T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RİESZ POTANSİYELİNİN SINIRLILIĞI İÇİN SPANNE-GULİYEV VE ADAMS-GULİYEV TİPLİ SONUÇLAR

Ramazan AKILLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİKANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2015

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RİESZ POTANSİYELİNİN SINIRLILIĞI İÇİN SPANNE-GULİYEV VE ADAMS-GULİYEV TİPLİ SONUÇLAR

Ramazan AKILLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİKANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Doç. Dr. Ali AKBULUT

KIRŞEHİR 2015

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan
Prof. Dr. Vagıf Sabir GULİYEV

Üye
Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Üye
Doç. Dr. Ali AKBULUT

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2015

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum ”Riesz potansiyelinin sınırlılığı için Spanne-Guliyev ve Adams-Guliyev tipli sonuçlar” başlıklı çalışmamın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

Ramazan Akıllı

ÖZET

Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı İçin Spanne-Guliyev ve Adams-Guliyev Tipli Sonuçlar

Yüksek Lisans Tezi

RAMAZAN AKILLI

Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Mayıs 2015

Bu yüksek lisans tezinde Riesz potansiyeli ve Riesz potansiyelinin sınırlılığı için elde edilen sonuçlar hakkında bilgi verilecektir. Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmıdır.

İkinci bölümde, ilerleyen bölümlerde işimize yarayacak bazı temel kavram, notasyon ve teoremlere yer verilmiştir. Morrey uzayı, Genelleştirilmiş Morrey uzayı ve Hardy-Littlewood maksimal operatörünün tanımı ve özellikleri verilmiş olup, ayrıca Hardy-Littlewood maksimal operatörün $L_p(\mathbb{R}^n), M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarındaki sınırlılıkları ile ilgili elde edilen neticelere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, klasik Lebesgue uzaylarında Riesz potansiyeli tanımlanıp, bunların varlık ve sınırlılık özellikleri incelenmiştir.

Son bölümde ise, Guliyev [5, 11, 12, 13] tarafından elde edilen ifadeler kullanılarak Riesz potansiyel operatörünün genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılıkları için elde edilen Spanne-Guliyev ve Adams Guliyev tipli sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: L_p uzayları, Morrey uzayları, Genelleştirilmiş Morrey uzayı, Riesz potansiyel operatörü, laplasyan.

Sayfa Adedi: 33

Danışman: Doç. Dr. Ali AKBULUT

ABSTRACT

Spanne-Guliyev and Adams-Guliyev Type Results For the Boundedness of the Riesz Potential

Master Thesis

Ramazan AKILLI

Ahi Evran University

Institute of Science

May 2015

In this master thesis, information about the results of the Riesz potentials and boundedness of Riesz potentials will be given. This thesis consists of four chapters.

The first section is devoted to the introduction.

In the second section, some basic concepts, notations and theorems that will come in handy in the following sections are included. Morrey spaces, Generalized Morrey spaces and the definition and properties of the Hardy-Littlewood maximal operator are given, also the results that related to the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator on the $L_p(\mathbb{R}^n)$, $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ and $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ spaces are included.

In the third section, Riesz potential in the classical Lebesgue spaces will be defined, and their existence and boundedness properties are investigated.

In the last section, by using the expressions that obtained by Guliyev [5, 11, 12, 13], Spanne-Guliyev and Adams-Guliyev type of results for the boundedness of the Riesz potential operator in Generalized Morrey spaces are included.

Keywords: L_p spaces, Morrey spaces, Generalized Morrey spaces, Riesz potential operator, laplacian.

Number of Pages:33

Supervisor: Doç. Dr. Ali AKBULUT

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca olduğu gibi tez çalışmamın da her aşamasında her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyen; kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Ali AKBULUT' a ve Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV'e minnettarlığımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışma dönemimde de hep yanımda olan kıymetli anne ve babama teşekkür ederim.

Ramazan AKILLI

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

TEZ BİLDİRİMİ i

ÖZET ii

ABSTRACT iii

TEŞEKKÜR iv

SİMGELER VE KISALTMALAR vi

1 GİRİŞ 1

2 TEMEL KAVRAMLAR, UZAYLAR VE OPERATÖRLER 3

2.1 Temel Kavramlar 3

2.2 $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı 6

2.3 Hardy-Littlewood Maksimal Operatör 9

2.4 Morrey Uzayı 11

2.5 $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı 14

3 RİESZ POTANSİYEL OPERATÖRÜ 16

3.1 I_α Riesz Potansiyeli 16

4 $M_{p,\varphi}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYINDA RİESZ POTANSİYELİNİN SINIRLILIĞI İÇİN ELDE EDİLEN SONUÇLAR 19

4.1 Spanne - Guliyev Tipli Sınırlılık 19

4.2 Adams - Guliyev Tipli Sınırlılık 24

KAYNAKLAR 27

ÖZGEÇMİŞ 30

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$\lvert B(x,r)\rvert$	B(x,r) yuvarının Lebesgue ölçüsü
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$\lVert\cdot\rVert_{L_p(\mathbb{R}^n)}$	Lebesgue uzayında norm
$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
M_α	Kesirli maksimal operatörü
I_α	Kesirli integral operatörü (Riesz potansiyeli)
Δf	f fonksiyonunun laplasyeni

1 GİRİŞ

Morrey uzayları 1938 yılında C.B. Morrey [22] tarafından eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları araştırılırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenilirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerlik özelliklerinin çalışması ve kesin ön eşitsizliklerin bulunması gibi konularda önemli uygulamaları vardır. Riesz potansiyeli, Macar matematikçi Marcel Riesz tarafından ortaya koyulmuş ve matematik dünyasında önemli bir konu haline gelmiştir. Operatörlerin sınırlılıkları modern analizde bir çok problemin çözümünde kolaylık sağlamaktadır. Eliptik kısmi diferensiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerde, uzaylarda kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması gibi konularda ve önemli uygulama alanlarında operatörlerin sağladığı kolaylıkları kullanılmaktadır. Özellikle Riesz potansiyelleri yardımıyla eliptik ve hipoeliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için ön eşitsizlikler elde edilebilmektedir. Dahası, Morrey uzayı gibi birçok uzayın süreksiz katsayılı eliptik diferensiyel denklemler ve potansiyel teorisinde önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır. Daha sonra bu uzayların Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik diferensiyel denklemler ve potansiyel teorisinde önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır.

Morrey uzaylarının genişlemesi olan $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayları 1990 yılında T. Mizuhara [21] tarafından tanımlanmış ve singüler integral operatörünün bu uzaylardaki sınırlılığı araştırılmıştır. 1994 yılında E. Nakai [24] tarafından harmonik analizde önemli bir yere sahip olan maksimal integral operatörünün, Riesz potansiyelinin ve singüler integral operatörünün $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarınaki sınırlılığı araştırılmıştır. Aynı yıllarda (1990-1994) V.S. Guliyev [13] tarafından Doktora Tezinde, harmonik analizin integral operatörlerinin genişletilmiş lokal Morrey uzayındaki sınırlılığı E. Nakai'nin şartlarından daha geniş şartlar ile araştırılmıştır. 2009 yılında V.S Guliyev, matematik literatüründe önem verilen $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normunu tanımlayarak, $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayında harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığını Mizuhara ve Nakai'ye göre daha geniş şartlar altında araştırmıştır. Daha sonra V.S. Guliyev [14], [15] tarafından $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında maksimal, potansiyel ve singüler integral operatörlerin sınırlılıkları ile ilgili ispat tekniklerini geliştirerek ispatlamıştır.

Biz, bu çalışmada Riesz potansiyel operatörünün tanım ve özelliklerini verdikten sonra, bu operatörün genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılığı ile ilgili elde edilmiş olan sonuçlara yer verilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR, UZAYLAR VE OPERATÖRLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılan tanımlara ve özelliklere yer verilmiştir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\|\cdot\| : X \to R \quad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

$$(N_1)\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$
$$(N_2)\|ax\| = |a|\|x\|$$
$$(N_3)\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X **üzerinde norm** adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.2 X bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde bir **σ-cebir** olarak adlandırılır.

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A}, \quad {}^cE = X - E \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall n = 1, 2, ...$ için $\quad E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$

Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay**, $\mathcal{A}$ deki her bir kümeye de **ölçülebilir küme** adı verilir.

Tanım 2.1.3 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. Bir $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$,

(iii) $\mathcal{A}$ nin her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerin sağlıyorsa bu fonksiyona $\mathcal{A}$ üzerinde bir **ölçü fonksiyonu** veya **ölçü** adı verilir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ölçüsüne **sonlu ölçü** denir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü **σ-sonlu** olarak adlandırılır. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** denir. Ayrıca $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **ölçü uzayı** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.4 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$ oluyorsa f fonksiyonu **ölçülebilirdir** denir. Ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 T, reel değerli ölçülebilir fonksiyonların bir (X, μ) ölçü uzayı üzerinde tanımlanmış ve bir (Y, ν) ölçü uzayı üzerinde bütün kompleks değerli hemen her yerde sonlu ölçülebilir fonksiyonların kümesinde değerler alan bir operatör olsun. Bu durumda her f, g ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$T(f+g) = T(f) + T(g) \quad \text{ve} \quad T(\lambda f) = \lambda T(f)$$

ise T ye **lineer operat**ör,

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \quad \text{ve} \quad |T(\lambda f)| \leq |\lambda| \, |T(f)|$$

ise T ye **altlineer operatör**, bir $K > 0$ sabiti için

$$|T(f+g)| \leq K\left(|T(f)| + |T(g)|\right) \quad \text{ve} \quad |T(\lambda f)| \leq |\lambda| \, |T(f)|$$

ise T ye **quasilineer operatör** denir. Altlineerlik, quasilinerliğin özel bir durumudur.

Tanım 2.1.6 X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer $x \in D(T)$ için,

$$\|Tx\| \leq A\|x\|$$

olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne **sınırlıdır** denir.
Bir T operatörünün normu

$$\|T\| := \sup_{x \in D(T), x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.7 X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Eğer verilen her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(T)$ için, $\|Tx - Tx_0\| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T operatörüne x_0 da **süreklidir** denir.

Tanım 2.1.8 X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün sınırlı olmasıdır.

Tanım 2.1.9 f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt $K \subset X$ kümesi üzerinde

$$\int_K |f| d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna **lokal integrallenebilirdir** denir.

Tanım 2.1.10 $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f(x), g(x)$ ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

$$h = f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

ile tanımlanan h fonksiyonuna f ile g nin **konvolüsyonu** denir.

Tanım 2.1.11 Bir f fonksiyonunun desteği

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

ile tanımlanır. Yani f nin desteği onun sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesinin kapanışıdır. Eğer supp$f$ sınırlı bir küme ise f **kompakt desteğe sahiptir** denir.

2.2 $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı

Tanım 2.2.1 **($L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı)** $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty$$

özelligine sahip ölçülebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı veya p. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı üzerindeki norm

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

ile tanımlanır.

$p = \infty$ için $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı,

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| := \inf \{K : |f(x)| \leq K \quad h.h. x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$$

özelligine sahip $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfıdır.

Tanım 2.2.2 **(Zayıf $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı)** $1 \leq p < \infty$ olmak üzere zayıf Lebesgue uzayı $WL^p(\mathbb{R}^n)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$WL^p(\mathbb{R}^n) := \{f - \text{ölçülebilir} : \ \|f\|_{WL^p} < \infty\},$$

burada

$$\|f\|_{WL^p} := \sup_{\lambda>0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}$$

dır.

Tanım 2.2.3 **(Kuvvetli ve Zayıf Tip Sınırlılık)** $1 \leq p, q \leq \infty$, (X, μ) ve (Y, ν) iki ölçü uzayı ve T, $L_p(X, \mu)$ den tanım ve görüntü kümeleri sırasıyla Y ve $\mathbb{C}$ olan ölçülebilir fonksiyonların uzayına bir operatör olsun. Eğer $q < \infty$ olmak üzere

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda} \right)^q$$

ise T zayıf (p, q) tipinden ve eğer $q = \infty$ iken $L_p(X, \mu)$ den $L_\infty(Y, \nu)$ ye sınırlı bir operatör ise **zayıf** (p, ∞) **tipindedir** denir.

Eğer T, $L_p(X, \mu)$ den $L_q(Y, \nu)$ ya sınırlı ise **kuvvetli** (p, q) **tiplidir** denir. Yani, her $f \in L_p(X, \mu)$ için

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Buradan $q = \infty$ olması durumunda zayıf ve kuvvetli tip çakışmaktadır.

Eğer T, kuvvetli (p, q) tipli ise aynı zamanda zayıf (p, q) tiplidir. Gerçekten, eğer

$$E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$$

olarak alırsak, bu durumda

$$\nu(E_\lambda) = \int\limits_{E_\lambda} d\nu \leq \int\limits_{E_\lambda} \left|\frac{Tf(x)}{\lambda}\right|^q d\nu \leq \frac{\|Tf\|_q^p}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

olur.

Eğer $(X, \mu) = (Y, \nu)$ ve T özdeşlik operatörü olursa zayıf (p, p) klasik Chebyshev eşitsizliği olur.

Teorem 2.2.4 [9] $L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $1 \leq p \leq \infty$ için bütün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının birleşimlerini içerir. Daha genel olarak $0 < p < q < \infty$ için

$$L_q(\mathbb{R}^n) \subseteq L_q^{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

elde edilir

Tanım 2.2.5 [25]**(Young Esitsizliği)** $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\forall a, b > 0$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

olur.

Tanım 2.2.6 [25]**(Hölder Esitsizliği)** $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L^p, g \in L^q$ ise $fg \in L^1$ olur ve

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.2.7 [25]**(Minkowski Esitsizliği)** Eger $f, g \in L^p$ ve $1 \leq p$ ise $f + g \in L^p$ olur ve

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.2.8 (Schwarz eşitsizliği) $f(x), g(x) \in L_2$ olsun. Bu durumda

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left\{ \int_a^b |f(x)|^2 \ dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b |g(x)|^2 \ dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Schwarz eşitsizliği denir.

Tanım 2.2.9 (Fourier Dönüşümü) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(x,y)}dy$$

ile verilen $\widehat{f}$ fonksiyonu f fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak adlandırılır.

Burada $(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ dir. Fourier dönüşümü

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(x,y)}dy$$

veya

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i(x,y)}dy$$

olarak da alınabilir. Eğer $n = 1, f \in L^1(\mathbb{R})$ ise bu durumda

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-ixy}dy$$

olur.

Teorem 2.2.10 (Lebesgue Diferensiyelleme Teoremi) Eğer $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

sağlanır.

Teorem 2.2.11 (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, $g : X \to [0, \infty]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve $f, f_1, f_2, \cdots$ de X üzerinde $\mathcal{A}$-ölçülebilir $[-\infty, \infty]$ değerli fonksiyonlar olsun. Eğer hemen hemen her x için

(i)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

ise f ve f_n fonksiyonları integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu(x) = \int\limits_X f(x) d\mu(x)$$

dir.

2.3 Hardy-Littlewood Maksimal Operatör

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ilk olarak Hardy ve Littlewood [18] tarafından bir boyutlu durumda, kompleks analizin uygulamalarına yönelik olarak tanımlanmıştır. Maksimal fonksiyon analizde pek çok operatörün sınırlılığında çok önemli bir role sahiptir. Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun farklı tanımları Grafakos, Hardy - Litlewood, Stein [10, 18, 28] tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.3.1 $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(0,r)|^{-1} \int\limits_{B(0,r)} |f(x-y)| dy$$

ile tanımlanır. Bu fonksiyon $+\infty$ a eşit olabilir.

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu yuvar yerine küp alınarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 2.3.2 $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer B_r, $[-r,r]^n$ kübü ise $M'f$ merkezli Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int\limits_{B_r} |f(x-y)|\, dy$$

ile tanımlanır. $n = 1$ iken M ve M' çakışır. Eğer $n > 1$ ise bu durumda

$$c_n M'f(x) \leq Mf(x) \leq C_n M'f(x)$$

olacak şekilde sadece n ye bağlı c_n ve C_n sabitleri vardır. Bu eşitsizlikten dolayı M ve M' operatörleri uygun koşullara göre değiştirilebilir.

Tanım 2.3.3 $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. M^*f merkezli olmayan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M^*f(x) = \sup_{B(x_0,r)\ni x} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int\limits_{B(x_0,r)} |f(y)|dy$$

ile tanımlanır. Burada supremum x i içeren ve kenarları eksenlere paralel olan bütün $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarları üzerinden alınmaktadır. M ve M^* noktasal olarak eşdeğerdir.

M maksimal operatörü altlineer ve homojendir. Yani,

$$M(f+g) \leq Mf + Mg$$

ve

$$M(\lambda f) = \lambda(Mf), \quad \forall \lambda \geq 0$$

sağlanır.

Aşağıdaki teorem M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün hemen hemen her yerde sonlu, zayıf $(1,1)$ ve $1 < p \leq \infty$ için (p,p) tipinden bir operatör olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 2.3.4 [19]**(Hardy-Littlewood-Wiener teoremi)**

(1) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) < \infty$ dır.

(2) $p = 1$ ise, bu durumda her $\lambda > 0$ ve $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \ Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır.

(3) $1 < p \leq \infty$ ise, her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n,p) > 0$ sabiti vardır.

Teorem 2.3.5 [8]

(i) $1 \leq p < \infty$ için

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, \omega(x)dx$$

zayıf (p,p) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\omega \in A_p$ olmasıdır.

(ii) $1 < p < \infty$ iken M, operatörünün $L_p(\omega)$ da sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\omega \in A_p$ olmasıdır.

Teorem 2.3.6 [7] $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{M_{p,\lambda}} \leq C\|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{WM_{1,\lambda}} \leq C\|f\|_{M_{1,\lambda}}$$

sağlanır. Burada C, f den bağımsızdır.

Ayrıca $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \lambda < n$ ve $f \in M_{p,\lambda}$ için $\mathbb{R}^n$ de Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

Lemma 2.3.7 [13] $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int\limits_t^\infty r^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}dr \tag{2.1}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{WL_1(B(x,t))} \leq Ct^n \int\limits_t^\infty r^{-n-1}\|f\|_{L_1(B(x,r))}dr \tag{2.2}$$

sağlanır. Burada C, f ve $x \in \mathbb{R}^n$ e bağlı olmayan bir sabit ve $t > 0$ dır.

2.4 Morrey Uzayı

Klasik Morrey uzayları 1938 yılında C.B. Morrey [22] tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır.

Morrey uzaylarının önemli uygulamaları Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik problemlerde ve potansiyel teoride ortaya çıkmıştır.

Tanım 2.4.1 $1 \leq p < \infty,\ 0 \leq \lambda \leq n,\ f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $M_{p,\lambda} \equiv M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$M_{p,\lambda} := \left\{ f : \ ||f||_{M_{p,\lambda}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $||f||_{M_{p,\lambda}}$ normu

$$||f||_{M_{p,\lambda}} \equiv ||f||_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde verilir.

$\lambda = 0$ için $M_{p,0} \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ dir. Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise bu durumda $M_{p,\lambda} = \theta$ olur. Burada θ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0 a denk olan bütün fonksiyonların kümesini göstermektedir.

$WM_{p,\lambda} \equiv WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile bütün $f \in WL_p^{loc}$ fonksiyonlarının uzayı olan zayıf Morrey uzayını göstereceğiz. Burada,

$$\|f\|_{WM_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WM_{p,\lambda}(B(x,r))} < \infty$$

şeklindedir.

Lemma 2.4.2 [20] $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $M_{p,n} \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{M_{p,n}} = v_n^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olup, burada $v_n = |B(0,1)|$ dır.

İspat. $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\left(t^{-n} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq v_n^{1/p} ||f||_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olur. Buradan $f \in M_{p,n}$ ve

$$\|f\|_{M_{p,n}} \leq v_n^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

şeklindedir. $f \in M_{p,n}$ olmak üzere Lebesgue yakınsaklık teoreminden (bkz. [27])

$$\lim_{t\to\infty} |B(x,t)|^{-1} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p dy = |f(x)|^p$$

olur. Bu durumda

$$|f(x)| = \left(\lim_{t\to\infty} |B(x,t)|^{-1} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq v_n^{-1/p} \|f\|_{M_{p,n}}$$

şeklindedir. Buradan $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dır ve

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq v_n^{-1/p} \|f\|_{M_{p,n}}$$

olur. ■

Lemma 2.4.3 [11] $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $\alpha = \frac{n-\lambda}{p}$ için

$$\|f\|_{M_{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/p'} \|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

dır ve buradan $M_{p,\lambda} \subset M_{1,n-p}$ olur. Burada $1/p + 1/p' = 1$ dır.

İspat. $f \in M_{p,\lambda}$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ ve $\alpha p = n - \lambda$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)| dy &\leq \left(\int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int\limits_{B(x,t)} dy \right)^{1/p'} \\ &= v_n^{1/p'} t^{n/p'} \left(\int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} t^{\alpha-n} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)| dy &\leq v_n^{1/p'} t^{\alpha-n/p} \left(\int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= v_n^{1/p'} \left(t^{-\lambda} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq v_n^{1/p'} \|f\|_{M_{p,\lambda}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $f \in M_{1,n-\alpha}$ ve

$$\|f\|_{M_{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/p'} \|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

şeklindedir. ■

2.5 $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı

Morrey uzaylarının genişlemesi olan $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı 1990 yılında Mizuhara [21] tarafından tanımlanmış ve singüler integral operatörünün bu uzaylardaki sınırlılığı araştırılmıştır. 1994 yılında Nakai [24] tarafından harmonik analizde önemli bir yere sahip olan maksimal integral operatörünün, Riesz potansiyelinin ve singüler integral operatörünün $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı araştırılmıştır. $M_{p,\varphi}$ geneleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normlu hali ilk olarak 2009 yılında Guliyev [11] tarafından tanımlanmış ve harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığı Mizuhara ve Nakai'ye göre daha geniş şartlar altında araştırılmıştır. Ayrıca Guliyev [14], [15] tarafından $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında maksimal, potansiyel ve singüler integral operatörlerin sınırlılıkları ortaya koyduğu yeni metot ile elde edilmiştir.

$M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı Mizuhara [21] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.5.1 [21] $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ ile

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır. Burada $WL_p(B(x,r))$ uzayı ile

$$\|f\|_{WL_p(B(x,r))} \equiv \|f\chi_{B(x,r)}\|_{WL_p(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

şeklindeki bütün ölçülebilir f fonksiyonlarını içeren zayıf L_p uzayı ifade edilir.

Ayrıca doğal topoloji ile verilen $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayları her $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için $f\chi_B \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $f\chi_B \in WL_p(\mathbb{R}^n)$ şeklindeki bütün f fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda}{p}}$ için

$$L_{p,\lambda} = M_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda}{p}}},$$

$$WL_{p,\lambda} = WM_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda}{p}}}$$

olduğu görülür.

$M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleşmiş normlu hali Guliyev [11] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.5.2 [11] $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n),\ 1 \le p < \infty$$

ile

$$\begin{aligned} \|f\|_{M_{p,\varphi}} &\equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\ |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\ \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty \end{aligned}$$

normalleşmiş normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca

$$WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$$

ile

$$\begin{aligned} \|f\|_{WM_{p,\varphi}} &\equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\ |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\ \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty \end{aligned}$$

normalleşmiş normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda}{p}}$ için

$$L_{p,\lambda} = M_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}},$$

$$WL_{p,\lambda} = WM_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

olduğu görülür.

3 RİESZ POTANSİYEL OPERATÖRÜ

Riesz potansiyeli harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır.

Bu kesimde klasik Lebesgue uzaylarında Riesz potansiyeli tanımlanıp, bunların varlık ve sınırlılık özellikleri incelenecektir.

3.1 I_α Riesz Potansiyeli

Tanım 3.1.1 (Riesz potansiyeli) f yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

biçiminde tanımlanır.

$f \in S$ olmak üzere

$$F^{-1}(\widehat{f}(x)) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(xy)} \widehat{f}(y) dy$$

dir. $e^{i(xy)} = e^{i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(-\Delta) f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-\Delta e^{i(xy)}) \widehat{f}(y) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} e^{i x_1 y_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} e^{i x_2 y_2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} e^{i x_n y_n}) \widehat{f}(y) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^2 e^{i(xy)} \widehat{f}(y) dy
\end{aligned}$$

$$I_\alpha f = F^{-1} |y|^{-\alpha} F f, \quad f \in S \tag{3.1}$$

olduğundan

$$(-\Delta) f = F^{-1} |y|^2 F f$$

yazılabilir. Bilindiği gibi Laplace operatörü eliptik operatördür. P. Seeley göstermiştir ki, eğer bir eliptik L operatörü için

$$L f = F^{-1} \phi(x) F f$$

formülü mevcut ise o zaman onun istenilen kompleks kuvveti için

$$L^z f = F^{-1}\phi^z(x)Fy$$

geçerlidir. Dolayısıyla bu teoreme göre Laplace operatörü için

$$(-\Delta)^z f = F^{-1}|y|^{2z}Ff$$

yazılabilir. Dolayısıyla görülür ki $z = -\frac{\alpha}{n}$ için

$$(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{n}} f = F^{-1}|y|^{-\alpha}Ff \tag{3.2}$$

geçerlidir. Yani (3.1) ve (3.2) den görünür ki, Riesz potansiyelinin ve $-\Delta$ nın negatif kesir kuvvetinin genelleşmiş anlamda Fourier dönüşümleri aynıdır. Bu durumda

$$I_\alpha = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{n}},\ 0 < \alpha < n \tag{3.3}$$

ifadesi yazılabilir, burada $0 < \alpha < n$ ve

$$\gamma(\alpha) = \pi^{n/2} 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2})}$$

olmak üzere

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

şeklinde tanımlanan I_α operatörüne Riesz potansiyeli denir.

Teorem 3.1.2 (Riesz Potansiyeli İçin Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi) $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

(i) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

integrali hemen her x için mutlak yakınsaktır.

(ii) Eğer $p > 1$ ise bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir.

(iii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda her λ için

$$m\{x : |I_\alpha f(x)| > \lambda\} \le \left(\frac{A\|f\|_1}{\lambda}\right)^q$$

dir. Yani, $f \to I_\alpha f$ dönüşümü $(1, q)$ zayıf tiplidir $\left(\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}\right)$

Aşağıdaki teorem I_α Riesz potansiyelinin $0 < \alpha < n$ için (L_p, L_q) sınırlılığını ifade etmektedir.

Teorem 3.1.3 [10] $1 \le p < q < \infty$, $0 < \alpha < n$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

ve $p = 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_{q,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde $C = C(n, \alpha, p) < \infty$ sabiti vardır ve burada $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ biçimindedir.

Aşağıdaki teorem I_α Riesz potansiyelinin $0 < \alpha < n$ ve $\omega \in A_{p,q}$ için $(L_p(\omega^p), L_q(\omega^q))$ sınırlılığını ifade etmektedir.

Teorem 3.1.4 [23] $0 < \alpha < n$, $1 \le p < n/\alpha$, $1/p - 1/q = \alpha/n$ ve $\omega \in A_{p,q}$ olsun. Bu durumda I_α Riesz potansiyeli $p > 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_{q(\omega^q)}} \le C\|f\|_{L_p(\omega^p)}$$

ve $p = 1$, $q = n/(n - \alpha)$, $\omega \in A_{1,q}$ ve $\lambda > 0$ için

$$\omega^q(\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}) \le \frac{C}{\lambda^q}\|f\|^q_{L_1(\omega)}$$

olacak şekilde λ ve f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır.

Teorem 3.1.5 [1] $0 < \alpha < n - \lambda$, $1 \le p < n/\alpha$ ve $1/p - 1/q = \alpha/n - \lambda$ olsun. Bu durumda $0 < \lambda < n$ için I_α Riesz potansiyeli $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

4 $M_{p,\varphi}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYINDA RİESZ POTANSİYELİNİN SINIRLILIĞI İÇİN ELDE EDİLEN SONUÇLAR

Bu bölümde $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Riesz potansiyel operatörünün sınırlılığı ile ilgili özellik ve sonuçlara yer verilmiştir.

Ayrıca bu bölümde $r \le t \le 2r$ olmak üzere, $\varphi(x,r)$ fonksionu $c \ge 1$; t ve r ye bağlı olmayan bir sabit ve $x \in R^n$ olmak üzere

$$c^{-1}\varphi(x,r) \le \varphi(x,t) \le c\varphi(x,r) \tag{4.1}$$

koşullarını sağladığı ve yine $C > 0$; r ve $x \in R^n$ ye bağlı olmayan bir sabit olmak üzere maksimal operatörler için

$$\int_r^\infty \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \le C\varphi(x,r)^p \tag{4.2}$$

ve potansiyel operatörü için

$$\int_r^\infty t^{\alpha p}\varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \le Cr^{\alpha p}\varphi(x,r)^p \tag{4.3}$$

koşullarının sağladığı kabul edilmiştir.

4.1 Spanne - Guliyev Tipli Sınırlılık

Bu bölümde, I_α Riesz potansiyel operatörünün sınırlılığı için Spanne-Guliyev tipli sonuçlarda Guliyev [12, 11] tarafından yapılan ispatlara yer verilmiştir.

Aşağıda ispatsız olarak verilen I_α Riesz potansiyeli operatörü ile ilgili sonuç Nakai [24] tarafından verilmiştir.

Teorem 4.1.1 $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Ayrıca $\varphi(x,r)$, (4.1) ve (4.3) koşullarını sağlasın. Bu durumda I_α Riesz potansiyeli operatörü $M_{p,\varphi}$ uzayından $M_{q,\varphi}$ uzayına sınırlıdır.

Lokal Guliyev eşitsizliği kullanılarak ispatı verilen, Mizuhara [21] ve Nakai [24] tarafından I_α Riesz potansiyeli operatörünün sınırlılığı için elde edilen sonuç aşağıda verilmiştir. (Bkz. [4]-[6], [12, 16]).

Teorem 4.1.2 $1<p<\infty$, $0<\alpha<\frac{n}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$ ve (φ_1,φ_2) fonksiyonları

$$\int_t^\infty r^\alpha \varphi_1(x,r)\frac{dr}{r}\leq C\,\varphi_2(x,t), \tag{4.4}$$

koşullarını sağlasın. Burada, C ,x ve t ye bağlı olmayan bir sabittir.

Bu durumda $p>1$ için M_α ve I_α operatörleri; M_{p,φ_1} uzayından WM_{q,φ_2} uzayına ve $M_{p,\varphi_1}(R^n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}(R^n)$ uzayına ve $p=1$ için M_α ve I_α operatörleri $M_{1,\varphi_1}(R^n)$ uzayından $WM_{q,\varphi_2}(R^n)$ uzayına sınırlıdır.

Teoremin ispatında kullanacağımız lemma daki lokal Guliyev eşitsizliği, Guliyev [5] tarafından ispatlanmıştır.

Lemma 4.1.3 (Lokal Guliyev Eşitsizliği)

$1<p<\infty$, $0<\alpha<\frac{n}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$ ve $f\in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alalım. Bu durumda $p>1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(B(x,t))}\leq Ct^{\frac{n}{q}}\int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr \tag{4.5}$$

ve $p=1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{WL_q(B(x,t))}\leq Ct^{\frac{n}{q}}\int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1}\|f\|_{L_{1(B(x,r))}}\,dr \tag{4.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada C, f ye bağlı olmayan bir sabittir, $x\in R^n$ ve $t>0$ dir.

İspat. $1<p<\infty$ alalım. f fonksiyonu $f=f_1+f_2$, $f_1(y)=f(y)\,\chi_{B(x,2t)}(y)$, $f_2(y)=f(y)\,\chi_{B^c(x,2t)}(y)$, $t>0$ olarak tanımlanırsa

$$I_\alpha f(x)=I_\alpha f_1(x)+I_\alpha f_2(x)$$

elde edilir. $1<p<\infty$, $0<\alpha<\frac{n}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$ olmak üzere Teorem 3.1.2 deki (ii) özelliğinden

$$\begin{aligned}\|I_\alpha f_1\|_{L_q(B(x,t))}&\leq\|I_\alpha f_1\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}\\&\leq C\,\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\\&=C\,\|f\|_{L_p(B(x,2t))}\end{aligned}$$

elde edilir, burada C, f den bağımsız bir sabittir. Ayrıca,

$$\|I_\alpha f_1\|_{L_q(B(x,t))}\leq Ct^{\frac{n}{q}}\int_{2t}^\infty r^{-\frac{n}{q}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr \tag{4.7}$$

elde edilir. $|x-z| \leq t$, $|z-y| \geq 2t$ olduğunda $|x-z| \leq t \leq \frac{|z-y|}{2}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |x-y| &= |x-z+z-y| \\ &\leq |x-z| + |z-y| \\ &\leq t + |z-y| \\ &\leq \frac{3}{2}|z-y| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |z-y| &= |z-x+x-y| \\ &\leq |z-x| + |x-y| \\ &\leq t + |x-y| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{|z-y|}{2} + |x-y| \\ &\Rightarrow \frac{|z-y|}{2} \leq |x-y| \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak,

$$\frac{1}{2}|z-y| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|z-y|$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \|I_\alpha f_2\|_{L_q(B(x,t))} &\leq \left\| \int\limits_{B^c(x,2t)} \frac{f(y)}{|z-y|^{n-\alpha}} dy \right\|_{L_q(B(x,t))} \\ &\leq C \int\limits_{B^c(x,2t)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \left\| \chi_{(B(x,t))} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilir. $\beta > \frac{n}{q}$ seçilerek, Hölder eşitsizliğinden

$$\int\limits_{B^c(x,2t)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

$$= \beta \int\limits_{B^c(x,2t)} |x-y|^{\alpha-n+\beta} |f(y)| \left(\int\limits_{|x-y|}^{\infty} s^{-\beta-1} ds \right) dy$$

$$= \beta \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \left(\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n: 2t\le|x-y|\le s\}} |x-y|^{\alpha-n+\beta} |f(y)| \, dy \right) ds$$

$$\le C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left\| |x-y|^{\alpha-n+\beta} \right\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds$$

$$= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(\int\limits_{2t\le|x-y|\le s} \frac{1}{\left(|x-y|^{n-\alpha-\beta}\right)^{p'}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} ds$$

$$= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(\int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{2t}^{s} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{(n-\alpha-\beta)p'}} d\rho dx' \right)^{\frac{1}{p'}} ds$$

$$\le C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(s^{n-(n-\alpha-\beta)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} ds$$

$$= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} s^{-\frac{n}{p}} s^{\alpha+\beta} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds$$

$$= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{\alpha-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds \tag{4.8}$$

elde edilir. Diğer yandan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ise $\frac{n}{q} = \frac{n}{p} - \alpha$ dir. Bu değer (4.8) de yerine yazılırsa,

$$\|I_\alpha f_2\|_{L_q(B(x,t))} \le C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{\alpha-\left(\frac{n}{q}+\alpha\right)-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds$$

$$= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds$$

$$\le C t^{\frac{n}{q}} \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds \tag{4.9}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (4.7) ve (4.8) dan (4.5) ispatlanır. $p = 1$ ve herhangi $B = B(x,r)$ yuvarı için

$$\|I_\alpha f\|_{WL_1(B(x,t))} \le \|I_\alpha f_1\|_{WL_1(B(x,t))} + \|I_\alpha f_2\|_{WL_1(B(x,t))}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği açıktır. I_α operatörünün $L_1(R^n)$ uzayından $WL_q(R^n)$ uzayına sınırlığından

$$\|I_\alpha f_1\|_{WL_1(B(x,t))} \le C\,\|f\|_{L_q(B(x,2t))}$$

bulunur, burada C, x ve t ye bağlı olmayan bir sabittir.

Dikkat edilmelidir ki (4.9) eşitsizliği $p = 1$ durumu için de doğrudur. Dolayısıyla (4.9) dan (4.6) eşitsizliği elde edilir. ■

Şimdi Teorem 4.1.2 ispatını verelim.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $f \in M_{p,\varphi}(R^n)$ olsun. Lemma (4.1.3) den

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{M_{q,\varphi_2}} &= \sup_{x\in R^n, t>0} \frac{t^{-n/q}}{\varphi_2(x,t)} \|I_\alpha f\|_{L_q(B(x,t))} \\
&\le C \sup_{x\in R^n, t>0} \frac{1}{\varphi_2(x,t)} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr \\
&\le C\,\|f\|_{M_{p,\varphi_1}} \sup_{x\in R^n, t>0} \frac{1}{\varphi_2(x,t)} \int_t^\infty r^\alpha \varphi_1(x,r)\frac{dr}{r}
\end{aligned}$$

(4.4) den $1 < p < \infty$ için ispat tamamlanır.

Şimdi $p = 1$ ve $f \in M_{1,\varphi_1}(R^n)$ olsun. Lemma (4.1.3)

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{WM_{q,\varphi_2}} &= \sup_{x\in R^n, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t) t^{-\frac{n}{q}} \|I_\alpha f\|_{WL_q(B(x,t))} \\
&\le C \sup_{x\in R^n, t>0} \varphi_2^{-1}(x,t) \int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_{1(B(x,r))}}\,dr
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{WM_{q,w_2}} &\le C\,\|f\|_{M_{1,\varphi_1}(R^n)} \sup_{x\in R^n, t>0} \frac{1}{\varphi_2(x,t)} \int_t^\infty r^\alpha \varphi_1(x,r)\frac{dr}{r} \\
&\le C\,\|f\|_{M_{1,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $p = 1$ için de (4.4) den ispat tamamlanmıştır. ■

$\varphi_1(x,r) = \varphi_2(x,r) = \varphi(x,r)$ olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir (Guliyev [13],[12]):

Sonuç 4.1.4 $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\varphi(x,t)$, (4.1) ve (4.3) koşullarını sağlasın. Bu durumda M_α ve I_α operatörleri $p > 1$ için $M_{p,\varphi}(R^n)$ uzayından $M_{q,\varphi}(R^n)$ uzayına ve $p = 1$ için $M_{1,\varphi}(R^n)$ uzayından $WM_{q,\varphi}(R^n)$ uzayına sınırlıdır.

4.2 Adams - Guliyev Tipli Sınırlılık

Bu bölümde Riesz potansiyel operatörünün sınırlılığı için Adams-Guliyev tipli sonuçlarda Guliyev [11, 12] tarafından yapılan ispatlara yer verilmiştir.

Aşağıdaki I_α Riesz potansiyeli operatörü ile ilgili sonuç Nakai [24] tarafından verilmiştir.

Teorem 4.2.1 $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\varphi(x,r)$ (4.1) koşulunu ve

$$t^\alpha \varphi(x,t) + \int_t^\infty r^\alpha \varphi(x,r) \frac{dr}{r} \le C \varphi(x,t)^{\frac{p}{q}} \tag{4.10}$$

koşulunu sağlasın, burada $q \ge p$ ve C, $x \in R^n$ ve $t > 0$ 'a bağlı olmayan bir sabittir. Ayrıca kabul edelim ki, hemen her $x \in R^n$ için $\varphi(x,r)$ için $\varphi(x,.) : [0,\infty) \longrightarrow [a,\infty)$ koşulunu sağlayacak biçimde herhangi bir $a = a(x) > 0$ örten fonksiyonu olsun. Bu durumda, M_α ve I_α operatörleri, $p > 1$ için $M_{p,\varphi}(R^n)$ uzayından $M_{q,w^{p/q}}(R^n)$ uzayına ve $p = 1$ için $M_{1,\varphi}(R^n)$ uzayından $WM_{q,\varphi^{1/q}}(R^n)$ uzayına sınırlıdır.

Teoremin ispatında kullanacağımız Lemma Guliyev [5] tarafından ispatlanmıştır.

Lemma 4.2.2 $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ve $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C f, x ve t den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$|I_\alpha f(x)| \le C t^\alpha M f(x) + C \int_t^\infty r^{\alpha - \frac{n}{p} - 1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr \tag{4.11}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. $1 < p < \infty$ alalım. f

$$f = f_1 + f_2,\ f_1(y) = f(y)\,\chi_{B(x,2t)}(y)\,,\ f_2(y) = f(y)\,\chi_{B^c(x,2t)}(y)\,,\ t > 0$$

olarak tanımlanırsa

$$I_\alpha f(x) = I_\alpha f_1(x) + I_\alpha f_2(x)$$

elde edilir. $|I_\alpha f_1(x)| \leq C t^\alpha M f(x)$ eşitsizliği Hedberg [17] tarafından ispatlanmıştır. $I_\alpha f_2$ için ise Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
|I_\alpha f_2(x)| &\leq \int\limits_{B^c(x,2t)} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)|\,dy \\
&\leq C \int\limits_{B^c(x,2t)} |f(y)|\,dy \int\limits_{|x-y|}^{\infty} r^{\alpha-n-1} dr \\
&\leq C \int\limits_{2t}^{\infty} \left(\int\limits_{2t<|x-y|<r} |f(y)|\,dy \right) r^{\alpha-n-1} dr \\
&\leq C \int\limits_{t}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \left(\int\limits_{t<|x-y|<r} 1 dx \right)^{\frac{1}{p'}} r^{\alpha-n-1} dr \\
&= C \int\limits_{t}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \left(\int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{t}^{r} \rho^{n-1} d\rho dx' \right)^{\frac{1}{p'}} r^{\alpha-n-1} dr \\
&\leq C \int\limits_{t}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,r))} r^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} r^{\alpha-n-1} dr \\
&= C \int\limits_{t}^{\infty} r^{\alpha-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi Teorem 4.2.1 ispatını verelim.

İspat. $M_\alpha f(x) \leq C(I_\alpha |f|)(x)$ olduğunu biliyoruz. $1 \leq p < \infty$ ve $f \in M_{p,\varphi}(R^n)$ olsun. Lemma 4.2.2

$$|I_\alpha f(x)| \leq C r^\alpha M f(x) + C \|f\|_{M_{p,\varphi}} \int\limits_{r}^{\infty} t^\alpha \varphi(x,t) \frac{dt}{t}$$

dir. ((4.10)) den

$$r^\alpha \varphi(x,r) \leq C \varphi(x,r)^{\frac{p}{q}}$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca (4.10) şartını kullanarak

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\varphi(x,r)^{\frac{p}{q}-1} Mf(x) + C\varphi(x,r)^{\frac{p}{q}} \|f\|_{M_{p,\varphi}}$$

elde edilir. $\varphi(x,r)$ örten olduğundan $r>0$ seçebiliriz ve böylece

$$\varphi(x,r) = Mf(x)\,\|f\|^{-1}_{Mp,\varphi(R^n)}$$

elde edilir. Burada f nin 0 'a özdeş olmadığını varsayıyoruz. Böylece her $x \in R^n$ için

$$|I_\alpha f(x)| \leq C(Mf(x))^{\frac{p}{q}} \|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{M_{p,\varphi}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Teorem 4.2.1 deki (4.1) koşulu nedeniyle $M_{p,\varphi}(R^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında M maksimal operatörünün sınırlılığından teorem gerçeklenir.

$1 < p < q < \infty$ için

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{M_{q,\varphi^{p/q}}} &= \sup_{x\in R^n, t>0} \varphi(x,t)^{-\frac{p}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|I_\alpha f\|_{L_{q(B(x,t))}} \\
&\leq C\|f\|^{1-\frac{p}{q}}_{M_{p,\varphi}} \sup_{x\in R^n, t>0} \varphi(x,t)^{-\frac{p}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|Mf\|^{p/q}_{L_{p(B(x,t))}} \\
&\leq C\|f\|_{M_{p,\varphi}}
\end{aligned}$$

ve $p = 1 < q < \infty$ için

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{WM_{q,\varphi^{\frac{1}{q}}}} &= \sup_{x\in R^n, t>0} \varphi(x,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|I_\alpha f\|_{WL_{q(B(x,t))}} \\
&\leq C\|f\|^{1-\frac{1}{q}}_{M_{p,\varphi}} \sup_{x\in R^n, t>0} \varphi(x,t)^{-\frac{1}{q}} t^{-\frac{n}{q}} \|Mf\|^{\frac{1}{q}}_{WL_{1(B(x,t))}} \\
&\leq C\|f\|_{M_{p,\varphi}}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

KAYNAKLAR

[1] Adams, D. R. *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J. **1975** 42, 765-778.

[2] Akbulut, A.; Guliyev, V.S.; Mustafayev, R. *On Boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized Morrey spaces*, Mathematica Bohemica, **2012**, 137 1, 27-43.

[3] Akbulut, A.; Kuzu, O. *Marcinkiewicz integrals associated with Schrodinger operator on generalized Morrey spaces*, Preprint in J. Math. Inequal., **2014**.

[4] Burenkov, V.I.; Guliyev, H.V.; Guliyev, V.S. *Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces,* Dokl. Akad. Nauk **74** (1) **2006**, 540-544.

[5] Burenkov, V.I.; Guliyev, V.S. *Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces,* Potential Anal. **30** (3) **2006**, 211-249.

[6] Burenkov, V.; Gogatishvili, A.; Guliyev, V.S. ve Mustafayev, R. *Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces,* Potential Anal. 35 **2011** 1, 67-87.

[7] Chiarenza, F.; Frasca, M. *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Math. Appl. **1987**, 7, 7, 273-279.

[8] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode. Island, **2000**, 29.

[9] Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis*, Axler, S.; Ribet, K.A., Springer, NY USA, **2008**.

[10] Grafakos, L. *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, **2004**.

[11] Guliyev, V.S. *Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces*, J. Inequal. Appl. (2009)**2009**, Article ID 503948, 20 .

[**12**] Guliyev, V.S. *Function spaces, Integral Operators and Two Weighted Inequalities on Homogeneous Groups. Some Applications*, Casioglu, Baku, **1999**, 332.

[**13**] Guliyev, V.S. *Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in* $\mathbb{R}^n$, Doctoral degree dissertion, Mat. Inst. Steklov, Moscow, **1994**, 329.

[**14**] Guliyev, V.S.; Aliyev, S.S.; Karaman, T. *Boundedness of a class of sublinear operators and their commutators on generalized Morrey spaces*, Integr. Equ. Oper. Theory, 71, ID 356041, **2011**, 327-355.

[**15**] Guliyev, V.S.; Aliyev, S.S.; Karaman, T.; Shukurov, P.S. *Boundedness of sublinear operators and commutators on generalized Morrey spaces*, Integral. Equ. Oper. Theory, **2011**, 71, 3, 327-355 .

[**16**] Guliyev, V.S.; Hasanov, J; Samko, S *Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces*, Math. Scand. **197** (2) **2010**, 285-304.

[**17**] Hedberg L.I, On certain convolution inequalies, Proc. Amer. Math. Soc. 36, **1972**, 505-510.

[**18**] Hardy, G. H.; Littlewood, L. E. *A maximal theorem with functio theoretic applications*, Acta Math., **1930**, 54, 81-116.

[**19**] Krantz, S.G.; Parks, H. R. *Geometric integration theory.* 1st ed. Birkhäuser Boston, **2008**.

[**20**] Long, R.L.; *The spaces generated by blocks*, Sci. Sinica, Ser.A, 27 **1984**, 16-26.

[**21**] Mizuhara, T. *Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces*, Harmonik analysis (Sendai, 1990), ICM-90 Satellite Conference Proceedings, **1991**, 183-189.

[**22**] Morrey, C.B. *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **1938**, 43, 126-166.

[**23**] Muckenhoupt, B.; Wheeden, R. *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., **1974**, 192, 261-274.

[**24**] Nakai, E. *Hardy–Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces*, Math. Nachr. **166 1994**, 95-103.

[**25**] Neri U, *Singular Integrals*, Springer Verlag, New York, **1971**.

[**26**] Peetre, J. *On the theorey of $L_{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal., **1969**, 4, 71-87.

[**27**] Stein, E.M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, **1970**, 304.

[**28**] Stein, E.M. *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood-Paley Theory.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, **1970**.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Ramazan AKILLI
Doğum Yeri	:	Merkez/Kırşehir
Doğum Tarihi	:	1983
Yabancı Dili	:	İngilizce

İletişim Bilgileri

Adres	:	Prof. Dr. Erol Güngör Ortaokulu - Kırşehir
E-mail	:	ramazann386@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lisans	:	Konya Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği