normali $\mathbf{N} = e_3$ olan $2n + 2$ dereceli bir timelike polinom PN yüzeyidir.

4.2. Timelike Polinom PN Yüzeyinin Ortalama Eğriliği

(4.16), (4.31) ve (4.32) eşitlileri ile tanımlanan U_1 ve U_2 vektörlerini ele alalım. (4.1) eşitliğinden türetilen bir timelike polinom PN yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= g\left(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_u\right) \\ &= g(q * U_1 * \overline{q}, q * U_1 * \overline{q}) \\ &= \|q\|_*^4 \, g(U_1, U_1) \\ &= -\|q\|_*^4 \, \|U_1\|_*^2 ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= g\left(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v\right) \\ &= g(q * U_1 * \overline{q}, q * U_2 * \overline{q}) \\ &= \|q\|_*^4 \, g(U_1, U_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= g\left(\mathbf{S}_v, \mathbf{S}_v\right) \\ &= g(q * U_2 * \overline{q}, q * U_2 * \overline{q}) \\ &= \|q\|_*^4 \, g(U_2, U_2) \\ &= -\|q\|_*^4 \, \|U_2\|_*^2\end{aligned}$$

ve ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= g\left(\mathbf{S}_{uu}, \mathbf{N}\right) \\ &= \left(vec[(2q_u * U_1 + q * (U_1)_u) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= g\left(\mathbf{S}_{uv}, \mathbf{N}\right) \\ &= \left(vec[(2q_v * U_1 + q * (U_1)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\ &= g\left(\mathbf{S}_{vu}, \mathbf{N}\right) \\ &= \left(vec[(2q_u * U_2 + q * (U_2)_u) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= g\left(\mathbf{S}_{vv}, \mathbf{N}\right) \\ &= \left(vec[(2q_v * U_2 + q * (U_2)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right),\end{aligned}$$

dir. Burada $\mathbf{N}$ timelike polinom PN yüzeyinin birim normalidir. Bir sonra ki Lemma, Teorem 4.3. ve Teorem 4.11. i sağlayan bir polinom PN yüzeyi için ortalama eğrilik fonksiyonunu ifade eder.

Lemma 4.12. Tek dereceli split polinom PN yüzeyi için Teorem 4.3. ve çift dereceli split polinom PN yüzeyi için Teorem 4.11. sağlansın. O zaman, bu polinom PN yüzeylerinin ortalama eğrilikleri özdeş olarak sıfırdır.

İspat. Ortalama eğrilik özdeş olarak sıfırdır gerek ve yeter koşul $\mathbf{En} + \mathbf{Gl} - 2\mathbf{Fm} = 0$ dir.

$$\begin{aligned}\mathbf{En} &= -\left\|q\right\|_*^4 \left\|U_1\right\|_*^2 g\left(vec[(2q_v * U_2 + q * (U_2)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\ &= -\left\|q\right\|_*^4 \left\|U_1\right\|_*^2 g\left(vec[(2q_v * U_1 * U_1^{-1} * U_2 + q * (U_2)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\ &= -\left\|q\right\|_*^4 \left\|U_1\right\|_*^2 g\left(vec[(2q_v * U_1 * \frac{\overline{U_1}}{\left\|U_1\right\|_*^2} * U_2 + q * (U_2)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\ &= -2\left\|q\right\|_*^4 g\left(vec(q_v * U_1 * \overline{U_1} * U_2 * \overline{q}), \mathbf{N}\right) - \left\|q\right\|_*^4 \left\|U_1\right\|_*^2 g\left(vec(q * (U_2)_v * \overline{q}), \mathbf{N}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Gl} &= -\left\|q\right\|_*^4 \left\|U_2\right\|_*^2 g\left(vec[(2q_u * U_1 + q * (U_1)_u) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\ &= -\left\|q\right\|_*^4 \left\|U_2\right\|_*^2 g\left(vec[(2q_u * U_2 * U_2^{-1} * U_1 + q * (U_1)_u) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\ &= -\left\|q\right\|_*^4 \left\|U_2\right\|_*^2 g\left(vec[(2q_u * U_2 * \frac{\overline{U_2}}{\left\|U_2\right\|_*^2} * U_1 + q * (U_1)_u) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\ &= -2\left\|q\right\|_*^4 g\left(vec(q_u * U_2 * \overline{U_2} * U_1 * \overline{q}), \mathbf{N}\right) - \left\|q\right\|_*^4 \left\|U_2\right\|_*^2 g\left(vec(q * (U_1)_u * \overline{q}), \mathbf{N}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}-2\mathbf{Fm} &= -2\left\|q\right\|_*^4 g\left(U_1, U_2\right)\left(vec[(2q_v * U_1 + q * (U_1)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\ &= -4\left\|q\right\|_*^4 g\left(U_1, U_2\right) g\left(vec(q_v * U_1 * \overline{q}), \mathbf{N}\right) - 2\left\|q\right\|_*^4 g\left(U_1, U_2\right) g\left(vec(q * (U_1)_v * \overline{q}), \mathbf{N}\right))\end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\mathbf{En}+\mathbf{Gl}-2\mathbf{Fm} &= 2\left\|q\right\|_*^4 g\left(vec[q_v * U_1 * (-\overline{U_1}U_2-\overline{U_2}U_1-2g\left(U_1,U_2\right))\overline{q}],\mathbf{N})\right) \\
&+\left\|q\right\|_*^4 g\left(vec[q(-\left\|U_1\right\|_*^2(U_2)_v-\left\|U_2\right\|_*^2(U_1)_u-2g(U_1,U_2)(U_1)_v)\overline{q}],\mathbf{N}\right)
\end{aligned}
$$

dir. Bu eşitliğin sıfır olduğunu göstermek için eşitliğin sağındaki iki terimin ayrı ayrı sıfır olduğu gösterilmelidir. İlk terim için,

$$
\begin{aligned}
-\overline{U_1}*U_2-\overline{U_2}*U_1-2g\left(U_1,U_2\right) &= U_1*U_2+U_2*U_1-2g\left(U_1,U_2\right) \\
&= g\left(U_1,U_2\right)+U_1\times U_2+g\left(U_1,U_2\right)+U_2\times U_1-2g\left(U_1,U_2\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dir. Diğer terim ise tek dereceli yüzeylerde U_1 ve U_2 sabit kuaterniyon olduğunda sıfırdır. Çift dereceli yüzeyler de ise $U_1=CU_2$ ve $(U_1)_v=(U_2)_u$ eşitlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
-\left\|U_1\right\|_*^2(U_2)_v-\left\|U_2\right\|_*^2(U_1)_u-2g(U_1,U_2)(U_1)_v &= -\left\|U_1\right\|_*^2 C^{-1}*(U_2)_u-\left\|U_2\right\|_*^2 C*(U_2)_u-2g(U_1,U_2)(U_2)_u \\
&= \left[-\left\|U_1\right\|_*^2 U_2*{U_1}^{-1}-\left\|U_2\right\|_*^2 U_1*{U_2}^{-1}-2g(U_1,U_2)\right]*(U_2)_u \\
&= \left[-\left\|U_1\right\|_*^2 U_2*\frac{\overline{U_1}}{\left\|U_1\right\|_*^2}-\left\|U_2\right\|_*^2 U_1*\frac{\overline{U_2}}{\left\|U_2\right\|_*^2}-2g(U_1,U_2)\right]*(U_2)_u \\
&= \left[-\overline{U_1}*U_2-\overline{U_2}*U_1-2g\left(U_1,U_2\right)\right]*(U_2)_u \\
&= \left[U_1*U_2+U_2*U_1-2g\left(U_1,U_2\right)\right]*(U_2)_u \\
&= \left[g\left(U_1,U_2\right)+U_1\times U_2+g\left(U_1,U_2\right)+U_2\times U_1-2g\left(U_1,U_2\right)\right]*(U_2)_u \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda, çift dereceli polinom PN yüzeyleri için de ispat tamamlanır.

Örnek 4.13. Kontrol noktalarından ikisi

$$q_{00}=(1,0,0,0),\quad q_{01}=(3,4,2,1)$$

ve

$$C=(2,0,0,1)$$

seçilirse, $c_1 = c_2 = 0$ olduğundan son kontrol noktası

$$\begin{aligned} q_{10} &= q_{01} * C \\ &= (7, 6, 0, 5) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (2.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} q &= q_{00} + q_{10}u + q_{01}v \\ &= (7u + 3v + 1, 6u + 4v, 2v, 5u + v) \end{aligned}$$

dir. (4.50) eşitliğinden

$$\begin{aligned} U_{10}^{[2]} &= C * U_{01}^{[2]} \\ &= (0, 8, 7, 0) \end{aligned}$$

olup (4.32) eşitliğinde yerine yazılması ile

$$\begin{aligned} U_2 &= U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]}u + U_{01}^{[2]}v \\ &= (0, 8u + 3v + 2, 7u + 2v + 1, 0) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.52) eşitliğinden de

$$\begin{aligned} U_1 &= C * U_2 \\ &= (0, 2(8u + 3v + 2) + 7u + 2v + 1, 2(7u + 2v + 1) + 8u + 3v + 2, 0) \end{aligned}$$

bulunur. (4.34) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= q * U_1 * \overline{q} \\ &= (4070u^3 + 4110u^2v + 1372u^2 + 1410uv^2 + 944uv + 133u + 170v^3 + 172v^2 + 46v + 5, \\ &= 2446u^3 + 2478u^2v + 1040u^2 + 858uv^2 + 712uv + 128u + 106v^3 + 128v^2 + 41v + 4, \\ &= 3228u^3 + 3204u^2v + 900u^2 + 1044uv^2 + 576uv + 48u + 108v^3 + 84v^2 + 12v) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_2 &= q * U_2 * \overline{q} \\
&= (1370u^3 + 1410u^2v + 472u^2 + 510uv^2 + 344uv + 46u + 70v^3 + 72v^2 + 17v + 2, \\
&= 826u^3 + 858u^2v + 356u^2 + 318uv^2 + 256uv + 41u + 46v^3 + 52v^2 + 12v + 1, \\
&= 1068u^3 + 1044u^2v + 288u^2 + 324uv^2 + 168uv + 12u + 28v^3 + 16v^2)
\end{aligned}
$$

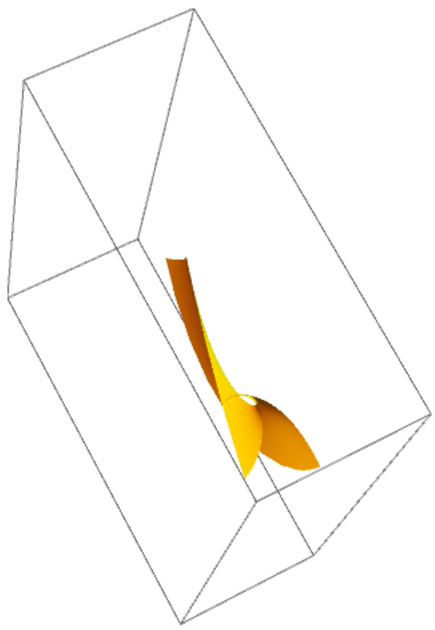
dir. Lemma 4.1. den

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}(u,v) = (&\frac{2035u^4}{2} + 2740u^3v + \frac{1372u^3}{3} + 1410u^2v^2 + 944u^2v + \frac{133u^2}{2} + 340uv^3 + 344uv^2 + 92uv + 5u \\
&+ \frac{35v^4}{2} + 24v^3 + \frac{17v^2}{2} + 2v, \frac{1223u^4}{2} + 1652u^3v + \frac{1040u^3}{3} + 858u^2v^2 + 712u^2v + 64u^2 + 212uv^3 \\
&+ 256uv^2 + 82uv + 4u + \frac{23v^4}{2} + \frac{52v^3}{3} + 6v^2 + v, 807u^4 + 2136u^3v + 300u^3 + 1044u^2v^2 + 576u^2v \\
&+ 24u^2 + 216uv^3 + 168uv^2 + 24uv + 7v^4 + \frac{16v^3}{3})
\end{aligned}
$$

yüzeyi bulunur. Bkz. Şekil 4.8. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -3(u+v+1)(15u+5v+3)\left(80uv + 2u(30u+7) + 20v^2 + 6v + 1\right)^2, \\
\mathbf{F} &= -2(u+v+1)(15u+5v+3)\left(80uv + 2u(30u+7) + 20v^2 + 6v + 1\right)^2 \\
\mathbf{G} &= -(u+v+1)(15u+5v+3)\left(80uv + 2u(30u+7) + 20v^2 + 6v + 1\right)^2
\end{aligned}
$$

ve yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları



Şekil 4.8. Özel Timelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi

$$\mathbf{l} = -264u - 84v - 48,$$
$$\mathbf{m} = -84u - 24v - 12,$$
$$\mathbf{n} = -24u - 4v$$

dir. Buradan

$$\mathbf{En} + \mathbf{Gl} - 2\mathbf{Fm} = 0$$

ve

$$\begin{aligned} g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1}) &= \mathbf{F}^2 - \mathbf{EG} \\ &= (u+v+1)^2(15u+5v+3)^2\left(80uv + 2u(30u+7) + 20v^2 + 6v + 1\right)^4 \end{aligned}$$

olduğundan yüzeyimiz timelike minimal yüzeydir. Ayrıca

$$\|(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v)(u,v)\|_* = |u+v+1|\,|15u+5v+3|\left(80uv + 2u(30u+7) + 20v^2 + 6v + 1\right)^2$$

olduğundan bu yüzey bir özel timelike kuartik polinom PN yüzeyidir.

4.3. Spacelike Polinom PN Yüzeyi

(2.3) formunda verilen bir $q(u,v)$ split kuaterniyon polinomu yardımıyla birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_1$$

olan $\mathbf{S} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1^3$ split polinom parametrik yüzeyi elde edilecektir. Burada $\mathbf{e}_1$, (2.4) eşitliğideki gibi tanımlı ve $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbf{S}$ yüzeyinin uyarlanmış çatısıdır. $\mathbf{S}$ yüzeyinin teğet düzlemi her (u,v) parametresi için $\mathbf{h}_2(u,v)$ ve $\mathbf{h}_3(u,v)$ vektörleri tarafından gerilir. Bundan ötürü, $\mathbf{S}_u$ ve $\mathbf{S}_v$,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u &= \varphi_5\mathbf{h}_2 + \varphi_6\mathbf{h}_3 = \mathbf{g}_1, \\ \mathbf{S}_v &= \varphi_7\mathbf{h}_2 + \varphi_8\mathbf{h}_3 = \mathbf{g}_2 \end{aligned} \tag{4.54}$$

formunda yazılabilir. Burada φ_i, $5 \leq i \leq 8$, iki değişkenli polinom ya da rasyonel fonksiyon, $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ iki değişkenli polinomlardır. $\mathbf{S}$ nin yüzey belirtmesi için

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u} \tag{4.55}$$

olmalıdır. Eğer $\mathbf{S}$ bir yüzey ise

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= g\left(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_u\right) = g(\varphi_5\mathbf{h}_2 + \varphi_6\mathbf{h}_3, \varphi_5\mathbf{h}_2 + \varphi_6\mathbf{h}_3) \\ &= \varphi_5^2 g(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_2) + 2\varphi_5\varphi_6 g(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3) + \varphi_6^2 g(\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_3) \\ &= (\varphi_5^2 + \varphi_6^2) \left\| q \right\|_*^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= g\left(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v\right) = g(\varphi_5\mathbf{h}_2 + \varphi_6\mathbf{h}_3, \varphi_7\mathbf{h}_2 + \varphi_8\mathbf{h}_3) \\ &= \varphi_5\varphi_7 g(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_2) + (\varphi_5\varphi_8 + \varphi_6\varphi_7) g(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3) + \varphi_6\varphi_8 g(\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_3) \\ &= (\varphi_5\varphi_7 + \varphi_6\varphi_8) \left\| q \right\|_*^4 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= g\left(\mathbf{S}_v, \mathbf{S}_v\right) = g(\varphi_7\mathbf{h}_2 + \varphi_8\mathbf{h}_3, \varphi_7\mathbf{h}_2 + \varphi_8\mathbf{h}_3) \\ &= \varphi_5^2 g(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_2) + 2\varphi_7\varphi_8 g(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3) + \varphi_8^2 g(\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_3) \\ &= \left({\varphi_7}^2 + {\varphi_8}^2\right) \|q\|_*^4\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1}) = \mathbf{F}^2 - \mathbf{EG} = -(\varphi_5\varphi_8 - \varphi_6\varphi_7)^2 \|q\|_*^8$$

olduğundan oluşan bu yüzey spacelikedır.

Lemma 4.14. g_1 ve g_2 (4.55) eşitliğini sağlayan iki polinom fonksiyonu olsun. O zaman, $\mathbf{S}_u = \mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{S}_v = \mathbf{g}_2$ olacak şekilde bir $\mathbf{S}$ yüzeyi vardır ve

$$\mathbf{S}(u,v) = \frac{1}{2}\int_0^u (\mathbf{g}_1(u,v) + \mathbf{g}_1(u,0))du + \frac{1}{2}\int_0^v (\mathbf{g}_2(u,v) + \mathbf{g}_2(0,v))dv + \mathbf{S}(0,0) \tag{4.56}$$

formundadır.

Lemma 4.1. in ispatına benzer olduğundan burada ispata yer verilmemiştir.

Bir sonra ki lemma, Lemma 4.14. de tanımlanan $\mathbf{S}$ yüzeyi için farklı bir yol gösterir.

Lemma 4.15. Kabul edelim ki,

$$\mathbf{g}_l(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i} \mathbf{B}_{ij}^{[l]} u^i v^j, l = 1,2 \tag{4.57}$$

olsun. O zaman (4.55) eşitliği doğrudur gerek ve yeter koşul

$$(j+1)\mathbf{B}_{i(j+1)}^{[1]} = (i+1)\mathbf{B}_{(i+1)j}^{[2]}, \quad i = 0,1,...,m-1, \quad j = 0,1,...,m-1-i \tag{4.58}$$

dir. Ayrıca (4.56) eşitliğiyle tanımlı $\mathbf{S}$ yüzeyi

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{m+1-i} \mathbf{S}_{ij} u^i v^j \tag{4.59}$$

formundadır. Burada

$$\begin{array}{ll} \mathbf{S}_{i0} = \frac{1}{i}\mathbf{B}^{[1]}_{(i-1)0}, \mathbf{S}_{0i} = \frac{1}{i}\mathbf{B}^{[2]}_{0(i-1)}, & i = 1, 2, ..., m+1 \\ \mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{i}\mathbf{B}^{[1]}_{(i-1)j} = \frac{1}{j}\mathbf{B}^{[2]}_{i(j-1)}, & i = 1, 2, ..., m \qquad j = 1, 2, ..., m+1-i \end{array} \tag{4.60}$$

ve $\mathbf{S}_{00}$ keyfi bir sabittir.

Lemma 4.2. nin ispatına benzer olduğundan burada ispata yer verilmemiştir.

(2.1) eşitliği ile verilen q split kuaterniyon polinomu (4.55) eşitliğini sağlıyorsa Lemma 4.14. ve Lemma 4.15. yardımı ile elde edilen $\mathbf{S}$ yüzeyi bir polinom PN yüzeyi ifade eder. Böyle bir yüzeyin derecesi

$$2der(q) + \max_{i=1,2,3,4}(der(\varphi_i)) + 1 \tag{4.61}$$

dir.

Özel olarak, φ_i ler birersabit olarak seçilirse, $2der(q) + 1$ dereceli bir split polinom PN yüzeyi elde edilir. $\mathbf{S}(u, v)$ yüzeyinin $v = v_0 = sbt$ için $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{S}(u, v_0)$ parametre eğrisinin hodografı için

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r_1}'(u), \mathbf{r_1}'(u)) &= g(\varphi_5\mathbf{h}_2(u, v_0) + \varphi_6\mathbf{h}_3(u, v_0), \varphi_5\mathbf{h}_2(u, v_0) + \varphi_6\mathbf{h}_3(u, v_0)) \\ &= \varphi_5^2 g(\mathbf{h}_2(u, v_0), \mathbf{h}_2(u, v_0)) + 2\varphi_5\varphi_6 g(\mathbf{h}_2(u, v_0), \mathbf{h}_3(u, v_0)) + \varphi_6^2 g(\mathbf{h}_3(u, v_0), \mathbf{h}_3(u, v_0)) \\ &= \varphi_5^2 \left\|q\right\|_*^4 + \varphi_6^2 \left\|q\right\|_*^4 \\ &= \left\|q\right\|_*^4 (\varphi_5^2 + \varphi_6^2) \end{aligned}$$

dir. φ_5 ve φ_6 birer sabit olduğundan $\mathbf{r}_1$ parametre eğrisi $\mathbf{S}(u, v)$ polinom PN yüzeyi üzerinde yatan bir diğer PH eğrisidir. Benzer şekilde $\mathbf{S}(u, v)$ yüzeyinin $u = u_0 = sbt$ için $\mathbf{r}_2(v) = \mathbf{S}(u_0, v)$ parametre eğrisinin hodografı için

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r_1}'(v), \mathbf{r_1}'(v)) &= g(\varphi_7\mathbf{h}_2(u_0, v) + \varphi_8\mathbf{h}_3(u_0, v), \varphi_7\mathbf{h}_2(u_0, v) + \varphi_8\mathbf{h}_3(u_0, v)) \\ &= \varphi_7^2 g(\mathbf{h}_2(u_0, v), \mathbf{h}_2(u_0, v)) + 2\varphi_7\varphi_8 g(\mathbf{h}_2(u_0, v), \mathbf{h}_3(u_0, v)) + \varphi_8^2 g(\mathbf{h}_3(u_0, v), \mathbf{h}_3(u_0, v)) \\ &= \varphi_7^2 \left\|q\right\|_*^4 + \varphi_8^2 \left\|q\right\|_*^4 \\ &= \left\|q\right\|_*^4 (\varphi_7^2 + \varphi_8^2) \end{aligned}$$

dir. φ_7 ve φ_8 birer sabit olduğundan $\mathbf{r}_2$ parametre eğrisi $\mathbf{S}(u,v)$ polinom PN yüzeyi üzerinde yatan bir PH eğrisidir.

Çift dereceli bir polinom PN yüzeyini oluşturmak için φ_i ler tek dereceli polinomlar olarak seçilmelidir. Özel olarak, φ_i birinci dereceden fonksiyon olarak seçilirse $2der(q)+2$ dereceden polinom PN yüzeyi elde edilir.

(4.55) eşitliği keyfi φ_i fonksiyonları ve (2.3) ve (4.54) eşitlikleri ile tanımlanan keyfi split kuaterniyon polinomları için her zaman sağlanmaz.

4.3.1. Tek Dereceli Spacelike Split Polinom PN Yüzeyinin Yapısı

(2.3) formunda verilen bir $q(u,v)$ split kuaterniyon polinomu ve (4.54) eşitliğiyle tanımlı $\mathbf{h}_i$, $(1 \leq i \leq 4)$ dönüşümünü ele alalım.

$$\begin{aligned} U_1 &= \varphi_5\mathbf{j} + \varphi_6\mathbf{k}, \\ U_2 &= \varphi_7\mathbf{j} + \varphi_8\mathbf{k} \end{aligned} \tag{4.62}$$

gibi iki split kuaterniyon seçilir ve ilk olarak

$$\varphi_i(u,v) = \alpha_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 5,6,7,8 \tag{4.63}$$

alınır ve (4.55) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \varphi_5\mathbf{h}_2 + \varphi_6\mathbf{h}_3 \\ &= \varphi_5(q * \mathbf{j} * \overline{q}) + \varphi_6(q * \mathbf{k} * \overline{q}) \\ &= q * (\varphi_5\mathbf{j} + \varphi_6\mathbf{k}) * \overline{q} \\ &= q * U_1 * \overline{q} \end{aligned} \tag{4.64}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2 &= \varphi_7\mathbf{h}_2 + \varphi_8\mathbf{h}_3 \\ &= \varphi_7(q * \mathbf{j} * \overline{q}) + \varphi_8(q * \mathbf{k} * \overline{q}) \\ &= q * (\varphi_7\mathbf{j} + \varphi_8\mathbf{k}) * \overline{q} \\ &= q * U_2 * \overline{q} \end{aligned} \tag{4.65}$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$,

$$\mathbf{B}_{i,j}^{[l]} = \sum_{k=\max\{0,i-n\}}^{\min\{i,n\}} \sum_{r=\max\{0,j+i-n-k\}}^{\min\{j,n-k\}} q_{kr} * U_l * \overline{q}_{(i-k)(j-r)}, \quad l = 1, 2. \tag{4.66}$$

eşitliğinde $m = 2n$ alınarak (4.57) eşitliğindeki gibi ifade edilebilir.

Lemma 4.14. ve Lemma 4.15. den $m = 2n$ için q split kuaterniyon polinomu (4.58) eşitliği sağlandığında $n(2n+1)$ vektör denklemli bir polinom PN yüzeyi belirtir. Bu denklemlerin $\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix}$ kombinasyonlu kuaterniyon katsayıları ve dört α_i parametresi arasında lineer olmayan bağıntılar vardır.

$n \geq 2$ için q split kuaterniyon polinomu $4\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} + 4$ serbest parametre ile $3n(2n+1)$ skalar denkleme sahip olunduğundan bir çözüm bulunamaz.

$\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ nin kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} &= q_v * U_1 * \overline{q} + q * U_1 * \overline{q}_v \\ &= q_v * U_1 * \overline{q} - \overline{q_v * U_1 * \overline{q}} \\ &= 2vec(q_v * U_1 * \overline{q}) \end{aligned} \tag{4.67}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u} &= q_u * U_2 * \overline{q} + q * U_2 * \overline{q}_u \\ &= q_u * U_2 * \overline{q} - \overline{q_u * U_2 * \overline{q}} \\ &= 2vec(q_u * U_2 * \overline{q}) \end{aligned} \tag{4.68}$$

formundadır. Burada (4.55) eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul

$$vec(q_v * U_1 * \overline{q}) - vec(q_u * U_2 * \overline{q}) = 0$$

olup,

$$vec((q_v * U_1 - q_u * U_2) * \overline{q}) = 0 \tag{4.69}$$

dir. (4.69) eşitliği doğrudur gerek ve yeter şart

$$q_v * U_1 - q_u * U_2 = \psi q \tag{4.70}$$

dir. Burada $\psi = \psi_0$ bir skalar fonksiyondur. (4.64) eşitliğinin sol tarafı $n-1$ dereceli bir split kuaterniyon polinomu olduğundan, ψ rasyoneldir ve payının derecesi paydasının derecesinden bir derece eksiktir. Özellikle $\psi \equiv 0$ durumunda aşağıdaki teorem verilen yüzey için bir çözümü verir.

Teorem 4.16. (2.3) eşitliği ile verilen q split kuaterniyon polinomunun katsayıları
$i = 0, 1, \cdots, n-1, j = 0, 1, \cdots, n-i-1$ için

$$(j+1)q_{i(j+1)} * U_1 = (i+1)q_{(i+1)j} * U_2 \tag{4.71}$$

eşitliğini sağlıyorsa, (4.56), (4.64) ve (4.65) eşitlikleri ile tanımlı $\mathbf{S}$ parametrik yüzeyi

$$\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v = (-\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)\|q\|_*^2\mathbf{h}_1, \quad \mathbf{N} = \mathbf{e}_1 \tag{4.72}$$

olacak şekilde $2n+1$ dereceli bir polinom PN yüzeyidir.

İspat. (4.70) eşitliği, (4.66) eşitliği ve Lemma 4.15. yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$q_v * U_1 - q_u * U_2 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1-i}((j+1)q_{i(j+1)} * U_1 - (i+1)q_{(i+1)j} * U_2)u^i v^j.$$

(4.70) eşitliğinden $\psi \equiv 0$ seçilirse (4.55) elde edilir. Ayrıca (4.56) eşitliği ile verilen yüzey $\mathbf{S}_u = \mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{S}_v = \mathbf{g}_2$ kısmi türevlerine sahiptir. Dahası

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v &= (\alpha_1\mathbf{h}_2 + \alpha_2\mathbf{h}_3) \times (\alpha_3\mathbf{h}_2 + \alpha_4\mathbf{h}_3) \\
&= (\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)(\mathbf{h}_2 \times \mathbf{h}_3) \\
&= (-\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)\|q\|_*^2\mathbf{h}_1
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.16. sadece bir polinom PN yüzeyinin varolabilmesi için gerekli şartları ifade eder. (4.71) eşitliğinin açık hali aşağıdaki lemma ile verilebilir.

Lemma 4.17. (4.71) eşitliğini sağlar gerek ve yeter şart

$$q_{\lceil \frac{r}{2}\rceil + t\ \lfloor \frac{r}{2}\rfloor - t} = \frac{(\lceil \frac{r}{2}\rceil)!\,(\lfloor \frac{r}{2}\rfloor)!}{(\lceil \frac{r}{2}\rceil + t)!\,(\lfloor \frac{r}{2}\rfloor - t)!}Q_r * (U_1 * U_2^{-1})^t, \quad t = -\left\lceil \frac{r}{2}\right\rceil, \cdots, \left\lfloor \frac{r}{2}\right\rfloor$$

dir. Burada $r = 1, 2, \cdots, n$ için Q_r keyfi bir split kuaterniyondur.

4.3.1.1. Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi

Bir spacelike kübik polinom PN yüzeyi oluşturulurken $n = 1$ için (2.3) eşitliğiyle ifade edilen q split kuaterniyon polinomunu alınırsa, Lemma 4.16. de $r = 1$ için $t = -1, 0$ olup kontrol noktaları

$$\begin{aligned} & q_{00}, \\ & q_{10} = Q_1, \\ & q_{01} = Q_1 * U_2 * U_1^{-1} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Q_1 yerine $Q_1 * U_2^{-1}$ seçilirse kontrol noktaları

$$\begin{aligned} & q_{00}, \\ & q_{10} = Q_1 * U_2^{-1}, \\ & q_{01} = Q_1 * U_1^{-1} \end{aligned} \tag{4.73}$$

elde edilir. (4.66) ifadesinde $k = 0, 1$ ve $l = 1, 2$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{00}^{[l]} &= q_{00} * U_l * \overline{q}_{00}, \\ \mathbf{B}_{(1-k)k}^{[l]} &= 2vec(q_{00} * U_l * \overline{q}_{(1-k)k}), \\ \mathbf{B}_{11}^{[l]} &= 2vec(q_{01} * U_l * \overline{q}_{10}), \\ \mathbf{B}_{(2-2k)2k}^{[l]} &= q_{(1-k)k} * U_l * \overline{q}_{(1-k)k} \end{aligned} \tag{4.74}$$

dir. Dolayısıyla Lemma 4.15. yardımıyla spacelike kübik bir polinom PN yüzeyi elde edilir.

Örnek 4.18. Kontrol noktalarını belirleyebilmek için

$$q_{00} = (1, 0, 0, 0), \quad Q_1 = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$$

ve

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{8}, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{24}$$

serbest parametreleri seçilir ve bu parametreler (4.62) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$U_1 = (0, 0, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}), \quad U_2 = (0, 0, \frac{1}{8}, -\frac{1}{24})$$

olup, (4.73) eşitliğinden kontrol noktaları

$$\begin{aligned}
&q_{00} = (1, 0, 0, 0), \\
&q_{10} = Q_1 * U_2^{-1} = (-\frac{17}{5}, \frac{21}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{42}{5}), \\
&q_{01} = Q_1 * U_1^{-1} = (-\frac{9}{10}, -\frac{1}{30}, 1, 1)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.74) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_{00}^{[1]} = q_{00} * U_1 * \overline{q}_{00} = (0, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}) \\
&\mathbf{B}_{10}^{[1]} = 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{10}) = (\frac{12}{5}, \frac{23}{5}, \frac{36}{5}) \\
&\mathbf{B}_{01}^{[1]} = 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{01}) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}) \\
&\mathbf{B}_{11}^{[1]} = 2vec(q_{01} * U_1 * \overline{q}_{10}) = (-\frac{26}{5}, \frac{117}{10}, \frac{25}{6}) \\
&\mathbf{B}_{20}^{[1]} = q_{10} * U_1 * \overline{q}_{10} = (\frac{1182}{25}, -\frac{1039}{50}, \frac{543}{10}) \\
&\mathbf{B}_{02}^{[1]} = q_{01} * U_1 * \overline{q}_{01} = (-\frac{11}{6}, \frac{629}{360}, -\frac{131}{120})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_{00}^{[2]} = q_{00} * U_2 * \overline{q}_{00} = (0, \frac{1}{8}, -\frac{1}{24}) \\
&\mathbf{B}_{10}^{[2]} = 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{10}) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{}{3}) \\
&\mathbf{B}_{01}^{[2]} = 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{01}) = (\frac{1}{3}, -\frac{41}{180}, \frac{1}{15}) \\
&\mathbf{B}_{11}^{[2]} = 2vec(q_{01} * U_2 * \overline{q}_{10}) = (-\frac{11}{3}, \frac{629}{180}, -\frac{131}{60}) \\
&\mathbf{B}_{20}^{[2]} = q_{10} * U_2 * \overline{q}_{10} = (-\frac{13}{5}, \frac{117}{20}, \frac{25}{12}) \\
&\mathbf{B}_{02}^{[2]} = q_{01} * U_2 * \overline{q}_{01} = (-\frac{53}{180}, \frac{673}{3600}, -\frac{2983}{10800})
\end{aligned}$$

olup, Lemma 4.15. den

$$\mathbf{g}_1(u,v) = (\frac{12u}{5} + \frac{1182u^2}{25} + 2v - \frac{26uv}{5} - \frac{11v^2}{6}, \frac{1}{4} + \frac{23u}{5} - \frac{1039u^2}{50} - \frac{v}{2} + \frac{117uv}{10} + \frac{629v^2}{360}, -\frac{3}{4} + \frac{36u}{5} - \frac{543u^2}{10} + \frac{4v}{3} + \frac{25uv}{6} - \frac{131v^2}{120}),$$

$$\mathbf{g}_2(u,v) = (2u - \frac{13u^2}{5} + \frac{v}{3} - \frac{11uv}{3} - \frac{53v^2}{180}, \frac{1}{8} - \frac{u}{2} + \frac{117u^2}{20} - \frac{41v}{180} + \frac{629uv}{180} + \frac{673v^2}{3600}, -\frac{1}{24} + \frac{4u}{3} + \frac{25u^2}{12} + \frac{v}{15} - \frac{131uv}{60} - \frac{2983v^2}{10800})$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(u,v) = (&\frac{394u^3}{25} - \frac{13u^2v}{5} + \frac{6u^2}{5} - \frac{11uv^2}{6} + 2uv - \frac{53v^3}{540} + \frac{v^2}{6},\\ &-\frac{1039u^3}{150} + \frac{23u^2}{10} + \frac{629uv^2}{360} - \frac{uv}{2} + \frac{117u^2v}{20} + \frac{u}{4} - \frac{673v^3}{10800} - \frac{41v^2}{360} + \frac{v}{8},\\ &+\frac{181u^3}{10} + \frac{25u^2v}{12} + \frac{18u^2}{5} - \frac{3u}{4} + \frac{4uv}{3} - \frac{v}{24} - \frac{131uv^2}{20} + \frac{v^2}{30} - \frac{2983v^3}{32400})\end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir. Bkz. Şekil 4.9.

$$\begin{aligned} g(\mathbf{N_1},\mathbf{N_1}) &= \mathbf{F}^2 - \mathbf{EG} \\ &= -\frac{\left(19260u^2 + 3852uv + 3060u + 535v^2 + 810v - 450\right)^4}{5904900000000} < 0 \end{aligned}$$

olduğundan yüzeyimiz spacelike yüzeydir. Ayrıca

$$\|(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v)(u,v)\|_* = \frac{\left(19260u^2 + 3852uv + 3060u + 535v^2 + 810v - 450\right)^2}{2430000}$$

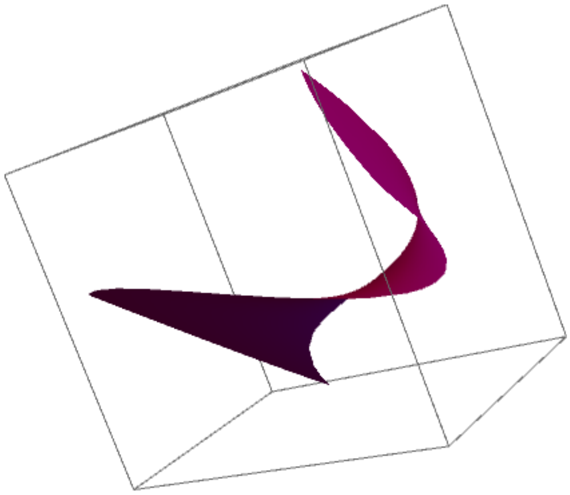
olduğundan bu yüzey bir spacelike kübik polinom PN yüzeyidir.

Spacelike kübik split kuaterniyon polinom PN yüzeylerinin yapısıyla

$$\mathbf{S}(u,v) = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + c_3\mathbf{P}_3 + \mathbf{C}$$

formundaki polinom PN yüzeylerinin bir ailesi elde edilir. Burada $c_i \in \mathbb{R},\ \ i = 1,2,3,\ \ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$ sabit vektördür.

q split kuaterniyon polinomu $q(u,v) = (-v,u,1,0)$ ve $U_1 = (0,0,0,1)$, $U_2 = (0,0,-1,0)$



Şekil 4.9. Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi

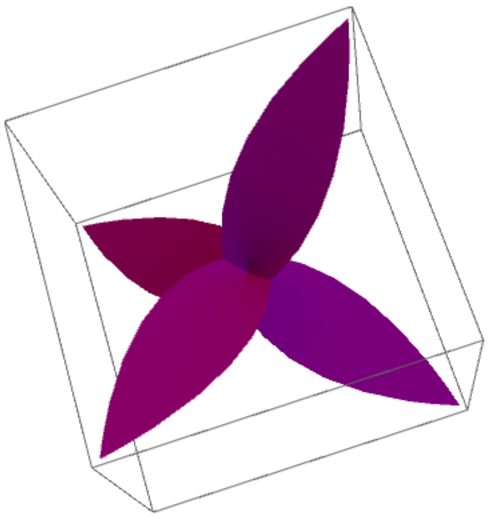
olsun. (4.20) ve (4.21) eşitliklerinden

$$\mathbf{g}_1(u,v) = (2v, 2uv, -u^2+v^2+1)$$
$$\mathbf{g}_2(u,v) = (2u, u^2-v^2+1, 2uv)$$

bulunur ve Lemma 4.14. den

$$\mathbf{P}_1 = (4uv, 2u^2v - \frac{v^3}{3} + v, -\frac{u^3}{3} + 2uv^2 + u)$$

yüzeyi elde edilir. Bkz. Şekil 4.10. Bu yüzeyin birim normali



Şekil 4.10. $\mathbf{P}_1$ Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi

$$\mathbf{N}(u,v) = (-\frac{u^2+v^2+1}{u^2+v^2-1}, -\frac{2u}{u^2+v^2-1}, -\frac{2v}{u^2+v^2-1})$$

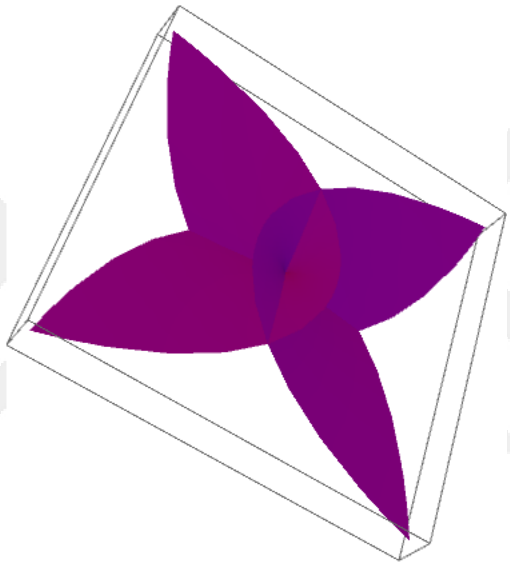
dir. Benzer şekilde $U_1 = (0,0,1,0)$ ve $U_2 = (0,0,0,1)$ seçilirse (4.20) ve (4.21) eşitliklerinden

$$\mathbf{g}_1(u,v) = (-2u, -u^2+v^2-1, -2uv)$$
$$\mathbf{g}_2(u,v) = (2v, 2uv, -u^2+v^2+1)$$

bulunur ve Lemma 4.14. den

$$\mathbf{P}_2 = (v^2-u^2, -\frac{1}{3}u\left(u^2-6v^2+3\right), \frac{1}{3}v(-6u^2+v^2+3))$$

yüzeyi elde edilir. Bkz. Şekil 4.11. Bu yüzeyin birim normali



Şekil 4.11. $\mathbf{P}_2$ Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi

$$\mathbf{N}(u,v) = (-\frac{u^2+v^2+1}{u^2+v^2-1}, -\frac{2u}{u^2+v^2-1}, -\frac{2v}{u^2+v^2-1})$$

dir. Ancak $\mathbf{P}_3$ yüzeyi benzer şekilde bulunamamaktadır. Bu durumda

$$\frac{v}{u^2+v^2-1}\mathbf{h}_2(u,v) + \frac{u}{u^2+v^2-1}\mathbf{h}_3(u,v) = (0,-v,u) := \hat{\mathbf{h}}(u,v)$$

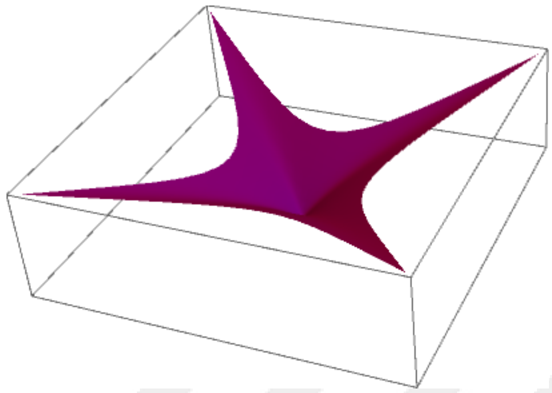
lineer dönüşümü yardımı ile

$$g_1(u,v) = \frac{4v}{3}\hat{\mathbf{h}}(u,v) + \mathbf{h}_2(u,v)$$
$$g_2(u,v) = \frac{-4u}{3}\hat{\mathbf{h}}(u,v) - \mathbf{h}_3(u,v)$$

eşitlikleri elde edilir ve Lemma 4.14. den

$$\mathbf{P}_3 = (-u^2 - v^2, -\frac{1}{3}u(u^2 + 2v^2 + 3), -\frac{1}{3}v(2u^2 + v^2 + 3))$$

yüzeyi de elde edilir. Bkz. Şekil 4.12. Bu yüzeyin birim normali



Şekil 4.12. $\mathbf{P}_3$ Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi

$$\mathbf{N}(u, v) = (-\frac{u^2 + v^2 + 1}{u^2 + v^2 - 1}, -\frac{2u}{u^2 + v^2 - 1}, -\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1})$$

dir. Bu örnek, φ_i seçiminin ikinci dereceden rasyonel fonksiyonlar olması durumunda da spacelike kübik polinom PN yüzeyinin elde edilebileceğini ifade eder. Bir sonra ki Lemma $\hat{\mathbf{h}}$ nın $\mathbf{h}_1$ ve $\mathbf{h}_2$ cinsinden nasıl ifade edilebileceğini göstermektedir.

Lemma 4.19. q, $n = 1$ için (2.3) eşitliği ile verilen bir lineer split kuaterniyon ve

$$p_1(u, v) = g(\mathbf{w}, vec(q_{00}^{-1} * q * \mathbf{k})),$$
$$p_2(u, v) = g(-\mathbf{w}, vec(q_{00}^{-1} * q * \mathbf{j}))$$

olsun. Burada $\mathbf{w} = vec(q_{00}^{-1} * q_{10}) \times vec(q_{00}^{-1} * q_{01})$ dir. Bu durumda

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{\|q_{00}\|_*^4}{\|q\|_*^2}(p_1\mathbf{h}_2 + p_2\mathbf{h}_3) \tag{4.75}$$

formunda bir lineer polinom dönüşümüdür.

İspat. Genelliği bozmadan

$$q_{00} = (1, 0, 0, 0)$$

olarak seçebiliriz. Diğer kontrol noktaları

$$q_{10} = (a_0, a_1, a_2, a_3), \quad q_{01} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$$

olsun. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
p_1(u,v) &= g(\mathbf{w}, ((0,0,1) + (a_2, -a_1, a_0)u + (b_2, -b_1, b_0)v)), \\
p_2(u,v) &= g(\mathbf{w}, ((0,1,0) + (-a_3, a_0, a_1)u + (-b_3, b_0, b_1)v))
\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Burada

$$p_1\mathbf{h}_1 + p_2\mathbf{h}_2 = \|q\|_*^2 \begin{pmatrix} g(\mathbf{w}, ((2a_1, 0, 0)u + (2b_1, 0, 0)v)) \\ g(\mathbf{w}, ((0,0,1) + (a_2, a_1, a_0)u + (b_2, b_1, b_0)v)) \\ g(\mathbf{w}, ((0,-1,0) + (a_3, -a_0, a_1)u + (b_3, -b_0, b_1)v)) \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir.
Lemma 4.19. nın bir sonucu olarak aşağıdaki gibi bazı kübik yüzeylerde oluşturulabilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1(u,v) &= \hat{\varphi}_1(u,v)\hat{\mathbf{h}}(u,v) + \alpha_1\mathbf{h}_1(u,v) + \alpha_2\mathbf{h}_2(u,v) \\
\mathbf{g}_2(u,v) &= \hat{\varphi}_2(u,v)\hat{\mathbf{h}}(u,v) + \alpha_3\mathbf{h}_1(u,v) + \alpha_4\mathbf{h}_2(u,v)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

formunda olup burada $\hat{\varphi}_1$ ve $\hat{\varphi}_2$ bazı lineer fonksiyonlardır. (4.76) eşitliğinde kısmi türevler alınıp (4.2) eşitliğinin kullanılması ile $\hat{\varphi}_1$ ve $\hat{\varphi}_2$ nin altı katsayısı ve α_i dört parametresi ile on bilinmeyen ve dokuz skalardan oluşan bir lineer denklem sistemi oluşur. Bu denklem sistemi α_i lerden biri sabitlenerek çözülebilir.

Örnek 4.20. $q(u,v) = (2, -16, 2, 0) + (-2, 2, 2, 1)u + (-4, 0, 1, 2)v$ split kuaterniyon polinomu verilsin. Lemma 4.19. dan

$$\begin{aligned}
p_1(u,v) &= \frac{-86u - 179v + 46}{32768} \\
p_2(u,v) &= \frac{-183u - 50v + 880}{32768}
\end{aligned}$$

katsayıları ve

$$\mathbf{h}_2(u,v) = (-12u^2 - 20uv + 60u - 16v^2 + 40v + 64, -3u^2 + 16uv + 48u + 19v^2 - 20v - 256,$$
$$-12u^2 - 26uv + 68u - 4v^2 + 120v - 64),$$
$$\mathbf{h}_3(u,v) = (4u^2 + 12uv + 32u + 8v^2 + 76v - 8, 4u^2 + 6uv - 76u - 4v^2 - 136v + 64,$$
$$+3u^2 + 16uv + 64u + 13v^2 - 12v - 248)$$

bulunur. Bulunan ifadeler (4.75) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\hat{\mathbf{h}}(u,v) = (200u + 448v - 32, -316u - 582v + 348, 322u + 12v - 1728)$$

elde edilir. $\alpha_4 = 99$ için $\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ ve $\hat{\mathbf{h}}$ nın (4.76) de yerine yazılmasıyla elde edilen denklem sisteminin çözülmesiyle

$$\hat{\varphi}_1(u,v) = -52 - 22v$$
$$\hat{\varphi}_2(u,v) = -120 + 22v$$
$$\alpha_1 = -1155, \ \alpha_2 = 231, \ \alpha_3 = -495$$

katsayıları bulunur. Bu katsayıların (4.76) de yerine yazılmasıyla

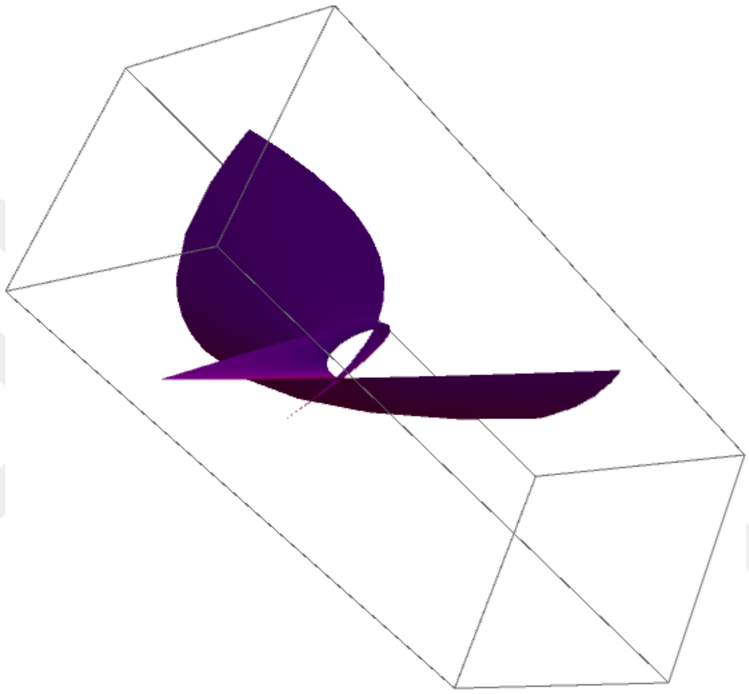
$$\mathbf{g}_1(u,v) = (14784u^2 + 21472uv - 72308u + 10472v^2 - 51236v - 74104,$$
$$+4389u^2 - 10142uv - 56564u - 10065v^2 + 14292v + 292368,$$
$$+14553u^2 + 26642uv - 80500u + 7359v^2 - 103980v + 106488),$$

$$\mathbf{g}_2(u,v) = (10736u^2 + 20944uv - 51236u + 8712v^2 - 66036v - 28632,$$
$$-5071u^2 - 20130uv + 14292u - 9801v^2 + 66276v + 91296,$$
$$+13321u^2 + 14718uv - 103980u + 3267v^2 - 62028v + 214488)$$

ve Lemma 4.14. yardımıyla

$$\mathbf{S}(u,v) = (4928u^3 + 20372u^2v - 36154u^2 + 23408uv^2 - 102472uv - 74104u + 2904v^3 - 33018v^2 - 28632v,$$
$$+ 1463u^3 - 8404u^2v - 28282u^2 - 23331uv^2 + 28584uv + 292368u - 3267v^3 + 33138v^2 + 91296v,$$
$$+ 4851u^3 + 24871u^2v - 40250u^2 + 14784uv^2 - 207960uv + 106488u + 1089v^3 - 31014v^2 + 214488v)$$

yüzeyi elde edilir. Bkz. Şekil 4.13. Burada



Şekil 4.13. Spacelike Kübik Polinom PN Yüzeyi

$$g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1}) = -2944656(77u + 33v - 342)^4(3u^2 + 8u(v-10) + v(11v-20) + 256)^2 < 0$$

olduğundan yüzeyimiz timelike yüzeydir. Ayrıca

$$\|(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v)(u,v)\|_* = 1716(77u + 33v - 342)^2 \left|3u^2 + 8u(v-10) + v(11v-20) + 256\right|$$

olduğundan bu yüzey bir spacelike kübik polinom PN yüzeyidir. Bu örnekte farklı α_4 için farklı polinom PN yüzeyleri elde edilebilir.

4.3.1.2. Spacelike Kuintik Polinom PN Yüzeyi

Bir spacelike kuintik polinom PN yüzeyini olusturulurken $n = 2$ için (2.3) eşitliğiyle tanımlanan

$$q = q_{00} + q_{10}u + q_{01}v + q_{11}uv + q_{20}u^2 + q_{02}v^2$$

split kuaterniyon polinomunu seçilir. Lemma 4.17. de $r = 1, 2$ için $t = -1, 0, 1$ olup kontrol noktaları

$$\begin{aligned}
&q_{00}, \\
&q_{10} = Q_1 * U_2^{-1}, \\
&q_{01} = Q_1 * U_1^{-1}, \\
&q_{11} = Q_2, \\
&q_{20} = \frac{1}{2}Q_2 * U_1 * U_2^{-1}, \\
&q_{02} = \frac{1}{2}Q_2 * U_2 * U_1^{-1}
\end{aligned} \tag{4.77}$$

dir. (4.73) eşitliğindeki Q_1 ve (4.77) eşitliğindeki Q_2 bir polinom PN yüzeyi yapısındaki serbestlik derecelerini temsil eden kuaterniyonlardır.
(4.66) ifadesinde $k = 0, 1$ ve $l = 1, 2$ için

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_{00}^{[l]} = q_{00} * U_l * \overline{q}_{00}, \\
&\mathbf{B}_{(1-k)k}^{[l]} = 2vec(q_{00} * U_l * \overline{q}_{(1-k)k}), \\
&\mathbf{B}_{11}^{[l]} = 2vec(q_{01} * U_l * \overline{q}_{10} + q_{00}U_l\overline{q}_{11}), \\
&\mathbf{B}_{(2-2k)2k}^{[l]} = q_{(1-k)k} * U_l * \overline{q}_{(1-k)k} + 2vec(q_{00} * U_l * \overline{q}_{(2-2k)2k}), \\
&\mathbf{B}_{(3-3k)3k}^{[l]} = 2vec(q_{(1-k)k} * U_l * \overline{q}_{(2-2k)2k}), \\
&\mathbf{B}_{(2-k)(1+k)}^{[l]} = 2vec(q_{(1-k)k} * U_l * \overline{q}_{11} + q_{k(1-k)} * U_l * \overline{q}_{(2-2k)2k}), \\
&\mathbf{B}_{22}^{[l]} = q_{11} * U_l * \overline{q}_{11} + 2vec(q_{02} * U_l * \overline{q}_{20}), \\
&\mathbf{B}_{(4-4k)4k}^{[l]} = q_{(2-2k)2k} * U_l * \overline{q}_{(2-2k)2k}, \\
&\mathbf{B}_{(3-2k)(1+2k)}^{[l]} = 2vec(q_{11} * U_l * \overline{q}_{(2-2k)2k})
\end{aligned} \tag{4.78}$$

olup, Lemma 4.15. yardımıyla bir spacelike kuintik polinom PN yüzeyi elde edilir.

Örnek 4.21. Kontrol noktalarının belirleyebilmek için

$$q_{00} = (1,0,0,0), \quad Q_1 = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}), \quad Q_2 = (0, -\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10})$$

ve

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{4}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{8}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{24}$$

serbest parametrelerini seçilir ve bu parametreler (4.62) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$U_1 = (0,0,\frac{1}{4},-\frac{3}{4}), \qquad U_2 = (0,0,-\frac{1}{8},\frac{1}{24})$$

bulunur. (4.77) eşitliklerinden kontrol noktaları

$$\begin{aligned}
&q_{00} = (1,0,0,0),\\
&q_{10} = Q_1 * U_2^{-1} = (\frac{17}{5}, -\frac{21}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{42}{5}),\\
&q_{01} = Q_1 * U_1^{-1} = (-\frac{9}{10}, -\frac{1}{30}, 1, 1),\\
&q_{11} = Q_2 = \frac{1}{2}Q_2 * U_1 * U_2^{-1} = (0, -\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}),\\
&q_{20} = (\frac{3}{10}, \frac{9}{40}, -\frac{9}{25}, -\frac{49}{50}),\\
&q_{02} = \frac{1}{2}Q_2 * U_2 * U_1^{-1} = (-\frac{1}{120}, \frac{1}{160}, -\frac{7}{300}, \frac{31}{1800})
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.78) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_{00}^{[1]} = q_{00} * U_1 * \overline{q}_{00} = (0, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4})\\
&\mathbf{B}_{10}^{[1]} = 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{10}) = (-\frac{12}{5}, -\frac{23}{5}, -\frac{36}{5})\\
&\mathbf{B}_{01}^{[1]} = 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{01}) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3})\\
&\mathbf{B}_{11}^{[1]} = 2vec(q_{01} * U_1 * \overline{q}_{10} + q_{00} * U_1 * \overline{q}_{11}) = (\frac{23}{4}, -\frac{951}{80}, -\frac{203}{48})\\
&\mathbf{B}_{20}^{[1]} = q_{10} * U_1 * \overline{q}_{10} + 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{20}) = (\frac{185}{4}, -\frac{8117}{400}, \frac{4317}{80})\\
&\mathbf{B}_{02}^{[1]} = q_{01} * U_1 * \overline{q}_{01} + 2vec(q_{00} * U_1 * \overline{q}_{02}) = (-\frac{1339}{720}, \frac{547}{2880}, -\frac{1033}{960})
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{30}^{[1]} = 2vec(q_{10} * U_1 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{887}{500}, \frac{918}{125}, \frac{8877}{1000})$$

$$\mathbf{B}_{03}^{[1]} = 2vec(q_{01} * U_1 * \overline{q}_{02}) = (\frac{29}{2400}, \frac{1}{144}, \frac{143}{2880})$$

$$\mathbf{B}_{21}^{[1]} = 2vec(q_{10} * U_1 * \overline{q}_{11} + q_{01} * U_1 * \overline{q}_{20}) = (\frac{1077}{200}, -\frac{831}{100}, \frac{33}{400})$$

$$\mathbf{B}_{12}^{[1]} = 2vec(q_{01} * U_1 * \overline{q}_{11} + q_{10} * U_1 * \overline{q}_{02}) = (-\frac{223}{240}, \frac{21}{20}, -\frac{121}{60})$$

$$\mathbf{B}_{22}^{[1]} = q_{11} * U_1 * \overline{q}_{11} + 2vec(q_{02} * U_1 * \overline{q}_{20}) = (\frac{437}{24000}, \frac{263}{115200}, -\frac{89}{2560})$$

$$\mathbf{B}_{40}^{[1]} = q_{20} * U_1 * \overline{q}_{20} = (-\frac{2397}{4000}, \frac{135679}{160000}, \frac{72147}{160000})$$

$$\mathbf{B}_{04}^{[1]} = q_{02} * U_1 * \overline{q}_{02} = (\frac{157}{345600}, -\frac{30493}{41472000}, -\frac{467}{13824000})$$

$$\mathbf{B}_{31}^{[1]} = 2vec(q_{11} * U_1 * \overline{q}_{20}) = (\frac{129}{400}, -\frac{9203}{16000}, \frac{7363}{48000})$$

$$\mathbf{B}_{13}^{[1]} = 2vec(q_{11} * U_1 * \overline{q}_{02}) = (-\frac{3}{320}, \frac{1361}{115200}, \frac{4111}{345600})$$

ve

$$\mathbf{B}_{00}^{[2]} = q_{00} * U_2 * \overline{q}_{00} = (0, -\frac{1}{8}, \frac{1}{24})$$

$$\mathbf{B}_{10}^{[2]} = 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{10}) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$$

$$\mathbf{B}_{01}^{[2]} = 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{01}) = (-\frac{1}{3}, \frac{41}{180}, -\frac{1}{15})$$

$$\mathbf{B}_{11}^{[2]} = 2vec(q_{01} * U_2 * \overline{q}_{10} + q_{00} * U_2 * \overline{q}_{11}) = (-\frac{139}{360}, \frac{343}{1440}, -\frac{17}{480})$$

$$\mathbf{B}_{20}^{[2]} = q_{10} * U_2 * \overline{q}_{10} + 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{20}) = (\frac{18703}{7200}, -\frac{3743}{640}, -\frac{12013}{5760})$$

$$\mathbf{B}_{02}^{[2]} = q_{01} * U_2 * \overline{q}_{01} + 2vec(q_{00} * U_2 * \overline{q}_{02}) = (\frac{41}{72}, -\frac{2021}{7200}, \frac{5291}{21600})$$

$$\mathbf{B}_{30}^{[2]} = 2vec(q_{10} * U_2 * \overline{q}_{20}) = (\frac{359}{200}, -\frac{277}{100}, \frac{11}{400})$$

$$\mathbf{B}_{03}^{[2]} = 2vec(q_{01} * U_2 * \overline{q}_{02}) = (\frac{4009}{648000}, -\frac{1}{90}, -\frac{253}{86400})$$

$$\mathbf{B}_{21}^{[2]} = 2vec(q_{10} * U_2 * \overline{q}_{11} + q_{01} * U_2 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{223}{240}, \frac{21}{20}, -\frac{121}{160})$$

$$\mathbf{B}_{12}^{[2]} = 2vec(q_{01} * U_2 * \overline{q}_{11} + q_{10} * U_2 * \overline{q}_{02}) = (\frac{29}{800}, \frac{1}{48}, \frac{143}{960})$$

$$\mathbf{B}_{22}^{[2]} = q_{11} * U_2 * \overline{q}_{11} + 2vec(q_{02} * U_2 * \overline{q}_{20}) = (-\frac{89}{9600}, \frac{1721}{230400}, \frac{4471}{691200})$$

$$\mathbf{B}_{40}^{[2]} = q_{20} * U_2 * \overline{q}_{20} = (\frac{129}{1600}, -\frac{9203}{64000}, \frac{7363}{192000})$$

$$\mathbf{B}_{04}^{[2]} = q_{02} * U_2 * \overline{q}_{02} = (-\frac{89}{3456000}, \frac{8987}{138240000}, -\frac{94369}{1244160000})$$

$$\mathbf{B}_{31}^{[2]} = 2vec(q_{11} * U_2 * \overline{q}_{20}) = (\frac{1}{480}, \frac{1199}{57600}, -\frac{517}{640})$$

$$\mathbf{B}_{13}^{[2]} = 2vec(q_{11} * U_2 * \overline{q}_{02}) = (\frac{157}{86400}, -\frac{30493}{10368000}, -\frac{467}{3456000})$$

olup, Lemma 4.15. den

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1(u,v) = (&-\frac{12u}{5} + \frac{185u^2}{4} - \frac{887u^3}{500} - \frac{2397u^4}{4000} + 2v + \frac{23uv}{4} + \frac{1077u^2v}{200} + \frac{129u^3v}{400} - \frac{1339v^2}{720} \\
&- \frac{233uv^2}{240} + \frac{u^2v^2}{320} + \frac{29v^3}{2400} - \frac{3uv^3}{320} + \frac{157v^4}{345600}, +\frac{1}{4} - \frac{23u}{5} - \frac{8117u^2}{400} + \frac{918u^3}{125} + \frac{135679u^4}{160000} \\
&- \frac{v}{2} - \frac{951uv}{80} - \frac{831u^2v}{100} - \frac{9203u^3v}{16000} + \frac{5047v^2}{2880} + \frac{21uv^2}{20} + \frac{1199u^2v^2}{38400} + \frac{v^3}{144} + \frac{1361uv^3}{115200} \\
&- \frac{30493v^4}{41472000}, -\frac{3}{4} - \frac{36u}{5} + \frac{4317u^2}{80} + \frac{8877u^3}{1000} + \frac{72147u^4}{160000} + \frac{4v}{3} - \frac{203uv}{48} + \frac{33u^2v}{400} - \frac{7363u^3v}{48000} \\
&- \frac{1033v^2}{960} - \frac{121uv^2}{160} - \frac{1551u^2v^2}{12800} + \frac{143v^3}{2880} + \frac{4111uv^3}{345600} - \frac{467v^4}{13824000}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_2(u,v) = (&2u + \frac{23u^2}{8} + \frac{359u^3}{200} + \frac{129u^4}{1600} - \frac{v}{3} - \frac{1339uv}{360} - \frac{223u^2v}{240} + \frac{u^3v}{480} + \frac{701v^2}{2400} + \frac{29uv^2}{800} \\
&- \frac{9u^2v^2}{640} + \frac{4009v^3}{648000} + \frac{157uv^3}{86400} - \frac{89v^4}{3456000}, -\frac{1}{8} - \frac{u}{2} - \frac{951u^2}{160} - \frac{277u^3}{100} - \frac{9203u^4}{64000} + \frac{41v}{180} \\
&+ \frac{5047uv}{1440} + \frac{21u^2v}{20} + \frac{1199u^3v}{57600} - \frac{5339v^2}{28800} + \frac{uv^2}{48} + \frac{1361u^2v^2}{76800} - \frac{v^3}{90} - \frac{30493uv^3}{10368000} + \frac{8987v^4}{138240000}, \\
&+ \frac{1}{24} + \frac{4u}{3} - \frac{203u^2}{96} + \frac{11u^3}{400} + \frac{7323u^4}{192000} - \frac{v}{15} - \frac{1033uv}{480} - \frac{121u^2v}{160} - \frac{517u^3v}{6400} \\
&+ \frac{23669v^2}{86400} + \frac{143uv^2}{960} + \frac{4111u^2v^2}{230400} - \frac{253v^3}{86400} - \frac{467uv^3}{3456000} - \frac{94369v^4}{1244160000})
\end{aligned}$$

ve

$$\mathbf{S}(u,v) = (-\frac{6u^2}{5} + \frac{185u^3}{12} - \frac{887u^4}{2000} - \frac{2397u^5}{20000} + 2uv + \frac{23u^2v}{8} + \frac{359u^3v}{200} + \frac{129u^4v}{1600} - \frac{v^2}{6}$$
$$- \frac{1339uv^2}{720} - \frac{223u^2v^2}{480} + \frac{u^3v^2}{960} + \frac{701v^3}{7200} + \frac{29uv^3}{2400} - \frac{3u^2v^3}{640} + \frac{4009v^4}{2592000} + \frac{157uv^4}{345600} - \frac{89v^5}{17280000},$$
$$+ \frac{u}{4} - \frac{23u^2}{10} - \frac{8117u^3}{1200} + \frac{459u^4}{250} + \frac{135679u^5}{800000} - \frac{v}{8} - \frac{uv}{2}\frac{951u^2v}{160} - \frac{277u^3v}{100} - \frac{9203u^4v}{64000} + \frac{41v^2}{360}$$
$$+ \frac{5047uv^2}{2880} + \frac{21u^2v^2}{40} + \frac{1199u^3v^2}{115200} - \frac{5339v^3}{86400} + \frac{uv^3}{144} + \frac{1361u^2v^3}{230400} - \frac{v^4}{360} - \frac{30493uv^4}{41472000} + \frac{8987v^5}{691200000},$$
$$- \frac{3u}{4} - \frac{18u^2}{5} + \frac{1439u^3}{80} + \frac{8877u^4}{4000} + \frac{72147u^5}{800000} + \frac{v}{24} + \frac{4uv}{3} - \frac{203u^2v}{96} + \frac{11u^3v}{400} + \frac{7363u^4v}{192000}$$
$$- \frac{v^2}{30} - \frac{1033uv^2}{960} - \frac{121u^2v^2}{320} - \frac{7517u^3v^2}{12800} + \frac{23669v^3}{259200} + \frac{143uv^3}{2880} + \frac{4111u^2v^3}{691200} - \frac{253v^4}{345600}$$
$$- \frac{467uv^4}{13824000} - \frac{94369v^5}{6220800000})$$

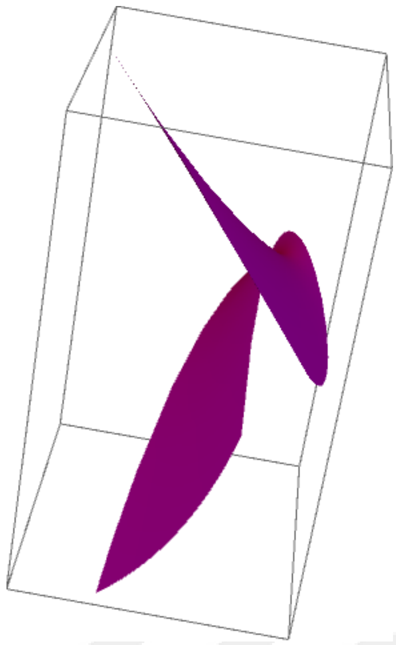
yüzeyi bulunur. Bkz. Şekil 4.14.

$$g(\mathbf{N_1},\mathbf{N_1}) = \mathbf{F}^2 - \mathbf{EG} = -\frac{1}{10399739562845798400000000000000000}(49215600u^4 - 19686240u^3v$$
$$+ 800928000u^3 + 4702824u^2v^2 - 210211200u^2v + 2187648000u^2 - 546840uv^3$$
$$+ 32253120uv^2 - 443750400uv - 352512000u + 37975v^4 - 1389600v^3$$
$$+ 62496000v^2 + 93312000v - 51840000)^4 < 0$$

olduğundan bu yüzey bir spacelike yüzeydir. Ayrıca

$$\|(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v)(u,v)\|_* = \frac{1}{32248627200000000}(49215600u^4 - 19686240u^3v + 800928000u^3 + 4702824u^2v^2$$
$$- 210211200u^2v + 2187648000u^2 - 546840uv^3 + 32253120uv^2 - 443750400uv$$
$$- 352512000u + 37975v^4 - 1389600v^3 + 62496000v^2 + 93312000v - 51840000)^2$$

olduğundan bu yüzey bir spacelike kuintik polinom PN yüzeyidir.



Şekil 4.14. Spacelike Kuintik Polinom PN Yüzeyi

4.3.2. Çift Dereceli Spacelike Split Polinom PN Yüzeyinin Yapısı

(2.3) formunda verilen bir $q(u,v)$ split kuaterniyon polinomundan çift dereceli bir polinom PN yüzeyi elde edebilmek için (4.1) eşitliği ile verilen φ_i ler birer lineer fonksiyon olarak

$$\varphi_i(u,v) = \alpha_i + \beta_i u + \gamma_i v, \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3,4$$

şeklinde seçilecektir. (4.16) eşitliğinden

$$\begin{aligned} U_1 &= \varphi_1 \mathbf{j} + \varphi_2 \mathbf{k} \\ &= (0,0,\alpha_1 + \beta_1 u + \gamma_1 v, \alpha_2 + \beta_2 u + \gamma_2 v,) \\ &= (0,0,\alpha_1,\alpha_2) + (0,0,\beta_1,\beta_2)u + (0,0,\gamma_1,\gamma_2)v \\ &= U_{00}^{[1]} + U_{10}^{[1]} u + U_{01}^{[1]} v \end{aligned} \tag{4.79}$$

ve

$$\begin{aligned} U_2 &= \varphi_3 \mathbf{j} + \varphi_4 \mathbf{k} \\ &= (0,0,\alpha_3 + \beta_3 u + \gamma_3 v, \alpha_4 + \beta_4 u + \gamma_4 v) \\ &= (0,0,\alpha_3,\alpha_4) + (0,0,\beta_3,\beta_4)u + (0,0,\gamma_3,\gamma_4)v \\ &= U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]} u + U_{01}^{[2]} v \end{aligned} \tag{4.80}$$

olup, burada

$$
\begin{aligned}
&U_{00}^{[1]}=(0,0,\alpha_1,\alpha_2),\ \ U_{10}^{[1]}=(0,0,\beta_1,\beta_2),\ \ U_{01}^{[1]}=(0,0,\gamma_1,\gamma_2)\\
&U_{00}^{[2]}=(0,0,\alpha_3,\alpha_4),\ \ U_{10}^{[2]}=(0,0,\beta_3,\beta_4),\ \ U_{01}^{[2]}=(0,0,\gamma_3,\gamma_4)
\end{aligned} \tag{4.81}
$$

dir. (4.17) ve (4.18) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_1&=q*U_1*\overline{q}\\
&=q*(U_{00}^{[1]}+U_{10}^{[1]}u+U_{01}^{[1]}v)*\overline{q}\\
\mathbf{g}_2&=q*U_2*\overline{q}\\
&=q*(U_{00}^{[2]}+U_{10}^{[2]}u+U_{01}^{[2]}v)*\overline{q}
\end{aligned} \tag{4.82}
$$

ifadeleri elde edilir. $\mathbf{S}$ bir yüzey ise

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}=g(\mathbf{S}_u,\mathbf{S}_u)&=g(q*U_1*\overline{q},q*U_1*\overline{q})\\
&=\|q\|_*^4\,g(U_1,U_1)\\
&=\left((\alpha_1+\beta_1u+\gamma_1v)^2+(\alpha_2+\beta_2u+\gamma_2v)^2\right)\|q\|_*^4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}=g(\mathbf{S}_u,\mathbf{S}_v)&=g(q*U_1*\overline{q},q*U_2*\overline{q})\\
&=\|q\|_*^4\,g(U_1,U_2)\\
&=((\alpha_1+\beta_1u+\gamma_1v)(\alpha_3+\beta_3u+\gamma_3v)+(\alpha_2+\beta_2u+\gamma_2v)(\alpha_4+\beta_4u+\gamma_4v))\,\|q\|_*^4
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}=g(\mathbf{S}_v,\mathbf{S}_v)&=g(q*U_2*\overline{q},q*U_2*\overline{q})\\
&=\|q\|_*^4\,g(U_2,U_2)\\
&=\left((\alpha_3+\beta_3u+\gamma_3v)^2+(\alpha_4+\beta_4u+\gamma_4v)^2\right)\|q\|_*^4,
\end{aligned}
$$

olup buradan

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{N_1},\mathbf{N_1}) &= \mathbf{F}^2-\mathbf{EG}\\
&= -[(\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_4)+(-\alpha_4\beta_1+\alpha_3\beta_2+\alpha_2\beta_3-\alpha_1\beta_4)u+(-\alpha_4\gamma_1+\alpha_3\gamma_2+\alpha_2\gamma_3-\alpha_1\gamma_4)v\\
&\quad +(-\beta_4\gamma_1+\beta_3\gamma_2+\beta_2\gamma_3-\beta_1\gamma_4)uv+(\beta_2\beta_3-\beta_1\beta_4)u^2+(\gamma_2\gamma_3-\gamma_1\gamma_4)v^2]^2\,\|q\|_*^8
\end{aligned}
$$

olduğundan bu yüzey spacelikedır. (4.82) eşitliğinde g_1 in v ye göre ve g_2 nin u ya göre kısmi türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} &= q_v*U_1*\overline{q}+q*U_{01}^{[1]}*\overline{q}+q*U_1*\overline{q}_v\\
&= q_v*U_1*\overline{q}+q*U_{01}^{[1]}*\overline{q}-\overline{q_v*U_1*\overline{q}}\\
&= vec(2q_v*U_1*\overline{q}+q*U_{01}^{[1]}*\overline{q})
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial u} &= q_u*U_2*\overline{q}+q*U_{10}^{[2]}*\overline{q}+q*U_2*\overline{q}_u\\
&= q_u*U_2*\overline{q}+q*U_{10}^{[2]}*\overline{q}-\overline{q_u*U_2*\overline{q}}\\
&= vec(2q_u*U_2*\overline{q}+q*U_{10}^{[2]}*\overline{q})
\end{aligned}
$$

formundadır. Buradan (4.55) eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul

$$vec(2q_v*U_1*\overline{q}+q*U_{01}^{[1]}*\overline{q})-vec(2q_u*U_2*\overline{q}+q*U_{10}^{[2]}*\overline{q})=0$$

olup,

$$vec((2q_v*U_1+q*U_{01}^{[1]}-2q_u*U_2-q*U_{10}^{[2]})\overline{q})=0 \tag{4.83}$$

dir. (4.83) eşitliği doğrudur gerek ve yeter şart

$$2q_v*U_1+q*U_{01}^{[1]}-2q_u*U_2-q*U_{10}^{[2]}=\psi q \tag{4.84}$$

dir. Burada ψ bir skalar fonksiyondur. (4.84) eşitliğinin sol tarafı u,v değişkenlerine bağlı n dereceli bir split kuaterniyon polinomu olduğundan, ψ yi ψ_0 sabit olarak seçebiliriz. O zaman, (4.84) eşitliğinde $4\begin{pmatrix} n+2\\ 2\end{pmatrix}$ kombinasyonlu kuaterniyon katsayıları ve U_i nin 12 katsayısı arasında lineer olmayan bağıntılar vardır.

4.3.2.1. Spacelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi

(2.3) eşitliğinde $n = 1$ alındığında

$$q(u,v) = q_{00} + q_{10}u + q_{01}v$$

dir. (4.84) eşitliğinde $q_v = q_{01}, \quad q_u = q_{10}, \quad$ (4.79) ve (4.80) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa

$$2q_{01} * (U_{00}^{[1]} + U_{10}^{[1]}u + U_{01}^{[1]}v) - 2q_{01} * (U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]}u + U_{01}^{[2]}v) + q * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten aşağıdaki üç split kuaterniyon denklemi elde edilir:

$$2q_{01} * U_{00}^{[1]} - 2q_{10} * U_{00}^{[2]} + q_{00} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0, \tag{4.85}$$

$$2q_{01} * U_{10}^{[1]} - 2q_{10} * U_{10}^{[2]} + q_{10} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0, \tag{4.86}$$

$$2q_{01} * U_{01}^{[1]} - 2q_{10} * U_{01}^{[2]} + q_{01} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0. \tag{4.87}$$

(4.86) eşitliğinden

$$2q_{01} * U_{10}^{[1]} - 2q_{10} * U_{10}^{[2]} + q_{10} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

olup buradan

$$\begin{aligned} 2q_{01} * U_{10}^{[1]} &= 2q_{10} * U_{10}^{[2]} - q_{10} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} + \psi_0) \\ &= q_{10} * (3U_{10}^{[2]} - U_{01}^{[1]} + \psi_0) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafı soldan $\frac{1}{2}q_{01}^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} U_{10}^{[1]} &= -\frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{10} * (U_{01}^{[1]} - 3U_{10}^{[2]} - \psi_0) \\ &= -\frac{1}{2}C * (U_{01}^{1} - 3U_{10}^{2} - \psi_0) \end{aligned} \tag{4.88}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.87) eşitliğinden

$$2q_{01} * U_{01}^{[1]} - 2q_{10} * U_{01}^{[2]} + q_{01} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

olup, bu durumda

$$\begin{aligned} 2q_{10} * U_{01}^{[2]} &= 2q_{01} * U_{01}^{[1]} + q_{01} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \\ &= q_{01} * (3U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafı soldan $\frac{1}{2}q_{10}^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} U_{01}^{[2]} &= \frac{1}{2}q_{10}^{-1} * q_{01} * (3U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \\ &= \frac{1}{2}C^{-1} * (3U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \end{aligned} \tag{4.89}$$

elde edilir. Burada $C = (c_0, c_1, c_2, c_3) = q_{01}^{-1} * q_{10}$ dir. (4.81) eşitliğinin (4.88) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} (0, 0, \beta_1, \beta_2) &= -\frac{1}{2}(c_0, c_1, c_2, c_3) * (-\psi_0, 0, \gamma_1 - 3\beta_3, \gamma_2 - 3\beta_4) \\ &= -\frac{1}{2}(-c_0\psi_0 + c_2\gamma_1 - 3c_2\beta_3 + c_3\gamma_2 - 3c_3\beta_4, -c_1\psi_0 + c_3\gamma_1 - 3c_3\beta_3 - c_2\gamma_2 + 3c_2\beta_4, \\ &\quad - c_2\psi_0 + 3c_1\gamma_2 + 3c_1\beta_4 + c_0\gamma_1 - 3c_0\beta_3, -c_3\psi_0 + c_1\gamma_1 - 3c_1\beta_3 + c_0\gamma_2 - 3c_0\beta_4) \end{aligned} \tag{4.90}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.80) eşitliğinin (4.89) de yerine yazılmasıyla da

$$\begin{aligned} (0, 0, \gamma_3, \gamma_4) &= \frac{1}{2\left\|C\right\|_*}(c_0, -c_1, -c_2, -c_3) * (\psi_0, 0, 3\gamma_1 - \beta_3, 3\gamma_2 - \beta_4) \\ &= \frac{1}{2\left\|C\right\|_*}(-c_0\psi_0 - 3c_2\gamma_1 + c_2\beta_3 - 3c_3\gamma_2 + c_3\beta_4, c_1\psi_0 - 3c_1\gamma_1 + c_3\beta_3 + 3c_2\gamma_2 - c_3\beta_4, \\ &\quad + c_2\psi_0 + 3c_0\gamma_1 - c_0\beta_3 + 3c_1\gamma_2 - c_1\beta_4, c_3\psi_0 - 3c_1\gamma_1 + c_1\beta_3 + 3c_0\gamma_2 - c_0\beta_4) \end{aligned} \tag{4.91}$$

dir. (4.90) ve (4.91) eşitliklerinde bulunan 8 denklemden oluşan sistemin çözülmesiyle

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = \frac{-c_2 \left\| C \right\|_*^2 \psi_0}{2(c_2^2+c_3^2)}, \quad \beta_2 = \frac{-c_3 \left\| C \right\|_*^2 \psi_0}{2(c_2^2+c_3^2)}, \quad \beta_3 = \frac{(-2c_0c_2 - c_1c_3)\psi_0}{4(c_2^2+c_3^2)}, \\
&\beta_4 = \frac{(-2c_0c_3 + c_1c_2)\psi_0}{4(c_2^2+c_3^2)}, \gamma_1 = \frac{(-2c_0c_2 + c_1c_3)\psi_0}{4(c_2^2+c_3^2)}, \quad \gamma_2 = \frac{(-2c_0c_3 - c_1c_2)\psi_0}{4(c_2^2+c_3^2)}, \\
&\gamma_3 = \frac{-c_2\psi_0}{2(c_2^2+c_3^2)}, \ \gamma_4 = \frac{-c_3\psi_0}{2(c_2^2+c_3^2)}
\end{aligned} \tag{4.92}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $c_2^2 + c_3^2 \neq 0$ dir. Ayrıca (4.85) eşitliğinden

$$2q_{01} * U_{00}^{[1]} - 2q_{10} * U_{00}^{[2]} + q_{00} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) = 0$$

olup burada

$$2q_{01} * U_{00}^{[1]} = 2q_{10} * U_{00}^{[2]} - q_{00} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafının soldan $\frac{1}{2}q_{01}^{-1}$ ile çarpılmasıyla

$$U_{00}^{[1]} = C * U_{00}^{[2]} - \frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{00} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]} - \psi_0) \tag{4.93}$$

elde edilir. (4.93) eşitliğinde (4.81) in yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
(0,0,\alpha_1,\alpha_2) &= C * (0,0,\alpha_3,\alpha_4) - \frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{00} * ((0,0,\gamma_1,\gamma_2) - (0,0,\beta_3,\beta_4) - (\psi_0,0,0,0)) \\
&= C * (0,0,\alpha_3,\alpha_4) - \frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{00} * (\psi_0, 0, \gamma_1 - \beta_3, \gamma_2 - \beta_4)
\end{aligned} \tag{4.94}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
D = (d_0,d_1,d_2,d_3) &= -\frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{00} * (\psi_0, 0, \gamma_1 - \beta_3, \gamma_2 - \beta_4) \\
&= -\frac{1}{2}q_{01}^{-1} * q_{00} * (-1, 0, \frac{c_1c_3}{2(c_2^2+c_3^2)}, \frac{-c_1c_2}{2(c_2^2+c_3^2)})
\end{aligned}$$

alınırsa (4.46) eşitliği

$$\begin{aligned}
(0,0,\alpha_1,\alpha_2) &= C * (0,0,\alpha_3,\alpha_4) + \psi_0 D \\
&= C * (0,0,\alpha_3,\alpha_4) + \psi_0(d_0,d_1,d_2,d_3)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikten

$$\alpha_1 = c_0\alpha_3 - c_1\alpha_4 - d_2\psi_0, \quad \alpha_2 = c_1\alpha_3 + c_0\alpha_4 - d_3\psi_0,$$
$$\alpha_3 = \psi_0\frac{c_2d_0 + c_3d_1}{c_2^2 + c_3^2}, \quad \alpha_4 = \psi_0\frac{c_3d_0 - c_2d_1}{c_2^2 + c_3^2} \tag{4.95}$$

elde edilir. ψ_0 parametresi herhangi bir ek serbestlik derecesi getirmemektedir ve bu çarpanla elde edilen $q(u, v)$ split kuaterniyon polinomudan elde edilen $\mathbf{g}_1$ ve $\mathbf{g}_2$ nin sadece büyüklüğünü etkilemektedir.

(4.81), (4.82), (4.92) ve (4.95) eşitlikleri ile birlikle Lemma 4.15. den $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ ve spacelike kuartik polinom PN yüzeyi bulunur.

Şimdi $c_2^2 + c_3^2 = 0$ olduğu durumu ele alalım. Bu durumun gerçekleşebilmesi için $C = (c_0, c_1, 0, 0), c_1 \neq 0$ olmalıdır. (4.88) denkleminde $C = (c_0, c_1, 0, 0)$ yazılması ile

$$\begin{aligned}
U_{10}^{[1]} &= -\frac{1}{2}C * (U_{01}^{[1]} - 3U_{10}^{[2]} - \psi_0) \\
(0, 0, \beta_1, \beta_2) &= -\frac{1}{2}(c_0, c_1, 0, 0) * (-\psi_0, 0, \gamma_1 - 3\beta_3, \gamma_2 - 3\beta_4) \\
&= -\frac{1}{2}(-c_0\psi_0, -c_1\psi_0, c_0\gamma_1 - 3c_0\beta_3 - c_1\gamma_2 + 3c_1\beta_4, \\
&\quad c_1\gamma_1 - 3c_1\beta_3 + c_0\gamma_2 - 3c_0\beta_4)
\end{aligned} \tag{4.96}$$

elde edilir. (4.96) eşitliğinin ilk bileşeninden $\psi_0 = 0$ dir. $\psi_0 = 0$ alındığında (4.84) eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul

$$2q_{01} * U_{10}^{[1]} - 2q_{10} * U_{10}^{[2]} + q_{10} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0$$
$$2q_{01} * U_{01}^{[1]} - 2q_{10} * U_{01}^{[2]} + q_{01} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0$$

dir. Burada q_{10} yerine $q_{01} * C$ yazılması ile

$$2q_{01} * U_{10}^{[1]} - 2q_{01} * C * U_{10}^{[2]} + q_{01} * C * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0$$
$$2q_{01} * U_{01}^{[1]} - 2q_{01} * C * U_{01}^{[2]} + q_{01} * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle

$$U_{10}^{[2]} = C * U_{01}^{[2]} \tag{4.97}$$

ve bu sonucun (4.85) eşitliğinde kullanılmasıyla da

$$U_1 = C * U_2 \tag{4.98}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$U_{00}^{[1]} = C * U_{00}^{[2]}, \;\; U_{10}^{[1]} = C * U_{10}^{[2]}, \;\; U_{01}^{[1]} = C * U_{01}^{[2]}$$

dir. $c_2 = c_3 = 0$ durumu için (4.92) ve (4.95) eşitliklerine göre daha basit bir çözüm elde edilir. Bulunan sonuçlar aşağıdaki lemmada özetlenmiştir.

Lemma 4.22. $n = 1$ için (2.3) eşitliği ile verilen bir lineer split kuaterniyon

$$q(u, v) = q_{00} + (q_{10} * C)u + q_{01}v, \;\; C = (c_0, c_1, c_2, c_3)$$

olsun. U_1 ve U_2, $c_2^2 + c_3^2 \neq 0$ durumunda (4.79), (4.80), (4.92) ve (4.95) eşitliklerinin yardımıyla bulunur. $c_2 = c_3 = 0$ durumunda ise

$$\begin{aligned} &U_2(u, v) = (0, 0, \alpha_3, \alpha_4) + C * (0, 0, \gamma_3, \gamma_4)u + (0, 0, \gamma_3, \gamma_4)v, \\ &U_1(u, v) = C * U_2(u, v) \end{aligned}$$

dir. Bu durumda, S parametrik polinom PN yüzeyi Lemma 4.14. ile elde edilebilir.

(4.19) ifadesinde $k = 0, 1$ ve $l = 1, 2$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{00}^{[l]} &= q_{00} * U_{00}^{[l]} * \overline{q}_{00}, \\ \mathbf{B}_{(1-k)k}^{[l]} &= vec((q_{00} * U_{(1-k)k}^{[l]} + 2q_{(1-k)k} * U_{00}^{[l]}) * \overline{q}_{(1-k)k}), \\ \mathbf{B}_{(2-2k)2k}^{[l]} &= vec((q_{(1-k)k} * U_{00}^{[l]} + 2q_{00} * U_{(1-k)k}^{[l]}) * \overline{q}_{(1-k)k}), \\ \mathbf{B}_{11}^{[l]} &= 2vec(q_{01} * U_{00}^{[l]} * \overline{q}_{10} + q_{10} * U_{01}^{[l]} * \overline{q}_{00} + q_{01} * U_{10}^{[l]} * \overline{q}_{00}), \\ \mathbf{B}_{(3-3k)3k}^{[l]} &= q_{(1-k)k} * U_{(1-k)k}^{[l]} * \overline{q}_{(1-k)k}, \\ \mathbf{B}_{(2-k)(1+k)}^{[l]} &= vec((q_{(1-k)k} * U_{k(1-k)}^{[l]} + 2q_{k(1-k)} * U_{(1-k)k}^{[l]}) * \overline{q}_{(1-k)k}) \end{aligned} \tag{4.99}$$

dir. Lemma 4.15. yardımıyla bir spacelike kuartik polinom PN yüzeyi elde edilir.

Örnek 4.23. Kontrol noktalarından ikisi

$$q_{00} = (1,0,0,0), \quad q_{0.1} = (2,1,3,4)$$

olarak belirlenir ve

$$C = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4})$$

seçilirse $c_2^2 + c_3^2 \neq 0$ olduğundan son kontrol noktası

$$\begin{aligned} q_{10} &= q_{01} * C \\ &= (\frac{4}{3}, -1, -2, \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.92) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &\beta_1 = -\frac{1}{13}, \;\; \beta_2 = -\frac{3}{26}, \;\; \beta_3 = \frac{6}{13}, \beta_4 = \frac{5}{26}, \\ &\gamma_1 = 0, \;\; \gamma_2 = \frac{1}{2}, \gamma_3 = -\frac{12}{13}, \;\; \gamma_4 = -\frac{18}{13} \end{aligned}$$

ve (4.95) eşitliğinden ise

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{69}{338}, \;\; \alpha_2 = \frac{93}{845} \\ &\alpha_3 = -\frac{297}{1690}, \;\; \alpha_4 = \frac{51}{169} \end{aligned}$$

sabitleri bulunur. Bulunan sabitlerin (4.79) ve (4.80) de yerine konulmasıyla

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{00}^{[1]} + U_{10}^{[1]}u + U_{01}^{[1]}v \\ &= (0,0,\frac{69}{338},\frac{93}{845}) + (0,0,-\frac{1}{13},-\frac{3}{26})u + (0,0,0,\frac{1}{2})v \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} U_2 &= U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]}u + U_{01}^{[2]}v \\ &= (0,0,-\frac{297}{1690},\frac{51}{169}) + (0,0,-\frac{12}{13},-\frac{18}{13})u + (0,0,-2,1)v \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (4.99) eşitliğinden

$$\mathbf{B}_{00}^{[1]} = q_{00} * U_{00}^{[1]} * \overline{q}_{00} = (0, \frac{69}{338}, \frac{93}{845})$$

$$\mathbf{B}_{10}^{[1]} = vec((q_{00} * U_{10}^{[1]} + 2q_{10} * U_{00}^{[1]}) * \overline{q}_{00}) = (\frac{602}{845}, \frac{581}{845}, -\frac{389}{1690})$$

$$\mathbf{B}_{01}^{[1]} = vec((q_{00} * U_{01}^{[1]} + 2q_{01} * U_{00}^{[1]}) * \overline{q}_{00}) = (\frac{822}{845}, \frac{504}{845}, \frac{2279}{1690})$$

$$\mathbf{B}_{11}^{[1]} = 2vec(q_{01} * U_{00}^{[1]} * \overline{q}_{10} + q_{10} * U_{01}^{[1]} * \overline{q}_{00} + q_{01} * U_{10}^{[1]} * \overline{q}_{00}) = (\frac{1280}{169}, \frac{1255}{169}, \frac{70}{39})$$

$$\mathbf{B}_{20}^{[1]} = vec((q_{10} * U_{00}^{[1]} + 2q_{00} * U_{10}^{[1]}) * \overline{q}_{10}) = (-\frac{48}{169}, -\frac{703}{1690}, -\frac{21}{65})$$

$$\mathbf{B}_{02}^{[1]} = vec((q_{01} * U_{00}^{[1]} + 2q_{00} * U_{01}^{[1]}) * \overline{q}_{01}) = (-\frac{534}{169}, -\frac{1724}{845}, -\frac{164}{65})$$

$$\mathbf{B}_{30}^{[1]} = q_{10} * U_{10}^{[1]} * \overline{q}_{10} = (-\frac{70}{117}, -\frac{47}{117}, -\frac{1}{2})$$

$$\mathbf{B}_{03}^{[1]} = q_{01} * U_{01}^{[1]} * \overline{q}_{01} = (-10, -14, -2)$$

$$\mathbf{B}_{21}^{[1]} = vec((q_{10} * U_{01}^{[1]} + 2q_{01} * U_{10}^{[1]}) * \overline{q}_{10}) = (\frac{10}{13}, -\frac{10}{13}, \frac{5}{2})$$

$$\mathbf{B}_{12}^{[1]} = vec((q_{01} * U_{10}^{[1]} + 2q_{10} * U_{01}^{[1]}) * \overline{q}_{01}) = (\frac{190}{39}, \frac{356}{39}, -3)$$

ve

$$\mathbf{B}_{00}^{[2]} = q_{00} * U_{00}^{[2]} * \overline{q}_{00} = (0, -\frac{297}{1690}, \frac{51}{169})$$

$$\mathbf{B}_{10}^{[2]} = vec((q_{00} * U_{10}^{[2]} + 2q_{10} * U_{00}^{[2]}) * \overline{q}_{00}) = (\frac{822}{845}, \frac{504}{845}, \frac{2279}{1690})$$

$$\mathbf{B}_{01}^{[2]} = vec((q_{00} * U_{01}^{[2]} + 2q_{01} * U_{00}^{[2]}) * \overline{q}_{00}) = (-\frac{2718}{845}, -\frac{1884}{845}, -\frac{447}{845})$$

$$\mathbf{B}_{11}^{[2]} = 2vec(q_{01} * U_{00}^{[2]} * \overline{q}_{10} + q_{10} * U_{01}^{[2]} * \overline{q}_{00} + q_{01} * U_{10}^{[2]} * \overline{q}_{00}) = (-\frac{534}{169}, -\frac{1724}{845}, -\frac{164}{65})$$

$$\mathbf{B}_{20}^{[2]} = vec((q_{10} * U_{00}^{[2]} + 2q_{00} * U_{10}^{[2]}) * \overline{q}_{10}) = (\frac{640}{169}, \frac{1255}{338}, \frac{35}{39})$$

$$\mathbf{B}_{02}^{[2]} = vec((q_{01} * U_{00}^{[2]} + 2q_{00} * U_{01}^{[2]}) * \overline{q}_{01}) = (-\frac{1161}{169}, -\frac{1881}{169}, -\frac{66}{13})$$

$$\mathbf{B}_{30}^{[2]} = q_{10} * U_{10}^{[2]} * \overline{q}_{10}) = (\frac{10}{39}, -\frac{10}{39}, \frac{5}{6})$$

$$\mathbf{B}_{03}^{[2]} = q_{01} * U_{01}^{[2]} * \overline{q}_{01} = (\frac{240}{13}, \frac{384}{13}, 24)$$

$$\mathbf{B}_{21}^{[2]} = vec((q_{10} * U_{01}^{[2]} + 2q_{01} * U_{10}^{[2]}) * \overline{q}_{10} = (-\frac{218}{39}, -\frac{460}{39}, \frac{155}{39})$$

$$\mathbf{B}_{12}^{[2]} = vec((q_{01} * U_{10}^{[2]} + 2q_{10} * U_{01}^{[2]}) * \overline{q}_{01}) = (-30, -42, -6)$$

bulunur. Lemma 4.15. den

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1(u,v) = (&\frac{602u}{845} - \frac{48u^2}{169} - \frac{70u^3}{117} + \frac{822v}{845} + \frac{1280uv}{169} + \frac{10u^2v}{13} - \frac{534v^2}{169} + \frac{190uv^2}{39} - 10v^3,\\ &+ \frac{69}{338} + \frac{581u}{845} - \frac{703u^2}{1690} - \frac{47u^3}{117} + \frac{504v}{845} + \frac{1255uv}{169} - \frac{10u^2v}{13} - \frac{1724v^2}{845} + \frac{356uv^2}{39}\\ &- 14v^3, + \frac{983}{845} - \frac{389u}{1690} + \frac{21u^2}{65} - \frac{u^3}{2} + \frac{2279v}{1690} + \frac{70uv}{39} + \frac{5u^2v}{2} - \frac{164v^2}{65} - 3uv^2 - 2v^3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_2(u,v) = (&\frac{822u}{845} + \frac{640u^2}{169} + \frac{10u^3}{39} - \frac{2718v}{845} - \frac{1068uv}{169} + \frac{190u^2v}{39} - \frac{1161v^2}{169} - 30uv^2 + \frac{240v^3}{13},\\ &- \frac{297}{1690} + \frac{504u}{845} + \frac{1255u^2}{338} - \frac{10u^3}{39} - \frac{1884v}{845} - \frac{3448uv}{845} + \frac{356u^2v}{39} - \frac{1881v^2}{169} - 48uv^2\\ &+ \frac{384v^3}{13}, + \frac{51}{169} + \frac{2279u}{1690} + \frac{35u^2}{39} + \frac{5u^3}{2} - \frac{447v}{845} - \frac{378uv}{65} - 3u^2v - \frac{66v^2}{13} - 6uv^2 + 24v^3)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(u,v) = (&\frac{301u^2}{845} - \frac{16u^3}{169} - \frac{35u^4}{234} + \frac{822uv}{845} + \frac{640u^2v}{169} + \frac{10u^3v}{39} - \frac{1359v^2}{845} - \frac{534uv^2}{169}\\ &+ \frac{95u^2v^2}{39} - \frac{387v^3}{169} - 10uv^3 + \frac{64v^4}{13}, + \frac{69u}{338} + \frac{581u^2}{1690} - \frac{703u^3}{5070} - \frac{47u^4}{468} - \frac{297v}{1690}\\ &+ \frac{504uv}{845} + \frac{1255u^2v}{338} - \frac{10u^3v}{39} - \frac{942v^2}{845} - \frac{1724uv^2}{845} + \frac{178u^2v^2}{39} - \frac{627v^3}{169} - 14uv^3\\ &+ \frac{96v^4}{13}, \frac{93u}{845} - \frac{389u^2}{3380} + \frac{7u^3}{65} - \frac{u^4}{8} + \frac{51uv}{169} + \frac{35u^2v}{39} + \frac{5u^3v}{6} - \frac{447v^2}{1690} - \frac{164uv^2}{65}\\ &- \frac{3u^2v^2}{2} - \frac{22v^3}{13} - 2uv^3 + 6v^4)\end{aligned}$$

yüzeyi bulunur. Bkz. Şekil 4.15. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{(-5u^2 + u(30v+8) + 12v(1-5v) + 3)^2(325u^2 - 30u(65v+32) + 5v(845v+372) + 909)}{152100},\\ \mathbf{F} &= -\frac{(-5u^2 + u(30v+8) + 12v(1-5v) + 3)^2(195u^2 - u(1105v+318) + 6v(390v+107) + 9)}{30420},\\ \mathbf{G} &= \frac{(-5u^2 + u(30v+8) + 12v(1-5v) + 3)^2(4225u^2 - 780u(30v+1) + 720v(65v-12) + 2061)}{152100}\end{aligned}$$

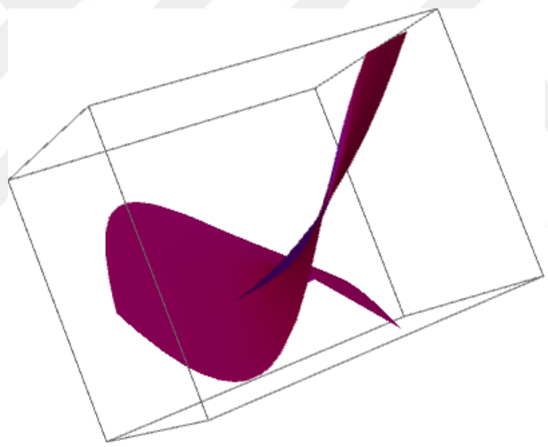
ve

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_1}) &= \mathbf{F}^2 - \mathbf{EG} \\
&= -\frac{1}{23134410000}(1368 - 930u + 650u^2 - 1575v - 3900uv + 7800v^2)^2 \\
&\quad (3 + 8u - 5u^2 + 12v + 30uv - 60v^2)^4 < 0
\end{aligned}
$$

olduğundan yüzeyimiz spacelike yüzeydir. Ayrıca

$$
\|(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v)(u,v)\|_* = \frac{1}{152100}\left|1368 - 930u + 650u^2 - 1575v - 3900uv + 7800v^2\right| \\
(3 + 8u - 5u^2 + 12v + 30uv - 60v^2)^2
$$

olduğundan bu yüzey bir spacelike kuartik polinom PN yüzeyidir.



Şekil 4.15. Spacelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi

4.3.2.2. Özel Çift Dereceli Spacelike Polinom PN Yüzeyleri

(4.84) eşitliğini sağlayan n. dereceden q split kuaterniyonunun q_{ij} katsayıları arasında bazı bağıntılar vardır.

$n = 1$ durumu için $\psi_0 = 0$ ve $c_1 \neq 0$ olmak üzere $C = (c_0, c_1, 0, 0)$ split kuaterniyonu için (4.97) ve (4.98) eşitliklerini sağlayan U_1 ve U_2 lineer kuaterniyon polinomlarını ele alalım. Bu durumda (4.84) eşitliğinde $\psi_0 = 0$ ve $q_{10} = q_{01} * C$ eşitliklerinin yerine yazılmasıyla

$$2q_{01} * C * U_2 - 2q_{01} * C * U_2 + q * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0$$

olup, buradan

$$q * (U_{01}^{[1]} - U_{10}^{[2]}) = 0$$

dir. Dolayısıyla

$$(U_1)_v = (U_2)_u$$

elde edilir.

Teorem 4.24. (2.3) eşitliği ile verilen split kuaterniyon polinomundaki katsayılar $c_1 \neq 0$ olmak üzere $C = (c_0, c_1, 0, 0)$ split kuaterniyonu için

$$(j+1)q_{i(j+1)} * C = (i+1)q_{(i+1)j}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, j = 0, 1, \cdots, n-i-1$$

ve

$$U_2(u,v) = (0,0,\alpha_3,\alpha_4) + C * (0,0,\gamma_3,\gamma_4)u + (0,0,\gamma_3,\gamma_4)v$$
$$U_1(u,v) = C * U_2(u,v)$$

eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, (4.82) eşitliği ve Lemma 4.14. ile tanımlanan parametrik S yüzeyi birim normali $\mathbf{N} = e_1$ olan $2n+2$ dereceli bir polinom PN yüzeyidir.

4.4. Spacelike Polinom PN Yüzeyinin Ortalama Eğriliği

(4.62), (4.79) ve (4.80) eşitlileri ile tanımlanan U_1 ve U_2 vektörlerini ele alalım. (4.54) eşitliğinden türetilen bir spacelike polinom PN yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= g\left(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_u\right)\\ &= g(q * U_1 * \overline{q}, q * U_1 * \overline{q})\\ &= \|q\|_*^4\, g(U_1, U_1)\\ &= \|q\|_*^4\, \|U_1\|_*^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= g\left(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v\right)\\ &= g(q * U_1 * \overline{q}, q * U_2 * \overline{q})\\ &= \|q\|_*^4\, g(U_1, U_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= g\left(\mathbf{S}_v, \mathbf{S}_v\right)\\ &= g(q * U_2 * \overline{q}, q * U_2 * \overline{q})\\ &= \|q\|_*^4\, g(U_2, U_2)\\ &= \|q\|_*^4\, \|U_2\|_*^2\end{aligned}$$

ve ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= g\left(\mathbf{S}_{uu}, \mathbf{N}\right)\\ &= \left(vec[(2q_u * U_1 + q * (U_1)_u) * \overline{q}], \mathbf{N}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= g\left(\mathbf{S}_{uv}, \mathbf{N}\right)\\ &= \left(vec[(2q_v * U_1 + q * (U_1)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right)\\ &= g\left(\mathbf{S}_{vu}, \mathbf{N}\right)\\ &= \left(vec[(2q_u * U_2 + q * (U_2)_u) * \overline{q}], \mathbf{N}\right),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} &= g\left(\mathbf{S}_{vv}, \mathbf{N}\right) \\
&= \left(vec[(2q_v * U_2 + q * (U_2)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right),
\end{aligned}
$$

dir. Burada $\mathbf{N}$ spacelike polinom PN yüzeyinin birim normaldir. Bir sonra ki Lemma, Teorem 4.16. ve Teorem 4.24. ü sağlayan bir polinom PN yüzeyi için ortalama eğrilik fonksiyonunu ifade eder.

Lemma 4.25. Tek dereceli split polinom PN yüzeyi için Teorem 4.16. ve çift dereceli split polinom PN yüzeyi için Teorem 4.24. sağlansın. O zaman, bu polinom PN yüzeylerinin ortalama eğrilikleri özdeş olarak sıfırdır.

İspat. Ortalama eğrilik özdeş olarak sıfırdır gerek ve yeter koşul $\mathbf{En} + \mathbf{Gl} - 2\mathbf{Fm} = 0$ dir.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{En} &= \|q\|_*^4 \|U_1\|_*^2 \, g\left(vec[(2q_v * U_2 + q * (U_2)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\
&= \|q\|_*^4 \|U_1\|_*^2 \, g\left(vec[(2q_v * U_1 * U_1^{-1} * U_2 + q * (U_2)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\
&= \|q\|_*^4 \|U_1\|_*^2 \, g\left(vec[(2q_v * U_1 * \frac{\overline{U_1}}{-\|U_1\|_*^2} * U_2 + q * (U_2)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\
&= -2\|q\|_*^4 \, g\left(vec(q_v * U_1 * \overline{U_1} * U_2 * \overline{q}), \mathbf{N}\right) + \|q\|_*^4 \|U_1\|_*^2 \, g\left(vec(q * (U_2)_v * \overline{q}), \mathbf{N}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Gl} &= \|q\|_*^4 \|U_2\|_*^2 \, g\left(vec[(2q_u * U_1 + q * (U_1)_u) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\
&= \|q\|_*^4 \|U_2\|_*^2 \, g\left(vec[(2q_u * U_2 * U_2^{-1} * U_1 + q * (U_1)_u) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\
&= \|q\|_*^4 \|U_2\|_*^2 \, g\left(vec[(2q_u * U_2 * \frac{\overline{U_2}}{-\|U_2\|_*^2} * U_1 + q * (U_1)_u) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\
&= -2\|q\|_*^4 \, g\left(vec(q_u * U_2 * \overline{U_2} * U_1 * \overline{q}), \mathbf{N}\right) + \epsilon_2 \|q\|_*^4 \|U_2\|_*^2 \, g\left(vec(q * (U_1)_u * \overline{q}), \mathbf{N}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
-2\mathbf{Fm} &= -2\|q\|_*^4 \, g\left(U_1, U_2\right) \left(vec[(2q_v * U_1 + q * (U_1)_v) * \overline{q}], \mathbf{N}\right) \\
&= -4\|q\|_*^4 \, g\left(U_1, U_2\right) g\left(vec(q_v * U_1 * \overline{q}), \mathbf{N}\right) - 2\|q\|_*^4 \, g\left(U_1, U_2\right) g\left(vec(q * (U_1)_v * \overline{q}), \mathbf{N})\right)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\mathbf{En}+\mathbf{Gl}-2\mathbf{Fm}=2\left\|q\right\|_*^4 g\left(vec[q_v * U_1 * (-\overline{U_1}U_2-\overline{U_2}U_1-2g\left(U_1,U_2\right))\overline{q}],\mathbf{N})\right)$$
$$+\left\|q\right\|_*^4 g\left(vec[q(\epsilon_1\left\|U_1\right\|_*^2(U_2)_v+\epsilon_2\left\|U_2\right\|_*^2(U_1)_u-2g(U_1,U_2)(U_1)_v)\overline{q}],\mathbf{N}\right)$$

dir. Bu eşitliğin sıfır olduğunu göstermek için eşitliğin sağındaki iki terimin ayrı ayrı sıfır olduğunu gösterilmelidir. İlk terim için,

$$\begin{aligned}-\overline{U_1}*U_2-\overline{U_2}*U_1-2g\left(U_1,U_2\right)&=U_1*U_2+U_2*U_1-2g\left(U_1,U_2\right)\\&=g\left(U_1,U_2\right)+U_1\times U_2+g\left(U_1,U_2\right)+U_2\times U_1-2g\left(U_1,U_2\right)\\&=0\end{aligned}$$

dir. Diğer terim ise tek dereceli yüzeylerde U_1 ve U_2 sabit kuaterniyon olduğunda sıfırdır. Çift dereceli yüzeyler de ise $U_1=C*U_2$ ve $(U_1)_v=(U_2)_u$ eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\left\|U_1\right\|_*^2(U_2)_v+\left\|U_2\right\|_*^2(U_1)_u-2g(U_1,U_2)(U_1)_v&=\left\|U_1\right\|_*^2 C^{-1}*(U_2)_u+\left\|U_2\right\|_*^2 C*(U_2)_u-2g(U_1,U_2)(U_2)_u\\&=\left[\left\|U_1\right\|_*^2 U_2*U_1{}^{-1}+\left\|U_2\right\|_*^2 U_1*U_2{}^{-1}-2g(U_1,U_2)\right]*(U_2)_u\\&=\left[\left\|U_1\right\|_*^2 U_2*\frac{\overline{U_1}}{-\left\|U_1\right\|_*^2}+\left\|U_2\right\|_*^2 U_1*\frac{\overline{U_2}}{-\left\|U_2\right\|_*^2}-2g(U_1,U_2)\right]*(U_2)_u\\&=\left[-\overline{U_1}*U_2-\overline{U_2}*U_1-2g\left(U_1,U_2\right)\right]*(U_2)_u\\&=\left[U_1*U_2+U_2*U_1-2g\left(U_1,U_2\right)\right]*(U_2)_u\\&=\left[g\left(U_1,U_2\right)+U_1\times U_2+g\left(U_1,U_2\right)+U_2\times U_1-2g\left(U_1,U_2\right)\right]*(U_2)_u\\&=0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, çift dereceli polinom PN yüzeyleri için de ispat tamamlanır.

Örnek 4.26. Kontrol noktalarından ikisi

$$q_{00}=(1,0,0,0),\quad q_{01}=(-4,-5,3,4)$$

ve

$$C=(-\frac{1}{4},\frac{5}{6},0,0)$$

seçilirse, $c_2 = c_3 = 0$ olduğundan son kontrol noktası

$$\begin{aligned} q_{10} &= q_{01} * C \\ &= (\frac{31}{6}, -\frac{25}{12}, \frac{31}{12}, -\frac{7}{2}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (2.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} q &= q_{00} + q_{10}u + q_{01}v \\ &= (\frac{31u}{6} - 4v + 1, -\frac{25u}{12} - 5v, \frac{31u}{12} + 3v, 4v - \frac{7u}{2}) \end{aligned}$$

dir. (4.97) eşitliğinden

$$\begin{aligned} U_{10}^{[2]} &= C * U_{01}^{[2]} \\ &= (0, 0, -\frac{49}{144}, \frac{1}{8}) \end{aligned}$$

olup (4.79) eşitliğinde yerine yazılması ile

$$\begin{aligned} U_2 &= U_{00}^{[2]} + U_{10}^{[2]}u + U_{01}^{[2]}v \\ &= (0, 0, -\frac{49u}{144} + \frac{v}{4} + \frac{1}{2}, \frac{u}{8} + \frac{v}{3} - \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.98) eşitliğinden de

$$\begin{aligned} U_1 &= C * U_2 \\ &= (0, 0, -\frac{11u}{576} - \frac{49v}{144} + \frac{11}{72}, -\frac{17u}{54} + \frac{v}{8} + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

bulunur. (4.82) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= q * U_1 * \overline{q} \\ &= (\frac{1677125u^3}{124416} + \frac{36125u^2v}{3456} - \frac{58993u^2}{2592} - \frac{17375uv^2}{288} + \frac{1207uv}{216} - \frac{263u}{72} + \frac{625v^3}{72} + \frac{254v^2}{9} - \frac{16v}{9}, \\ &\quad -\frac{1617851u^3}{124416} - \frac{47203u^2v}{3456} + \frac{19495u^2}{864} + \frac{17441uv^2}{288} - \frac{965uv}{216} + \frac{6295u}{1728} - \frac{527v^3}{72} - \frac{85v^2}{3} + \frac{55v}{16} + \frac{11}{72}, \\ &\quad -\frac{81121u^3}{15552} + \frac{4237u^2v}{432} + \frac{48617u^2}{10368} + \frac{511uv^2}{36} - \frac{3979uv}{432} + \frac{607u}{144} - \frac{67v^3}{9} - \frac{227v^2}{72} - \frac{389v}{72} + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

ve

$$\mathbf{g}_2 = q * U_2 * \overline{q}$$
$$= (\frac{36125u^3}{10368} - \frac{17375u^2v}{288} + \frac{1207u^2}{432} + \frac{625uv^2}{24} + \frac{508uv}{9} - \frac{16u}{9} + \frac{125v^3}{6} - \frac{67v^2}{3} + 6v,$$
$$- \frac{47203u^3}{10368} + \frac{17441u^2v}{288} - \frac{965u^2}{432} - \frac{527uv^2}{24} - \frac{170uv}{3} + \frac{55u}{16} - \frac{131v^3}{6} + \frac{65v^2}{3} - \frac{85v}{12} + \frac{1}{2},$$
$$+ \frac{4237u^3}{1296} + \frac{511u^2v}{36} - \frac{3979u^2}{864} - \frac{67uv^2}{3} - \frac{227uv}{36} - \frac{389u}{72} - \frac{4v^3}{3} + \frac{49v^2}{6} - 2v - \frac{1}{3})$$

dir. Lemma 4.14. den

$$\mathbf{S}(u,v) = (\frac{1677125u^4}{497664} + \frac{36125u^3v}{5184} - \frac{58993u^3}{7776} - \frac{17375u^2v^2}{288} + \frac{1207u^2v}{216} - \frac{263u^2}{144} + \frac{625uv^3}{36} + \frac{508uv^2}{9}$$
$$- \frac{32uv}{9} + \frac{125v^4}{24} - \frac{67v^3}{9} + 3v^2, - \frac{1617851u^4}{497664} - \frac{47203u^3v}{5184} + \frac{19495u^3}{2592} + \frac{17441u^2v^2}{288} - \frac{965u^2v}{216}$$
$$+ \frac{6295u^2}{3456} - \frac{527uv^3}{36} - \frac{170uv^2}{3} + \frac{55uv}{8} + \frac{11u}{72} - \frac{131v^4}{24} + \frac{65v^3}{9} - \frac{85v^2}{24} + \frac{v}{2}, - \frac{81121u^4}{62208} + \frac{4237u^3v}{648}$$
$$+ \frac{48617u^3}{31104} + \frac{511u^2v^2}{36} - \frac{3979u^2v}{432} + \frac{607u^2}{288} - \frac{134uv^3}{9} - \frac{227uv^2}{36} - \frac{389uv}{36} + \frac{u}{2} - \frac{v^4}{3} + \frac{49v^3}{18} - v^2 - \frac{v}{3})$$

yüzeyi bulunur. Bkz. Şekil 4.16. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$\mathbf{E} = -\frac{109\left(109u^2 + u(93-72v) + 9(1-4v)^2\right)^2\left(2725u^2 - 72u(25v+122) + 144(v(25v+4)+52)\right)}{241864704},$$
$$\mathbf{F} = -\frac{\left(109u^2 + u(93-72v) + 9(1-4v)^2\right)^2\left(2725u^2 - 72u(25v+122) + 144(v(25v+4)+52)\right)}{6718464}$$
$$\mathbf{G} = \frac{\left(109u^2 + u(93-72v) + 9(1-4v)^2\right)^2\left(2725u^2 - 72u(25v+122) + 144(v(25v+4)+52)\right)}{1679616}$$

ve yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları

$$\mathbf{l} = \frac{-9125u - 9000v + 18936}{5184},$$
$$\mathbf{m} = \frac{128 - 125u + 250v}{72},$$
$$\mathbf{n} = -6 + \frac{125u}{36}$$

dir. Buradan

$$\mathbf{En} + \mathbf{Gl} - 2\mathbf{Fm} = 0$$

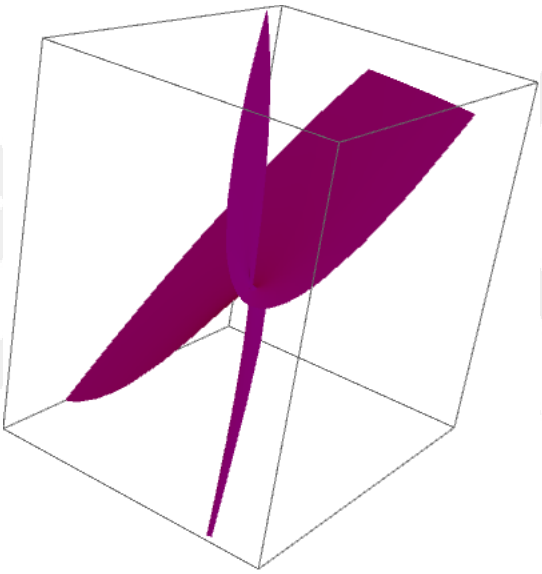
ve

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{N_1},\mathbf{N_1}) &= \mathbf{F}^2-\mathbf{EG}\\
&= -\frac{25\left(109u^2+u(93-72v)+9(1-4v)^2\right)^4\left(2725u^2-72u(25v+122)+144(v(25v+4)+52)\right)^2}{101559956668416}
\end{aligned}
$$

olduğundan yüzeyimiz spacelike maksimal yüzeydir. Ayrıca

$$
\|(\mathbf{S}_u\times\mathbf{S}_v)(u,v)\|_* = \frac{5\left(109u^2+u(93-72v)+9(1-4v)^2\right)^2\left|2725u^2-72u(25v+122)+144(v(25v+4)+52)\right|}{10077696}
$$

olduğundan bu yüzey bir özel spacelike kuartik polinom PN yüzeyidir.



Şekil 4.16. Özel Spacelike Kuartik Polinom PN Yüzeyi

KAYNAKLAR

[1]. Beem, J.K. and Ehrlich, P.E., 1981, *Global Lorentzian Geometry*, Mercel Dekker. Inc., New York.

[2]. Brand, L., 2006. *Advanced calculus: an introduction to classical analysis*. Courier Corporation.

[3]. Caballero, M., Pelegrín, J. A. and Rubio, R. M., 2021. Area Maximizing Surfaces in Lorentzian Spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 18 (3), 1-13.

[4]. Farin, G., 1989. Rational curves and surfaces. *In Mathematical methods in computer aided geometric design*, Academic Press, 215-238.

[5]. Farouki, R. T. and Sakkalis, T., 1990. Pythagorean hodographs. *IBM Journal of Research and Development*, 34 (5), 736-752.

[6]. Farouki, R. T., 2008. *Pythagorean—hodograph curves*. Springer, Berlin, Heidelberg, 381-391.

[7]. Hacısalihoğlu, H. H., 1983, *Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi*, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math. No.2.

[8]. Hamilton, W., 1853, *Lectures on quaternions*, Hodges Smith and Co., Dublin; London.

[9]. Jafari, M. and Yaylı, Y., 2015, Generalized quaternions and their algebreaic properties, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1*, 64 (1), 15-27.

[10]. Kozak, J., Krajnc, M. and Vitrih, V., 2016, A quaternion approach to polynomial PN surfaces, *Comput. Aided Geom. Des*, 47, 172-188.

[11]. Kula, L. and Yaylı Y., 2007, Split quaternions and rotations in semi-Euclidean space E_2^4, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 44 (6), 1313-1327.

[12]. Larson, R., 2012, Elementary Linear Algebra, *The Pennsylvania State University*, Boston MA.

[13]. Lavicka, M. and Vrsek, J., 2012, *On a special class of polynomial surfaces with Pythagorean normal vector fields*, Springer, Berlin, Heidelberg, 431-444.

[14]. Lee, S. H., 2010, Rational curves are not unit speed in the general Euclidean space, *East Asian mathematical journal*, 26(1), 69-73.

[15]. López, R., 2014, Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, *International Electronic Journal of Geometry*, 7 (1), 44-107.

[16]. O'Neil, B., 1983, *Semi Riemannian Geometri*, Acedemic Press, New York.

[17]. Pottmann, H., Abbena, E. and Salamon, S., 1995, *Rational curves and surfaces with rational offsets*, Comput. Aided Geom. Des. 12 (2), 175-192.

[18]. Turgut, A., 1995, *3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[19]. Sabuncuoğlu, A., 2006, *Diferensiyel Geometri*, Nobel-Ankara.

[20]. Ueda, K., 1998, *Pyhagorean-hodograph curves on isothermal surfaces*, In: The Mathematics of Surfaces, VIII. Birmingham, Info. Geom., Winchester, 339-353.

[21]. Walrave, J., Curves and surfaces in Minkowski space, Thesis (Ph.D.), Katholieke Universiteit, Leuven (Belgium), 1995.

[22]. Weinstein, T., 1995, *Lorentz Surfaces*, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey.

[23]. Williams, M.Z. and Stein, F.M., 1964, A Triple Product of Vectors in Four-Space, *Mathematical Association of America*, 37 (4), 230-235.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Benen AKINCI
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen - Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2011

Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Geometri
Mezuniyet Yılı	2014

Doktora	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Geometri
Mezuniyet Yılı	2021

Makale ve Bildiriler
1- Benen Akıncı, Hasan Altınbaş, Levent Kula; Timelike pythagorean normal surfaces with normal $N = e_3$ in Minkowski space. 18th International Geometry Symposium, Malatya 2021.
2-Benen Akıncı, Hasan Altınbaş, Levent Kula; Spacelike pythagorean normal surfaces with normal $N = e_1$ in Minkowski space. IECMSA 2021, Sakarya TURKEY.