T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Q-ANALİZİ VE UYGULAMALARI

Esra GÖKŞİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
OCAK 2015

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Q-ANALİZİ VE UYGULAMALARI

Esra GÖKŞİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. M. Baki YAĞBASAN

KIRŞEHİR
OCAK 2015

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan:
Yrd. Doç. Dr. Yasemin KIYMAZ

Üye:
Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

Üye:
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Baki YAĞBASAN

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

30/01/2015

ÜNVAN ADI SOYADI
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik, davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Esra GÖKŞİN

Q-ANALİZİ VE UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Esra GÖKŞİN

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Ocak 2015

ÖZET

Tezin ilk kısımı, q-analizinde gerekli tanım ve eşitliklerin yanısıra klasik analizin temel kavramları olan türev, integral ve seri kavramlarının q versiyonlarının tanıtılmasına ayrılmıştır. Tezin ikinci kısımı, bazı özel fonksiyonların q-benzerlerinin tanıtılmasına ayrılmıştır. Tezin üçüncü ve son kısımında Picard, Gauss-Weierstrass operatörleri ile Bernstein tipi operatörlerinin q-benzerleri ve bu operatörlerin yaklaşım ve yakınsaklık özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: q-analizi, q-integral operatörler, q-özel fonksiyonlar
Sayfa Adedi: 36
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. M. Baki YAĞBASAN

Q-ANALYSIS AND APPLICATIONS

(Master Thesis)

Esra GÖKŞİN

Ahi Evran University
Institute of Science

January 2015

ABSTRACT

The first chapter of this thesis is devoted to introduce q-versions of derivative, integral and power series besides some definitions and equalities required in q-analysis. The second chapter is devoted to introduce the q-analogues of some special functions. In the final chapter of this thesis, q-analogues of Picard, Gauss-Weierstrass operators and Bernstein type operators are introduced and their approximation and convergence properties are examined.

Keywords q-analysis, q-integral operators, q-special functions
Number of Pages: 36
Thesis Advisor: Yrd. Doç. Dr. M. Baki YAĞBASAN

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlama aşamasında bilgilerini paylaşmak adına büyük yol almamı sağlayan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. M. Baki YAĞBASAN'a ayrıca her zaman bana destek olan dostlarım Ş. Gülçiçek ESKİ ve Öznur YÜCEL'e ve hayatım boyunca yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Esra GÖKŞİN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	**Açıklama**
$[n]$	Bir n tamsayısının q-benzeri
$(a;q)_k$	q-Pochammer sembolü
$(a+x)_q^n$	$(a+x)^n$ nin q-benzeri
e_q^x	Üstel fonksiyonun q-benzeri
E_q^x	Üstel fonksiyonun q-benzeri
$c_q(x)\Gamma_q(x)$	Euler integral temsilinin q-genişlemesi
$P_\lambda(f;x)$	Picard singüler integrali
$P_\lambda(f;q,x)$	q-Picard singüler integrali
$W_\lambda(f;x)$	Gauss-Weierstrass singüler integrali
$W_\lambda(f;q,x)$	q-Gauss-Weierstrass singüler integrali
$\omega_p(f;\delta)$	f'nin süreklilik modülü
$L_{p,\omega}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ üzerinde ω ağırlık fonksiyonuna göre p-mutlak integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$B_n(f;x)$	Bernstein polinomu
$B_n(f;q,x)$	q-Bernstein polinomu
$K_n(f,x)$	Bernstein-Kantorovich operatörü
$K_{n,q}(f,x)$	q-Bernstein-Kantorovich operatörü
$D_n(f,x)$	Bernstein-Durrmeyer operatörü
$D_{n,q}(f,x)$	q-Bernstein-Durrmeyer operatörü
$B_n^p(f,x)$	Bernstein-Schurer operatörü
$B_n^p(f;q,x)$	q-Bernstein-Schurer operatörü
$K_n^p(f;q;x)$	q-Bernstein-Schurer-Kantorovich operatörü

1. GİRİŞ

Kuantum analizi veya q-analizi genellikle limitsiz analiz olarakta bilinir ve q-analizinin geçmişi Leonhard Euler'e kadar uzanmaktadır. Aslında q-serileri ilk olarak sayılar teorisi, eliptik ve modüler fonksiyonlarda örnekler olarak ortaya çıktı. Modern anlamda q-analizinin başlangıcı Jackson tarafından yayınlanan, ilk olarak q-integrallerin sistematik olarak tanımlanıp geliştirildiği [1] makalesi ile başlatılabilir. Daha sonra q-gama ile q-beta fonksiyonlarının integral temsilleri Sole ve Kac tarafından [6]'da verilmiştir. Günümüzde q-analizinin geniş bir uygulama alanı vardır. Matematikte özel fonksiyonlar, ortogonal polinomlar ile Lie cebirleri gibi ve fizikte genel rölativite, sicim teorisi, kuantum kromodinamiği, moleküler ve nükleer spektroskopi gibi uygulama alanları vardır. Fizikteki bu uygulamalar hakkında bilgi almak için [2] nolu kaynağa bakılabilir.

Son yıllarda, bu tezde yer alan Picard, Gauss-Weierstrass ve Bernstein tipi (Bernstein-Kantorovich, Bernstein-Durrmeyer ve Bernstein-Schurer-Kantorovich gibi) operatörlerin yanısıra bu tezde yer almayan daha bir çok operatörün q-versiyonları tanımlanıp bu operatörlerin çeşitli yakınsaklık ve yaklaşım özellikleri bir çok matematikçi tarafından araştırılmaktadır. Ali Aral, Vijay Gupta ve Ravi P. Agarwal [9]'de son yıllarda tanımlanan q-operatörleri derlemişlerdir.

Bu çalışmada, son bölüm [9] nolu kaynakta yer almayan M. A. Özarslan ve T. Vedi tarafından [18]'de tanıtılan q-Bernstein-Schurer-Kantorovich operatörlerinin incelenmesine ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. q-Analizinde Temel Tanımlar

Bu kısımda q-analizindeki temel tanımlar olan q-sayılarının tanımlanması, q-faktöriyel ve q-Pochammer sembolü gibi kavramlar tanımlanıp q-analizinin önemli teoremlerden biri olan Binom teoremi verilecektir.

Klasik q-teorisi negatif olmayan tamsayıların q-benzerlerini tanımlamakla başlamıştır. Bir n tamsayısının q-benzeri $0 < q < 1$ için

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{1 - q^n}{1 - q} = n$$

eşitliğinden ilham alarak tanımlanmıştır. Bu tez boyunca aksi söylenmedikçe $0 < q < 1$ kabul edilecektir.

Tanım 2.1. Bir n pozitif tamsayısının q-benzeri $0 < q < 1$ için $[n]_q$ veya kısaca $[n]$ gösterimi kullanılır ve

$$[n] = [n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu son eşitlik, reel veya kompleks bir α sayısının q-benzerini tanımlamak için de kullanılır. Yani reel veya kompleks α sayısının q-benzeri

$$[\alpha] = \frac{1 - q^\alpha}{1 - q}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu son eşitlikte $\alpha \to \infty$ için limit alınarak klasik analizdeki sonsuz kavramının q-benzeri

$$[\infty] = \frac{1}{1 - q}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Tanım 2.2. Doğal sayılardaki faktöriyel kavramına benzer şekilde bir n pozitif tamsayısı için $[n]! = [1][2] \cdots [n]$ eşitliği ile tanımlanır. Ayrıca $[0]! = 1$ dir [3].

Tanım 2.3. Bir a kompleks sayısı ve $0 < q < 1$ için $(1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - aq^{k-1})$ çarpımı $(a; q)_k$ sembolü ile gösterilir ve $(a; q)_k$ gösterimine q-Pochhammer sembolü denir [3].

Bu durumda $(a;q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)$ olur. Bu eşitlikte $n \to \infty$ için limit alınarak sonsuz q-Pochammer sembolü $(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)$ elde edilir. $a = q$ alındığında $(q;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-qq^k)$ olduğundan q-faktöriyel, q-Pochhammer sembolü cinsinden

$$[n]! = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} = \frac{(q;q)_\infty}{(1-q)^n(q^{n+1};q)_\infty}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Klasik analizde n, k iki doğal sayı ve $n > k$ olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dir ve $(x+y)^n$ iki terimlisi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

şeklinde açılıma sahiptir. q-analizinde

$$xq = qx, \quad yq = qy \quad \text{ve} \quad yx = qxy$$

değişme kuralları kabul edildiğinde Gaussian katsayıları veya Gaussian Binom katsayıları olarak da adlandırılan q-binom katsayılarının tanımına ulaşılır.

Tanım 2.4. Binom katsayılarının q-benzeri

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]!\,[k]!}$$

şeklinde tanımlanır [3].

q-Binom katsayılarının q-Pochhammer cinsinden ifadesi

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{\frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}}{\frac{(q;q)_{n-k}}{(1-q)^{n-k}}\frac{(q;q)_k}{(1-q)^k}} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}(q;q)_k}$$

şeklindedir. Üstelik $(x+y)^n$ iki terimlisinin açılımının q-analizindeki karşılığı

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k$$

şeklindedir.

Klasik analizde binom katsayıları arasında

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

şeklinde bir ilişki vardır. Gaussian Binom katsayıları arasında ise

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

şeklinde iki ilişki söz konusudur. Burada

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$$

dir [3].

q-Pochammer sembolü ile ilgili aşağıdaki eşitlikler daha önce verilen tanım ve eşitlikler kullanılarak doğrudan hesaplamalarla ispatlanabilir. Burada verilen eşitlikler ve fazlası için [5] nolu referansa bakılabilir.

(1) $(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$

(2) $(a;q)_{n+k} = (a;q)_n (aq^n;q)_k$

(3) $(a;q)_n = \frac{(a;q)_k (aq^k;q)_n}{(aq^n;q)_k}$

(4) $(a;q)_n = (a;q)_k (aq^k;q)_{n-k}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n$

(5) $(a;q)_n = (a^{-1}q^{1-n};q)_n (-a)^n q^{\binom{n}{2}}, \quad a \neq 0$

(6) $(aq^{-n};q)_n = (a^{-1}q;q)_n (-a)^n q^{-n-\binom{n}{2}}, \quad a \neq 0$

(7) $(a;q)_{2n} = (a;q^2)_n (aq;q^2)_n$

(8) $(a^2;q^2)_n = (a;q)_n (-a;q)_n$

(9) $(a;q)_\infty = (a;q^2)_\infty (aq;q^2)_\infty$

(10) $(a^2;q^2)_\infty = (a;q)_\infty (-a;q)_\infty$

(11) $(a;q)_k = (1-a)(aq;q)_{k-1}$

(12) $(q;q)_k = (1-q^k)(q;q)_{k-1}$

(13) $(a;q)_k - (aq;q)_k = -a(1-q^k)(aq;q)_{k-1}$

Bu kısım, q-Binom teoreminin ifadesi, ispatı ve bazı sonuçları ile bitirilecektir.

Teorem 2.5. Her $k \in \mathbb{N}$ için $c_k \geq 0$

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1-c_k) < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$$

[8].

Teorem 2.6. (q-Binom Teoremi) $|x| < 1,\ |q| < 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

dır [3].

İspat $f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k$ olsun. Bu durumda

$$\frac{f_a(x) - f_a(qx)}{x(1-q)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} \frac{x^k - (qx)^k}{x(1-q)}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{f_a(x) - f_a(qx)}{x} &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k (1-q^k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} (1-q^k) x^{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (11) ve (12) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{f_a(x) - f_a(qx)}{x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} (1-q^k) x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-a)(aq;q)_{k-1}}{(1-q^k)(q;q)_{k-1}} (1-q^k) x^{k-1} \\ &= (1-a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}} x^{k-1} \\ &= (1-a) f_{aq}(x) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla da

$$f_a(x) - f_a(qx) = (1-a) x f_{aq}(x) \tag{2.1}$$

eşitliği elde edilir.

f_a fonksiyonunun tanımlanışından $f_{aq}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k$ olup

$$\begin{aligned}
f_a(x)-f_{aq}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a;q)_k-(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (13) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
f_a(x)-f_a(qx) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a;q)_k-(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-a(1-q^k)(aq;q)_{k-1}}{(1-q^k)(q;q)_{k-1}}x^k \\
&= -ax\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}x^{k-1} \\
&= -ax\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k \\
&= -axf_{aq}(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla da

$$f_a(x)=(1-ax)f_{aq}(x) \tag{2.2}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen (2.1) ve (2.2) eşitlikleri taraf tarafa oranlanlanarak

$$\frac{f_a(x)-f_a(qx)}{f_a(x)}=\frac{(1-a)xf_{aq}(x)}{(1-ax)f_{aq}(x)}$$

ve bu eşitlik düzenlenerek

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= \frac{1-ax}{1-x}f_a(qx) \\
f_a(x) &= \frac{1-ax}{1-x}\frac{1-aqx}{1-qx}f_a(q^2x) \\
&\vdots \\
f_a(x) &= \frac{1-ax}{1-x}\frac{1-aqx}{1-qx}\cdots\frac{1-aq^{n-1}x}{1-q^{n-1}x}f_a(q^nx)=\frac{(ax;q)_n}{(x;q)_n}f_a(q^nx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n\to\infty$ iken limit alınabilmesi için $(ax;q)_n$ ve $(x;q)_n$ yakınsak olması gerekmektedir. O halde, Teorem 2.5.'den dolayı $\sum_{k=0}^{\infty}q^k$ geometrik serisi yakınsak olduğundan $\prod_{k=0}^{\infty}(1-xq^k)$ ve $\prod_{k=0}^{\infty}(1-axq^k)$ çarpımları da yakınsaktır. $n\to\infty$ iken limit alınarak

$$f_a(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k=\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

bulunur. ■

Sonuç 2.7. q-binom teoreminin sonuçları aşağıda verilmiştir [3].

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(x;q)_\infty}, \ |x| < 1, |q| < 1.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n}{(q;q)_n} = (x;q)_\infty, \ |q| < 1.$

(c) $\sum_{k=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} x^k = (x;q)_N.$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \frac{1}{(x;q)_N}, \quad |x| < 1.$

İspat Teorem(2.6.)'da $a = 0$, $a = q^{-N}$ ve $a = q^N$ konularak sırasıyla (a), (c) ve (d) eşitlikleri elde edilir. (b) şıkkını elde etmek için Teorem(2.6.)'da a yerine $\frac{1}{a}$ ve x yerine ax yazmak yeterlidir. ■

2.2. q-Türev ve q-İntegral

Tanım 2.8. Bir f fonksiyonunun q-diferensiyeli $d_q f$ ile gösterilir ve

$$d_q f(x) = f(x) - f(qx)$$

şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 2.9. Bir f fonksiyonunun q-türevi $D_q f$ ile gösterilir ve $x \neq 0$ olmak üzeren klasik analizdeki türev tanımına benzer olarak

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

şeklinde iki diferensiyelin oranı olarak tanımlanır [6]. f fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki q-türevi ise $f'(0)$ olarak tanımlanır. Buna göre bir f fonksiyonunun q-türevi

$$D_q f(x) = \begin{cases} \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde de ifade edilir [5].

q-Türev ile ilgili özellikler aşağıda listelenmiştir. Bu eşitliklerin ispatı q-türev tanımı ve doğrudan hesaplamalarla elde edilebilir. Bu eşitlikler ispatı ile [4]'de bulunabilir.

(1) $D_q(f(x) \pm g(x)) = (D_q f)(x) \pm (D_q g)(x)$

(2) $D_q(\alpha f(x)) = \alpha (D_q f)(x)$

(3) $D_q(f(x)g(x)) = f(qx)(D_q g)(x) + g(x)(D_q f)(x)$

(4) $D_q(f(x)g(x)) = f(x)(D_q g)(x) + g(qx)(D_q f)(x)$

(5) $D_q\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(qx)g(x)}, \quad g(qx)g(x) \neq 0$

(6) $D_q\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(qx)g(x)}, \quad g(qx)g(x) \neq 0$

Burada sadece Leibniz kuralının ispatı verilecektir.

$$\begin{aligned}
D_q(f(x)g(x)) &= \frac{f(x)g(x) - f(qx)g(qx)}{(1-q)x} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(qx)g(x) + f(qx)g(x) - f(qx)g(qx)}{(1-q)x} \\
&= f(qx)\frac{g(x) - g(qx)}{(1-q)x} + g(x)\frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x} \\
&= f(qx)(D_q g)(x) + g(x)(D_q f)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3) ispatlanır. (4) eşitliğini ispatlamak için ikinci eşitlikte $f(qx)g(x)$ yerine $f(x)g(qx)$ terimi eklenip çıkartılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (4) görülür.

Tanım 2.10. q-integralin tanımı Thomae[1869] ve Jackson[1910] tarafından verilmiştir. Bir f fonksiyonunun $[0, a]$ aralığı üzerinden q-integrali

$$\int_0^a f(x)d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n - aq^{n+1}) = a(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(aq^n)$$

eşitliği ile tanımlanır. a ve b keyfi sayılar olmak üzere

$$\int_a^b f(x)d_q x = \int_0^b f(x)d_q x - \int_0^a f(x)d_q x$$

şeklinde tanımlanır [3].

Burada $q \to 1^-$ iken limit alınarak

$$\lim_{q \to 1^-} \int_0^a f(x) d_q x = \int_0^a f(x) dx$$

elde edilir. Klasik analizin temel teoremlerinin q-benzerleri aşağıda verilmiştir. Bu teoremler ispatlarıyla birlikte [3]'de bulunabilir.

Teorem 2.11. $x = a$ noktasında sürekli bir f fonksiyonunun q-anti türevi F ise yani $D_q F = f$ ise

$$\int_a^b f(x) d_q x = F(b) - F(a)$$

dır [3].

İspat $F(x) = (1-q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x) + F(0)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} D_q F(x) &= \frac{F(x) - F(qx)}{(1-q)x} \\ &= \frac{1}{(1-q)x} \left((1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - (1-q)qx \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^{j+1} x) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - \sum_{j=0}^{\infty} q^{j+1} f(q^{j+1} x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - \sum_{j=1}^{\infty} q^j f(q^j x) = f(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece F fonksiyonu f nin ilkelidir. Buradan

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) d_q x &= \int_0^a f(x) d_q x - \int_0^b f(x) d_q x \\ &= b(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(bq^n) - a(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(aq^n) + F(0) - F(0) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.12. Herhangi bir f fonksiyonu için

$$D_q \int_0^x f(t) d_q t = f(x)$$

dir [3].

2.3. q-Kuvvet Serileri

Klasik analizde

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

şeklindeki sonsuz toplama *kuvvet serisi* denir. Buradaki c_k sayılarına serinin katsayıları adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu a noktasının bir komşuluğunda her mertebeden türeve sahip ise f fonksiyonu bu komşuluktaki her bir x için

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

şeklinde bir kuvvet serisi olarak ifade edilebilir. Bu kuvvet serisine *Taylor serisi* denir. Bu kısımda bir f fonksiyonunun q-Taylor serisi kavramı incelenecektir.

Herhangi bir $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için x^n nın q-türevi

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{(q^n-1)x^n}{(q-1)x} = \frac{1-q^n}{1-q}\frac{x^n}{x} = [n]x^{n-1}$$

olmasına rağmen

$$D_q(x-a)^n \neq [n](x-a)^{n-1}$$

dir. Dolayısıyla q-analizinde $D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$ özelliğini sağlayan ve Taylor serisinde $(x-a)^n$ ifadesinin yerini tutacak bir ifadeye ihtiyaç vardır.

Tanım 2.13. $a, b \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $(a+b)^n$ nin q-benzeri $(a+b)_q^n$ ile gösterilir ve

$$(a+b)_q^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \prod_{j=0}^{n-1}(a+q^j b) = (a+b)(a+bq)\cdots(a+bq^{n-1}), & n \geq 1 \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanır [6].

Örnek 2.14. Bu örnekte, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $D_q(x+a)_q^n = [n](x+a)_q^{n-1}$

eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
D_q(x+a)_q^n &= \frac{(qx+a)_q^n - (x+a)_q^n}{(q-1)x} \\
&= \frac{(qx+a)\cdots(qx+aq^{n-1}) - (x+a)\cdots(x+aq^{n-1})}{(q-1)x} \\
&= \frac{((qx+a)q^{n-1} - (x+aq^{n-1}))(x+a)_q^{n-1}}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q^n x + aq^{n-1} - x - aq^{n-1})(x+a)_q^{n-1}}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q^n-1)x(x+a)_q^{n-1}}{(q-1)x} \\
&= \frac{q^n-1}{q-1}(x+a)_q^{n-1} \\
&= [n](x+a)_q^{n-1}, \quad (x+a)_q^0 = 1
\end{aligned}$$

Örnek 2.15. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $D_q(a+x)_q^n = [n](a+qx)_q^{n-1}$ eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
D_q(a+x)_q^n &= \frac{(a+qx)_q^n - (a+x)_q^n}{(q-1)x} \\
&= \frac{(a+qx)\cdots(a+q^n x) - (a+x)\cdots(a+q^{n-1}x)}{(q-1)x} \\
&= \frac{((a+q^n x) - (a+x))(a+qx)_q^{n-1}}{(q-1)x} \\
&= \frac{(a+q^n x - a - x)(a+qx)_q^{n-1}}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q^n-1)x(a+qx)_q^{n-1}}{(q-1)x} \\
&= \frac{q^n-1}{q-1}(a+qx)_q^{n-1} \\
&= [n](a+qx)_q^{n-1}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $D_q(x+a)_q^n \neq D_q(a+x)_q^n$ dir. Benzer işlemler yapılarak $D_q(x-a)_q^n = -[n](x-a)_q^{n-1}$ eşitliği benzer hesaplamalarla gösterilebilir. Böylece bir f fonksiyonunun Taylor açılımının q-benzeri aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 2.16. f fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli ve $c \in [a,b]$ olsun. O halde f nin q-Taylor açılımı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_q^n f(c)}{[n]!}(z-c)_q^n, \quad z \in (a,b)$$

formal serisi ile verilir [7].

Basit hesaplamalarla $(a-b)_q^n = a^n(\frac{b}{a};q)_n$ eşitliği kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla bir f fonksiyonunun q-Taylor serisi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_q^n f(c)}{[n]!} z^n \Big(\frac{c}{z};q\Big)_n$$

eşitliği ile verilir.

3. BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR VE Q-BENZERLERİ

3.1. Hipergeometrik Fonksiyonlar

Klasik analizde hipergeometrik fonksiyon

$$ {}_rF_s\left(\begin{matrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_s \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_r)_k}{(b_1)_k \cdots (b_s)_k} \frac{z^k}{k!} $$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada hipergeometrik fonksiyonun yakınsaklık yarıçapı

$$ \rho = \begin{cases} \infty & ; r < s+1 \\ 1 & ; r = s+1 \\ 0 & ; r > s+1 \end{cases} $$

dır.

Tanım 3.1. Hipergeometrik fonksiyonun q-benzeri

$$ {}_r\varphi_s\left(\begin{matrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_s \end{matrix}\middle| q; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_k \cdots (a_r;q)_k}{(b_1;q)_k \cdots (b_s;q)_k} \left((-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right)^{1+s-r} \frac{z^k}{(q;q)_k} $$

şeklinde tanımlanır. Burada q-hipergeometrik fonksiyonun yakınsaklık yarıçapı

$$ \rho = \begin{cases} \infty & ; r < s+1 \\ 1 & ; r = s+1 \\ 0 & ; r > s+1 \end{cases} $$

dır[5].

$(a;q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}) = (1-a)_q^n$ olduğundan q-hipergeometrik seri

$$ {}_r\varphi_s\left(\begin{matrix} a_1, \cdots, a_r \\ b_1, \cdots, b_s \end{matrix}\middle| q; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a_1)_q^k \cdots (1-a_r)_q^k}{(1-b_1)_q^k \cdots (1-b_s)_q^k} \left((-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right)^{1+s-r} \frac{z^k}{(1-q)_q^k} $$

şeklinde verilebilir.

Hipergeometrik fonksiyonların bazı dönüşüm formülleri

$$\begin{aligned}
{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\middle| q; z\right) &= \frac{(1-az)_q^\infty (1-b)_q^\infty}{(1-c)_q^\infty (1-z)_q^\infty} {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} b^{-1}c, z \\ az \end{matrix}\middle| q; b\right) \\
&= \frac{(1-b^{-1}c)_q^\infty (1-bz)_q^\infty}{(1-c)_q^\infty (1-z)_q^\infty} {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} abc^{-1}z, b \\ bz \end{matrix}\middle| q; \frac{c}{b}\right) \\
&= \frac{(1-abc^{-1}z)_q^\infty}{(1-z)_q^\infty} {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a^{-1}c, b^{-1}c \\ c \end{matrix}\middle| q; \frac{abz}{c}\right)
\end{aligned}$$

olup bu dönüşüm formülleri ile daha fazlası [5]'de bulunabilir.

3.2. Üstel Fonksiyon

Klasik analizde üstel fonksiyonun seri açılımı

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

dır. Bu kısımda üstel fonksiyonun q-benzerleri incelenecektir. Literatürde üstel fonksiyonun iki farklı q benzeri mevcuttur. Bu q-üstel fonksiyonlar sırasıyla e_q^x ve E_q^x ile gösterilir. Üstel fonksiyonun e_q^x ile gösterilen q-benzeri $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ seri açılımı kullanılarak tanımlanır. Yani

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!}$$

eşitliği ile tanımlanır. Buradan

$$\begin{aligned}
e_q^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q)^n x^n}{(q;q)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big((1-q)x\big)^n}{(q;q)_n} \\
&= \frac{1}{\big((1-q)x;q\big)_\infty} = \frac{1}{\big(1-(1-q)x\big)_q^\infty}
\end{aligned}$$

elde edilir. Üstel fonksiyonun diğer q-benzeri E_q^x ile gösterilir ve E_q üstel fonksiyonu Sonuç 2.7. (b)'deki

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n}{(q;q)_n} = (x;q)_\infty$$

eşitliğinde x yerine $-(1-q)x$ yazılarak

$$E_q^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{n}{2}}(-(1-q)x)^n}{(q;q)_n}=\big(-(1-q)x;q\big)_\infty=\big(1+(1-q)x\big)_q^\infty$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda tanıtılan q-üstel fonksiyonların tanımları için [7] veya [3]'e bakılabilir.

Burada yeni tanımlanan q-üstel fonksiyonların özellikleri incelenecektir. İlk olarak, e_q ve E_q fonksiyonları q-hipergeometrik fonksiyon cinsinden

$$e_q^x={}_1\varphi_0\left(\begin{matrix}0\\-\end{matrix}\middle|q;x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(q;q)_n}=\frac{1}{(x;q)_\infty};\quad |x|<1$$

ve

$$E_q^x={}_0\varphi_0\left(\begin{matrix}-\\-\end{matrix}\middle|q;-x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{n}{2}}x^n}{(q;q)_n}=(-x;q)_\infty$$

şeklinde verilebilir. Ayrıca

$$e_q^x\cdot E_q^{-x}=\frac{1}{\big(1-(1-q)x\big)_q^\infty}\big(1-(1-q)x\big)_q^\infty=1$$

olduğu görülür [7].

Teorem 3.2. e_q üstel fonksiyonunda $q\to1^-$ iken limit alınarak üstel fonksiyon elde edilir. Yani

$$\lim_{q\to1^-}\frac{1}{(1-(1-q)x)_q^\infty}=e^x$$

dir [3].

İspat

$$\begin{aligned}\lim_{q\to1^-}e_q^x&=\lim_{q\to1^-}\frac{1}{(1-(1-q)x)_q^\infty}\\&=\lim_{q\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\frac{(1-q)_q^n}{(1-q)^n}}\\&=\lim_{q\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\frac{1-q}{1-q}\frac{1-q^2}{1-q}\cdots\frac{1-q^n}{1-q}}\\&=\lim_{q\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1(1+q)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1})}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\&=e^x\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.3. Benzer şekilde E_q üstel fonksiyonunda $q \to 1^-$ iken limit alınarak üstel fonksiyon elde edilir. Yani

$$\lim_{q \to 1^-} (1 + (1-q)x)_q^\infty = e^x$$

dir [3].

İspat

$$\begin{aligned}
\lim_{q \to 1^-} E_q^x &= \lim_{q \to 1^-} (1 + (1-q)x)_q^\infty \\
&= \lim_{q \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}} x^n}{\frac{(1-q)_q^n}{(1-q)^n}} \\
&= \lim_{q \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}} x^n}{\frac{1-q}{1-q}\frac{1-q^2}{1-q} \cdots \frac{1-q^n}{1-q}} \\
&= \lim_{q \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}} x^n}{1(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1})} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= e^x
\end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Örnek 3.4. q-üstel fonksiyonların q-türevi

$$\begin{aligned}
D_q e_q^x &= \frac{e_q^x - e_q^{qx}}{(1-q)x} \\
&= \frac{1}{(1-q)x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n x^n}{[n]!}\right) \\
&= \frac{1}{(1-q)x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^n)x^n}{[n]!}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)x^n}{(1-q)[n]!x} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]}{[n-1]![n]} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!} = e_q^x
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
D_q E_q^x &= \frac{E_q^x - E_q^{qx}}{(1-q)x} \\
&= \frac{1}{(1-q)x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{[n]!} - \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{q^n x^n}{[n]!}\right) \\
&= \frac{1}{(1-q)x} \sum_{n=1}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{(1-q^n)x^n}{[n]!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{(1-q^n)}{(1-q)[n]!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n+1}{2}} \frac{x^n}{[n]!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n}{2}+n} \frac{x^n}{[n]!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{(qx)^n}{[n]!} \\
&= E_q^{qx}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

3.3. Gama Fonksiyonu

Klasik analizde gama fonksiyonu $t > 0$ için

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

şeklinde ve beta fonksiyonu ise $s, t > 0$ için

$$B(t,s) = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{s-1} dx$$

şeklinde tanımlanır.

Gama ve beta fonksiyonlarının bazı özelliklerini hatırlatacak olursak

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$
$$\Gamma(1) = 1$$
$$B(t,s) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$$

dir.

Tanım 3.5. $t > 0$ için q-gama fonksiyonu

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{[\infty]} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x$$

olarak tanımlanmıştır. $s, t > 0$ için q-beta fonksiyonu ise

$$B_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1} d_q x$$

olarak tanımlanmıştır [6].

$\Gamma_q(t)$ ve $B_q(t,s)$ gama ve beta fonksiyonlarının uygun bir q-benzeridir. Çünkü $q \to 1^-$ iken limit alınarak sırası ile $\Gamma(t)$ ve $B(t,s)$ elde edilir.

Teorem 3.6. Γ_q fonksiyonu

$$\Gamma_q(\alpha) = (1-q^{1-\alpha}) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q^{n+\alpha}} = (1-q)^{1-\alpha} \frac{(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty}$$

eşitliği ile verilebilir [7].

Özel olarak $\Gamma_q(1) = 1$ ve her $t > 0$ için

$$\Gamma_q(t+1) = [t]\Gamma_q(t)$$

eşitliği sağlanır [6].

Teorem 3.7. q-gama ve q-beta fonksiyonları arasında

$$\Gamma_q(t) = \frac{B_q(t,\infty)}{(1-q)^t}$$

ve

$$B_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}$$

ilişkisi vardır [6].

4. Q-ANALİZİNİN OPERATÖR TEORİYE UYGULAMALARI

4.1. q-Picard ve q-Gauss-Weierstrass Singüler İntegral Opertörleri

Reel değişkenli, reel değerli bir fonksiyon f olsun. $\lambda > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ için Picard ve Gauss-Weierstrass singüler integral operatörleri sırasıyla

$$P_\lambda(f;x) = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-\frac{|t|}{\lambda}}dt$$

ve

$$W_\lambda(f;x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-\frac{t^2}{\lambda}}dt$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Bu operatörlerin q-genişlemelerini tanımlamak için [10]'da $0 < q < 1$ gama fonksiyonu için Euler integral temsilinin aşağıdaki q-genişlemesi kullanılmıştır:

$$c_q(x)\Gamma_q(x) = \frac{1-q}{\ln q^{-1}}q^{\frac{x(x-1)}{2}}\int\limits_0^\infty \frac{t^{x-1}}{E_q((1-q)t)}dt, \quad \operatorname{Re} x > 0 \tag{4.1}$$

burada

$$c_q(x) = \frac{1-q}{\ln q^{-1}}q^{\frac{x(x-1)}{2}}\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma_q(x)\Gamma_q(1-x)}$$

şeklinde tanımlıdır. c_q fonksiyonu

1. $c_q(x+1) = c_q(x)$
2. $c_q(n) = 1, \quad n = 0,1,2,\ldots$
3. $\lim_{q\to 1^-} c_q(x) = 1$

şartlarını sağlar [10].

Tanım 4.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\lambda > 0$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere f nin q-genelleştirilmiş Picard ve q-genelleştirilmiş Gauss-Weierstrass singüler integralleri sırasıyla

$$P_\lambda(f;q,x) = \frac{(1-q)}{2[\lambda]\ln q^{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)}{E_q\left(\frac{(1-q)|t|}{[\lambda]}\right)}dt$$

ve

$$W_\lambda(f;q,x) = \frac{1}{\pi\sqrt{[\lambda]}(q^{1/2};q)_{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)}{E_q\left(\frac{t^2}{[\lambda]}\right)}dt$$

tanımlanır [9].

$q \to 1^-$ için bu genelleştirmelerin Picard ve Gauss-Weierstrass singüler integral operatörlere indirgendiğine dikkat ediniz.

Bu integral operatörlerin $L_p(\mathbb{R})$ de yakınsaklık oranları, ağırlıklı uzayda yakınsaklıkları, yaklaşık hataları ve global pürüzsüzlük koruma özelliği [9]'da incelenmiştir.

Tanım 4.2. Bir $f \in L_p(\mathbb{R})$ için f nin süreklilik modülü

$$\omega_p(f;\delta) = \sup_{|h|\leq\delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p$$

eşitliği ile tanımlanır, burada $\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ dir [9].

Lemma 4.3. Her $\lambda > 0$ ve $0 < q < 1$ için $\mathbb{R}$ üzerinden q-Picard singüler integral operatörü ile q-Gauss-Weierstrass operatörünün integralleri 1 dir, yani

(a) $\int_{\mathbb{R}} P_\lambda(f;q,x)dx = 1$,

(b) $\int_{\mathbb{R}} W_\lambda(f;q,x)dx = 1$

olur [9].

Şimdiki lemma q-Picard ve q-Gauss-Weierstrass integral operatörlerinin $L_p(\mathbb{R})$ üzerinde sınırlı olduğunu ifade eder.

Lemma 4.4. $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ ve $0 < q < 1$ olsun. Bu takdirde

$$\|P_\lambda(f;q,\cdot)\|_p \leq \|f\|_p$$

ve

$$\|W_\lambda(f;q,\cdot)\|_p \leq \|f\|_p$$

eşitsizlikleri doğrudur [9].

Bu operatörler için yakınsaklık oranları aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.5. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $f \in L_p(\mathbb{R})$ ise

$$\|P_\lambda(f;q,\cdot) - f(\cdot)\|_p \leq \omega_p\left(f;[\lambda]\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right)$$

ve

$$\|W_\lambda(f;q,\cdot)-f(\cdot)\|_p \le \omega_p\left(f;\sqrt{[\lambda]}\right)\left(1+\sqrt{q^{-1/2}(1-q^{1/2})}\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır [9].

İspat Lemma 4.3. gereği

$$P_\lambda(f;q,x)-f(x)=\frac{1-q}{2[\lambda]\ln q^{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x)}{E_q\left(\frac{(1-q)|t|}{[\lambda]}\right)}dt$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}\|P_\lambda(f;q,\cdot)-f(\cdot)\|_p &\le \frac{1-q}{2[\lambda]\ln q^{-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x)}{E_q\left(\frac{(1-q)|t|}{[\lambda]}\right)}dt\right|^p dx\right)^{1/p}\\ &\le \frac{1-q}{2[\lambda]\ln q^{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_p(f;|t|)}{E_q\left(\frac{(1-q)|t|}{[\lambda]}\right)}dt\\ &\le \omega_p(f;[\lambda])\frac{1-q}{2[\lambda]\ln q^{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{|t|}{[\lambda]}\right)\frac{dt}{E_q\left(\frac{(1-q)|t|}{[\lambda]}\right)}\\ &\le \omega_p(f;[\lambda])\left(1+\frac{1}{q}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gama fonksiyonu için Euler integral temsilinin q-genişlemesi ve $\Gamma_q(n+1)=[n]!$ eşitliği ile $C>0$ için

$$\omega_p(f;C\delta)\le(1+C)\omega_p(f;\delta)$$

eşitsizliği kullanılmıştır.

Benzer şekilde, Berg'in [11]'de hesapladığı

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^{2k}}{E_q(t^2)}dt=\pi\left(q^{1/2};q\right)_{1/2}q^{-\frac{k^2}{2}}\left(q^{1/2};q\right)_k,\quad k=0,1,2,\ldots$$

integral kullanılarak

$$\begin{aligned}\|W_\lambda(f;q,\cdot)-f(\cdot)\|_p &\le \frac{\omega_p\left(f;\sqrt{[\lambda]}\right)}{\pi\sqrt{[\lambda]}(q^{1/2};q)_{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{|t|}{\sqrt{[\lambda]}}\right)\frac{dt}{E_q\left(\frac{t^2}{[\lambda]}\right)}\\ &\le \omega\left(f;\sqrt{[\lambda]}\right)\left(1+\left(\frac{1}{\pi[\lambda](q^{1/2};q)_{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{[\lambda]}\frac{dt}{E_q\left(\frac{t^2}{[\lambda]}\right)}\right)^{1/2}\right)\\ &\le \omega_p\left(f;\sqrt{[\lambda]}\right)\left(1+\sqrt{q^{-1/2}(1-q^{1/2})}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. ■

0 < q < 1 olmak üzere q' nun sabit bir değeri için

$$\lim_{\lambda\to\infty}[\lambda] = \frac{1}{1-q}$$

olduğundan son teorem, L_p-normunda $P_\lambda(f;\cdot) - f(\cdot)$ için bir yakınsaklık oranı vermez. Bununla birlikte, eğer λ ya bağlı q_λ sayısını $0 < q_\lambda < 1$ ve $\lambda \to \infty$ iken $q_\lambda \to 1$ olacak şekilde şeçilirse $\lambda \to \infty$ için $[\lambda]_{q_\lambda} \to \infty$ olur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.6. $q_\lambda \in (0,1)$ sayısı $\lambda \to \infty$ için $q_\lambda \to 1$ şartını sağlasın. Eğer $1 \leqslant p < \infty$ olmak üzere $f \in L_p(\mathbb{R})$ ise

$$\|P_\lambda(f;q_\lambda,\cdot) - f(\cdot)\|_p \leqslant \omega_p\big(f;[\lambda]_{q_\lambda}\big)\left(1+\frac{1}{q_\lambda}\right)$$

ve

$$\|W_\lambda(f;q_\lambda,\cdot) - f(\cdot)\|_p \leqslant \omega_p\left(f;\sqrt{[\lambda]_{q_\lambda}}\right)\left(1+\sqrt{q_\lambda^{-1/2}\left(1-q_\lambda^{1/2}\right)}\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır [9].

Bu kısımda ağırlıklı L_p uzayında yakınsaklık incelenecektir. Reel eksen üzerinde tanımlı pozitif sürekli ω fonksiyonu

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2p}\omega(t)dt < \infty \tag{4.2}$$

şartını sağlasın. $\mathbb{R}$ üzerinde ω ağırlık fonksiyonuna göre p-mutlak integrallenebilir fonksiyonların uzayı $L_{p,\omega}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Bu durumda $1 \leqslant p < \infty$ için

$$L_{p,\omega}(\mathbb{R}) = \left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \,|\, \|f\|_{p,\omega} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\omega(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki teorem, ağırlıklı L_p uzayında Korovkin tipi teoremdir.

Teorem 4.7. $L_{p,\omega}(\mathbb{R})$ üzerinde pozitif lineer operatörlerin düzgün sınırlı (L_n) dizisi $i = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t^i;x) - x^i\|_{p,\omega} = 0$$

şartını sağlasın. Bu takdirde her $f \in L_{p,\omega}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n f - f\|_{p,\omega} = 0$$

sağlanır [9].

$p \geqslant 1$ olmak üzere $\omega(x) = \left(\frac{1}{1+x^{6m}}\right)^p$ seçilirse $L_{p,\omega}(\mathbb{R})$ uzayı $L_{p,m}(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Lemma 4.8. Eğer $1 \leqslant p < \infty$ ve bir m pozitif tamsayısı için $f \in L_{p,m}(\mathbb{R})$ ise $0 < q < 1$ için

$$\|P_\lambda(f;q,\cdot)\|_{p,m} \leqslant 2^{6m-1}\left(1 + \frac{[\lambda]^{6m}[6m]!}{q^{3m(6m+1)}}\right)\|f\|_{p,m}$$

ve

$$\|W_\lambda(f;q,\cdot)\|_{p,m} \leqslant 2^{6m-1}\left(1 + [\lambda]^{3m}q^{-\frac{9m^2}{2}}\left(q^{1/2};q\right)_{3m}\right)\|f\|_{p,m}$$

eşitsizlikleri sağlanır [9].

Teorem 4.9. $q_\lambda \in (0,1)$ olsun ve $\lambda \to \infty$ için $q_\lambda \to 1^-$ şartını sağlasın. Bu takdirde her $f \in L_{p,m}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{\lambda\to 0}\|P_\lambda(f;q_\lambda,\cdot) - f\|_{p,m} = 0$$

sağlanır [9].

Teorem 4.10. $q_\lambda \in (0,1)$ olsun öyle ki $\lambda \to \infty$ için $q_\lambda \to 1^-$ şartını sağlasın. Her $f \in L_{p,m}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{\lambda\to 0}\|W_\lambda(f;q_\lambda,\cdot) - f\|_{p,m} = 0$$

olur [9].

4.2. q-Bernstein-Kantorovich Operatörleri

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n yinci dereceden Bernstein baz polinomları

$$b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}, \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bernstein baz polinomlarının bir

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n,k}(x)$$

lineer kombinasyonuna n yinci dereceden Bernstein polinomu ve c_k katsayılarına Bernstein katsayıları veya Bézier katsayıları denir. $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli bir f fonksiyonu için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x)$$

Bernstein polinomunu gözönüne alınız. Bu durumda

$$B_n(f;x) \to f(x)$$

yakınsaması $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgündür.

Bernstein polinomları yardımıyla $K_n : L_1[0,1] \to C[0,1]$ pozitif lineer operatörleri

$$K_n(f,x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x)\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)dt$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu tip operatorler ilk olarak Kantorovich tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır. Bu sebepten bu operatörlere Kantorovich operatörleri veya Bernstein-Kantorovich operatörleri denir. Bu konuda bilgi için [14] nolu kaynak incelenebilir.

q-Bernstein polinomları [13]'de

$$B_n(f;q,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

şeklinde genişletilmiştir. $q=1$ durumunda q-Bernstein polinomlarından klasik Bernstein polinomlarının elde edileceği kolayca görülebilir. Daha sonra Dalmanoğlu, q-Bernstein operatörleri,

$$K_{n,q}(f,x) = [n+1]\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(q;x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} f(t)d_q t$$

eşitliğiyle tanımlamıştır, burada

$$b_{n,k}(q;x) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

eşitliğiyle tanımlıdır [12]. $q=1$ durumunda kolayca görüleceği gibi q-Bernstein-Kantorovich operatörleri klasik Bernstein-Kantorovich operatörlerine indirgenir. Dalmanoğlu [12]'de q-Bernstein-Kantorovich operatörlerin yaklaşım özellikleri ile yakınsaklık oranını incelemiştir.

Bu operatörlerin yaklaşım özellikleri ilgili teoremi verelim.

Teorem 4.11. Eğer $(0,1)$ içindeki (q_n) dizisi $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{[n]_{q_n}} = 0$ şartlarını sağlarsa $0 < a < 1$ olmak üzere her $f \in C[0,a]$ için

$$\|K_{n,q}(f,x) - f\| \to 0, \qquad n \to \infty$$

eşitliği sağlanır [12].

İspat q-Bernstein-Kantarovich operatörünün tanımı gereği

$$K_{n,q}(1,x) = [n+1]\sum_{k=0}^{n} q^{-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q t$$

dır. Burada q-integral tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q t &= \int_0^{[k+1]/[n+1]} d_q t - \int_0^{[k]/[n+1]} d_q t \\ &= (1-q)\frac{[k+1]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty} q^j - (1-q)\frac{[k]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty} q^j \\ &= \frac{1-q}{[n+1]}([k+1]-[k])\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{q^k}{[n+1]}\end{aligned}$$

dolayısıyla da $K_{n,q}(1,x) = 1$ elde edilir. Buradan açık olarak

$$\|K_{n,q_n}(1,x) - x^0\| = \|1-1\| = 0 \to 0$$

olur. Şimdi

$$K_{n,q}(t,x) = [n+1]\sum_{k=0}^{n} q^{-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q t$$

eşitliğinde önce q-integral hesaplanarak

$$\begin{aligned}&\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q t = \int_0^{[k+1]/[n+1]} t d_q t - \int_0^{[k]/[n+1]} t d_q t \\ &= (1-q)\frac{[k+1]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j}\frac{[k+1]}{[n+1]} - (1-q)\frac{[k]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j}\frac{[k]}{[n+1]} \\ &= \frac{1-q}{[n+1]}([k+1]^2-[k]^2)\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j} = \frac{q^k}{[n+1]^2}\frac{1}{1+q}([k](1+q)+1)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}K_{n,q}(t,x) &= [n+1]\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\frac{1}{[n+1]^2}\frac{1}{1+q}([k](1+q)+1) \\ &= \frac{[n]}{[n+1]}x + \frac{1}{1+q}\frac{1}{[n+1]}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $K_{n,q}(t,x) - x = \frac{[n]-[n+1]}{[n+1]}x + \frac{1}{1+q}\frac{1}{[n+1]}$ ifadesi x değişkenine göre azalan olduğundan $\|K_{n,q}(t,x) - x\| = \frac{1}{1+q}\frac{1}{[n+1]}$ bulunur. Böylece q yerine q_n yazılarak, $\|K_{n,q_n}(t,x) - x\| = \frac{1}{1+q_n}\frac{1}{[n+1]_{q_n}} \to 0$ elde edilir. $K_{n,q}(t^2,x)$ değerini hesaplamak için ilk önce aşağıdaki integral değeri

$$\begin{aligned}\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t^2 d_q t &= \int_0^{[k+1]/[n+1]} t^2 d_q t - \int_0^{[k]/[n+1]} t^2 d_q t \\ &= \frac{1}{[n+1]^3} \frac{1}{1+q+q^2} (q^k [k+1]^2 + [k][k+1] + [k]^2)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve $[k+1] = q[k] + 1$ eşitliği ile yukarıdakilere benzer yöntemler kullanılarak

$$K_{n,q}(t^2, x) = \frac{[n][n-1]}{[n+1]^2} \frac{q^3+q^2+q}{1+q+q^2} x^2 + \frac{[n]}{[n+1]^2} \frac{q^2+3q+2}{1+q+q^2} x + \frac{1}{[n+1]^2} \frac{1}{1+q+q^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}K_{n,q}(t^2, x) - x^2 = \frac{[n][n-1]q - [n+1]^2}{[n+1]^2} x^2 &+ \frac{[n]}{[n+1]^2} \frac{q^2+3q+2}{1+q+q^2} x \\ &+ \frac{1}{[n+1]^2} \frac{1}{1+q+q^2}\end{aligned}$$

ikinci dereceden bir terimlisi elde edilir. $0 < q < 1$ için $\frac{[n][n-1]q-[n+1]^2}{[n+1]^2} < 0$ olduğundan bu ifade maksimum değerini $x = -\frac{1}{2} \frac{[n]}{[n][n-1]q-[n+1]^2} \frac{2+3q+q^2}{1+q+q^2}$ noktasında alır. Böylece q yerine q_n yazılarak

$$\begin{aligned}\|K_{n,q_n}(t^2, x) - x^2\| &= \left\| \frac{[n]_{q_n}[n-1]_{q_n} q_n - [n+1]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2} x^2 + \frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} \frac{q_n^2+3q_n+2}{1+q_n+q_n^2} x \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{[n+1]_{q_n}^2} \frac{1}{1+q_n+q_n^2} \right\| \\ &= \frac{1}{4} \frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2 ([n]_{q_n}[n-1]_{q_n} q_n - [n+1]_{q_n}^2)} \left(\frac{2+3q+q^2}{1+q+q^2} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2 ([n]_{q_n}[n-1]_{q_n} q_n - [n+1]_{q_n}^2)} \left(\frac{2+3q+q^2}{1+q+q^2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{[n+1]_{q_n}^2} \frac{1}{1+q_n+q_n^2} \\ &\to 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $i = 0, 1, 2$ için $\|K_{n,q_n}(t^i, x) - x^i\| \to 0$ olup Korovkin Teoremi gereği ispat biter. ■

4.3. q-Bernstein-Durrmeyer Operatörleri

$f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$ ve $0 < q < 1$ için q-Durrmeyer tip operatörler Gupta tarafından [15]'de

$$D_{n,q}(f,x) = [n+1] \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 f(t) p_{n,k}(q;qt) d_q t$$

şeklinde tanımlanmıştır, burada

$$p_{n,k}(q;x) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Kolayca görüleceği üzere $q = 1$ durumunda yukarıda tanımlı operatör iyi bilinen

$$D_n(f,x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_0^1 f(t) p_{n,k}(t) dt$$

Bernstein-Durrmeyer operatörünü verir, burada

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ile tanımlanır.

Lemma 4.12. Aşağıdaki eşitlikler doğrudur [9].

$$x(1-x) D_q\big(p_{n,k}(q;x)\big) = [n] p_{n,k}(q;x) \left(\frac{[k]}{[n]} - x \right)$$

$$t(1-qt) D_q\big(p_{n,k}(q;qt)\big) = [n] p_{n,k}(q;qt) \left(\frac{[k]}{[n]} - qt \right)$$

Şimdiki lemma $D_{n,q}$ Bernstein-Durrmeyer operatörünün sınırlı olduğunu ifade eder.

Lemma 4.13. $f \in C[0,1]$ için $\|D_{n,q} f\| \leqslant \|f\|$ dir [9].

Lemma 4.14. $n > 3$ olsun ve $q_0 = q_0(n) \in (0,1)$ sayısı her $q \in (q_0, 1)$ için $q^{n+2} - q^{n+1} - 2q^n - 2q^{n-1} - \cdots - 3q^3 - q^2 + q + 2 < 0$ şartını sağlayan en küçük sayı olsun. O halde $\varphi^2(x) = x(1-x)$, $x \in [0,1]$ için

$$D_{n,q}\big((t-x)^2, x\big) \leqslant \frac{2}{[n+2]} \left(\varphi^2(x) + \frac{1}{[n+3]} \right)$$

eşitsizliği sağlanır [9].

Teorem 4.15. $n > 3$ ve $q_0 = q_0(n) \in (0,1)$ sayısı lemma 4.14.' deki gibi olsun. Bu takdirde $f \in C[0,1]$, $\delta_n^2(x) = \varphi^2(x) + \frac{1}{[n+3]}$, $x \in [0,1]$ ve $q \in (q_0, 1)$ olmak üzere

$$|D_{n,q}(f,x) - f(x)| \leqslant C\omega_2\big(f, [n+2]^{\frac{-1}{2}}\delta_n(x)\big) + \omega\left(f, \frac{1-x}{[n+2]}\right)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır [9].

Teorem 4.16. $n > 3$ olsun ve $q_0 = q_0(n) \in (0,1)$ sayısı lemma 4.13.' deki gibi olsun. Bu takdirde $f \in C[0,1]$, $q \in (q_0, 1)$, $\psi(x) = 1 - x$ ve $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$\|D_{n,q}f - f\| \leqslant C\omega_2^{\varphi}(f, [n+2]^{\frac{-1}{2}}) + \omega_{\psi}(f, [n+2]^{-1})$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır [9].

4.4. q-Bernstein Schurer Kantorovich Operatörleri

Bernstein-Schurer operatörleri 1962 yılında [16]'da Schurer tarafından $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$B_n^p(f,x) = \sum_{r=0}^{n+p} f\left(\frac{r}{n}\right)\binom{n+p}{r} x^r (1-x)^{n+p-r}$$

eşitliği ile tanımlanmıştır.

Muraru, q-Bernstein-Schurer operatörleri [16]'da tanımladı. Bu operatörler $p \in \mathbb{N}_0$, $x \in [0,1]$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$B_n^p(f;q;x) = \sum_{r=0}^{n+p} f\left(\frac{[r]}{[n]}\right)\begin{bmatrix} n+p \\ r \end{bmatrix} x^r \prod_{s=0}^{n+p-r-1}(1-q^s x)$$

eşitliği ile tanımlanır. Son eşitlikte $p = 0$ alınırsa klasik q-Bernstein operatörleri elde edilir. Bu operatörler için Muraru tarafından elde edilen Korovkin tip yaklaşım ile birinci yakınsaklık modülü cinsinden operatörlerin yakınsaklık oranını ifade eden teoremler aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.17. $j = 0,1,2$ için $e_j(x) = x^j$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır [17].

1. $B_n^p(e_0;q;x) = 1$.

2. $B_n^p(e_1;q;x) = x\dfrac{[n+p]}{[n]}$.

3. $B_n^p(e_2;q;x) = \dfrac{[n+p]}{[n]^2}([n+p]x^2 + x(1-x))$.

İspat Tümevarımla

$$\sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} x^k (1-x)_q^{m-k} = 1$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu eşitlikte $m = n+p$ seçilirse

$$(1-x)_q^{n+p-k} = \prod_{s=0}^{n+p-k-1} (1-q^s x)$$

olduğundan

$$\sum_{k=0}^{n+p} \begin{bmatrix} n+p \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n+p-k-1} (1-q^s x) = 1$$

dolayısıyla da $B_n^p(e_0;q;x) = 1$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
B_n^p(e_1;q;x) &= \sum_{k=1}^{n+p} \begin{bmatrix} n+p \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n+p-k-1} (1-q^s x)\frac{[k]}{[n]} \\
&= x\frac{[n+p]}{[n]} \sum_{k=0}^{n+p-1} \frac{[n+p-1]}{[k][n+p-k-1]} x^k \prod_{s=0}^{n+p-k-2} (1-q^s x) \\
&= x\frac{[n+p]}{[n]}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak,

$$\begin{aligned}
B_n^p(e_2;q;x) &= \sum_{k=1}^{n+p} \begin{bmatrix} n+p \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n+p-k-1} (1-q^s x)\frac{[k]^2}{[n]^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n+p} \frac{[k]}{[n]}\frac{[k]}{[n]}\frac{[n+p]}{[n+p-k]![k]!} x^k \prod_{s=0}^{n+p-k-1} (1-q^s x)
\end{aligned}$$

olup bu eşitlikte $[k]$ yerine $q[k-1]+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
B_n^p(e_2;q;x) &= \frac{[n+p]}{[n]^2} \sum_{k=2}^{n+p} \frac{q[k-1][n+p-1]!}{[k-1]![n+p-k]!} x^k \prod_{s=0}^{n+p-k-1} (1-q^s x) \\
&+ \frac{[n+p]}{[n]^2} \sum_{k=1}^{n+p} \frac{[n+p-1]!}{[k-1]![n+p-k]!} x^k \prod_{s=0}^{n+p-k-1} (1-q^s x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada birinci toplamda $k \to k+2$ ve ikinci toplamda $k \to k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} B_n^p(e_2;q;x) &= \frac{[n+p-1][n+p]}{[n]^2} q \sum_{k=0}^{n+p-2} \frac{[n+p-2]!}{[k]![n+p-k-2]} \\ &\quad x^{k+2} \prod_{s=0}^{n+p-k-3} (1-q^s x) \\ &\quad + \frac{[n+p]}{[n]^2} \sum_{k=0}^{n+p-1} \frac{[n+p-1]!}{[k]![n+p-k-1]} x^{k+1} \prod_{s=0}^{n+p-k-2} (1-q^s x) \\ &= \frac{[n+p-1][n+p]}{[n]^2} q x^2 + \frac{[n+p]}{[n]^2} x \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.18. (q_n) dizisi $n \in \mathbb{N}$ için $0 < q_n < 1$ ve $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ ile $\lim_{n\to\infty} q_n^n = a < 1$ şartlarını sağlasın. Bu takdirde herhangi bir $f \in C([0,p+1])$ için

$$\lim_{n\to\infty} B_n^p(f;q_n) = f$$

olup yakınsama $[0,1]$ üzerinde düzgündür [17].

İspat İspatta iyi bilinen Korovkin Teoremi kullanılacaktır. Dolayısıyla $i = 0,1,2$ için $[0,1]$ üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} B_n^p(e_i;q_n;x) = x^i$$

şartlarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

Teoremi ispatlamak için basit hesaplamalarla elde edilen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[n+p]_{q_n}}{[n]_{q_n}} = 1, \lim_{n\to\infty} \frac{[n+p]_{q_n}}{[n]_{q_n}^2} = 0$$

limitleri hesaba katılır ve bir önceki lemmadaki eşitliklerin $n \to \infty$ üzerinden limitleri alınırsa istenen görülür. ■

Teorem 4.19. Eğer $f \in C([0,p+1])$ ise

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{[n]}}\Big(p + \frac{1}{2\sqrt{1-q^n}}\Big), \quad q \in (0,1)$$

olmak üzere

$$|B_n^p(f;q;x) - f(x)| \leqslant 2\omega(f;\delta_n)$$

eşitsizliği sağlanır [17].

Özarslan ve Vedi [18]'de q-Bernstein-Schurer-Kantorovich operatörlerini $p \in \mathbb{N}_0$ sabit $0 < q < 1$ ve $f \in C[0, p+1]$ olmak üzere

$$K_n^p(f; q; x) = \sum_{r=0}^{n+p} \begin{bmatrix} n+p \\ r \end{bmatrix} x^r \prod_{s=0}^{n+p-r-1} (1 - q^s x)$$
$$\int_0^1 f\left(\frac{[r]}{[n+1]} + \frac{1 + (q-1)[r]}{[n+1]} t \right) d_q t$$

şeklinde tanımlamışlardır.

İlk üç moment ile birinci ve ikinci merkezi momentler için Özarslan ve Vedi aşağıdaki lemmayı ispatlamışlardır.

Lemma 4.20. q-Bernstein-Schurer-Kantorovich operatörleri için aşağıdaki eşitlikler sağlanır [18].

(i)

$$K_n^p(1; q; x) = 1$$

(ii)

$$K_n^p(u; q; x) = \frac{2[n+p]qx + 1}{[2][n+1]}$$

(iii)

$$K_n^p(u^2; q; x) = \frac{1}{[n+1]^2} \left\{ \left(\frac{4q^4 + q^3 + q^2}{[2][3]} \right) [n+p-1][n+p]x^2 + \left(\frac{4q^3 + 5q^2 + 3q}{[2][3]} \right) [n+p]x + \frac{1}{[3]} \right\}$$

(iv)

$$K_n^p\big((u-x); q; x\big) = \left(2\frac{[n+p]}{[2][n+1]} q - 1 \right) x + \frac{1}{[2][n+1]}$$

(v)

$$\begin{aligned} &K_n^p\big((u-x)^2; q; x\big) \\ &= \left(\frac{4q^4 + q^3 + q^2}{[2][3][n+1]^2} [n+p-1][n+p] - 4\frac{[n+p]}{[2][n+1]} q + 1 \right) x^2 \\ &+ \left(\frac{4q^3 + 5q^2 + 3q}{[2][3][n+1]^2} [n+p] - \frac{2}{[2][n+1]} \right) x + \frac{1}{[3][n+1]^2} \end{aligned}$$

Teorem 4.21. $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{[n]} = 0$ olmak üzere her $f \in C[0, p+1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n^p(f; q_n; \cdot) - f(\cdot)\|_{C[0,1]} = 0$$

dır [18].

q-Bernstein-Schurer-Kantorovich operatörleri için Lipschitz sınıfının elemanları ile fonksiyonun birinci ve ikinci süreklilik modülleri cinsinden yakınsaklık oranları da yine Özarslan ve Vedi tarafından [18]' de incelemiştir.

Bir f fonksiyonunun $\delta > 0$ için $[0, p+1]$ aralığında sürekliliğinin birinci modülü

$$\omega(f,\delta) = \max_{\substack{|h|<\delta \\ x,x+h\in[0,p+1]}} |\Delta_h f(x)| = \max_{\substack{|h|<\delta \\ x,x+h\in[0,p+1]}} |f(x+h) - f(x)|$$

veya denk olarak

$$\omega(f,\delta) = \max_{\substack{|t-x|<\delta \\ t,x\in[0,p+1]}} |f(t) - f(x)|$$

eşitliği ile tanımlanır. $f \in C[0, p+1]$ için

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega(f,\cdot) = 0$$

ve herhangi bir $\delta > 0$ için

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega(f,\delta)\left(\frac{|x-y|}{\delta} + 1\right)$$

olduğu bilinmektedir.

Teorem 4.22. $0 < q < 1$ olsun. Eğer $f \in C[0, p+1]$ ise

$$|K_n^p(f; q; x) - f(x)| \leqslant 2\omega\left(f, \sqrt{\delta_{n,q}(x)}\right)$$

olur, burada $\omega(f,\cdot)$, f nin süreklilik modülüdür ve $\delta_{n,q}(x) = K_n^p\big((u-x)^2; q; x\big)$ dir [18].

Bir $f : [0, p+1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $Lip_M(\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart $t, x \in [0, p+1]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leqslant M|t-x|^{\alpha}$$

şartını sağlamasıdır. Böylece bir f fonksiyonu aşikar olarak süreklidir. Aşağıdaki teorem K_n^p operatörlerinin yakınsaklık oranını $Lip_M(\alpha)$ Lipschitz sınıfı cinsinden karakterizasyonunu ifade eder. Bu teorem Özarslan ve Vedi tarafından [18]' de ispatlanmıştır.

Teorem 4.23. $f \in Lip_M(\alpha)$ ise

$$|K_n^p(f;q;x) - f(x)| \leqslant M\big(\delta_{n,q}(x)\big)^{\frac{\alpha}{2}}$$

dir, burada $\delta_{n,q}(x) = K_n^p\big((u-x)^2;q;x\big)$ dır [18].

KAYNAKLAR

[1] Jackson, F. H., *On a q-definite integrals*, Q. J. Pure Appl. Math., 41, 193-203, **1910**.

[2] Ernst, T., *A comprehensive treatment of q-calculus*, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, **2012**.

[3] Kac, V.; Cheung, P. *Quantum Calculus*, Universitex, Springer-Verlag, New York, **2002**.

[4] Ernst, T. *The history of q-calculus and a new method*, Licenciate Thesis-Uppsala,**2001**.

[5] Koekoek, R.; Swarttouw, R. *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Technical Universty Delft, **1998**.

[6] Sole, A.; Kac, V. *On integral representations of q-gamma and q-beta functions*, Department of Mathematics, **2003**.

[7] Mansour, M. *Incomplete q-gamma function and tricomi expansion*, World Scientific, **2009**.

[8] Knopp, Konrad *Theory and Application of Infinite Series (in English translation)*, Dover Publications, ISBN 978-0-486-66165-0, **1990**.

[9] Aral, Ali; Gupta, Vijay; Agarwal, Ravi P. *Applications of q-calculus in operator theory*, Springer, New York, **2013**.

[10] Atakishiyev, N. M., Atakishiyeva, M. K., *A q-analog of the Euler gamma integral*, Theor. Math. Phys. 129 (1), 1325-1334, **2001**.

[11] Berg, C., *From discrete to absolutely continuous solution of indeterminate moment problems*, Arap. J. Math. Sci., 4(2), 67-75, **1988**.

[12] Dalmanoğlu, Ö. *Approximation by Kantorovich type q-Bernstein operators*, in Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Cairo, Egypt, 113-117, **2007**.

[13] Phillips, G. M., *Bernstein polynomials based on the q-integers*, Ann. Numer. Math. 4, 511-518, **1997**.

[14] Lorentz, G. G., *Bernstein polynomials*, University of Toronto Press, Toronto, **1953**.

[15] V. Gupta, *Some approximation properties on q-Durrmeyer operators*, Appl. Math. Comput., 197(1), 172-178, **2008**.

[16] Schurer, F. *Linear positive operators in approximation theory*, Math. Inst., Techn. Univ. Delf Report, **1962**.

[17] Muraru, C. V., *Note on q-Bernstein-Schurer operators*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 56, no:2, 489-495, **2011**.

[18] Özarslan, M. A., Vedi, T., *q-Bernstein-Schurer-Kantorovich operators*, J. Inequal. Appl., 2013:444, 15 s., **2013**.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	GÖKŞİN Esra
Uyruğu	:	TC
Doğum Tarihi ve Yeri	:	02.06.1988 Gerede
e-mail	:	Esra_goksin@hotmail.com

Eğitim

Lise	:	Bekir Gökdağ Lisesi
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi
Yüksek Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi
Yüksek Lisans Tezi	:	q-Analizi ve Uygulamaları

Yabancı Dil : İngilizce