T.C.

AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIESZ UZAYINDA POZİTİF OPERATÖRLER

Hüseyin BAHADIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2017

T.C.

AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIESZ UZAYINDA POZİTİF OPERATÖRLER

Hüseyin BAHADIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN

YRD. DOÇ. DR. ŞEBNEM YILDIZ

KIRŞEHİR 2017

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Doç. Dr. H. Nedret ÖZGEN

Üye

Yrd. Doç. Dr. Şebnem YILDIZ

Üye

Yrd. Doç. Dr. Turhan KARAMAN

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../07/2017

Prof. Dr. Levent KULA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum “Riesz Uzayında Pozitif Operatörler” başlıklı çalışmamın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

Hüseyin BAHADIR

ÖZET

RIESZ UZAYINDA POZİTİF OPERATÖRLER

Yüksek Lisans Tezi

Hüseyin BAHADIR

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Temmuz 2017

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, vektör uzayı, sıralı vektör uzayı, Banach uzayı ve operatörlerle ilgili bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Riesz uzayı kavramı ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Riesz uzayında pozitif operatörler ile ilgili önemli tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca Dedekind tam Riesz uzayı ve Archimedean Riesz uzayından bahsedilerek bunların sonuçları hakkında bilgiler ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, f-cebirleri ve özellikleri verildikten sonra band koruyan operatörler ile orthomorfizmalar kavramlarına yer verilmiştir. f-cebirleri ile orthomorfizmalar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca eşlenik operatörler yardımıyla orthomorfizmaların alt kümesi olan merkezcil operatörler ve merkezcil operatörlerin eşleniği ifade edilmiştir.

Son bölümde ise sonuçlardan bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler	:	Banach latis, operatör, latis, merkez, orthomorfizma
Tez Yöneticileri	:	Yrd. Doç. Dr. Şebnem YILDIZ
Sayfa Adedi	:	**44**

ABSTRACT

POSITIVE OPERATORS ON RIESZ SPACES

Master of Science Thesis

Hüseyin BAHADIR

Ahi Evran University
Institute of Science
July 2017

This thesis consisted of five parts. The first part was about introduction.

In the second part, vector space, ordered vector space, Banach space and some basic concepts about operators in Riesz space were given.

In the third part, Riesz space concept was examined in detail. Some important definitions and theorems related to positive operators in Riesz space were explained. Additionally, Dedekind complete Riesz space and Archimedean Riesz space were mentioned, and information about conclusions of them were examined in detail.

In the fourth part, concepts of band preserving operators and orthomorphisms were discussed after f-algebras and their properties. Relationships between f-algebras and orthomorphism were given. Moreover, central operators, which is subset of orthomorphism, and conjugate of central operators were stated.

In the fifth and last part, conclusions were interpreted.

Keywords : Banach lattice, operator, lattice, center, orthormorphisms

Supervisors : Yrd. Doç. Dr. Şebnem YILDIZ

Number of Pages : **44**

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezimde çalışmalarım boyunca beni engin tecrübeleri ile yönlendiren araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Şebnem YILDIZ' a teşekkürü bir borç bilirim.

Maddi ve manevi destekleri ile hayatımın her anında yanımda olan annem, babam ve yüksek lisans eğitimine başlamama vesile olan değerli eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hüseyin BAHADIR

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

TEZ BİLDİRİMİ i
ÖZET ii
ABSTRACT iii
TEŞEKKÜR iv
SİMGELER VE KISALTMALAR vi
1 GİRİŞ 1
2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER 2
2.1 Vektör Uzayı ve Sıralama 2
2.2 Banach Uzayı 5
2.3 Operatör ve Lineer Fonksiyoneller 7
3 RIESZ UZAYINDA POZİTİF OPERATÖRLER 9
3.1 Riesz Uzayı 9
3.2 Riesz Uzaylarında Tanımlı Operatörler 19
3.3 Riesz Uzaylarında İdeal ve Band Kavramları 25
4 f-CEBİRLERİ VE ORTHOMORFİZMALAR 29
4.1 f-Cebirleri ve Özellikleri 29
4.2 Orthomorfizmalar 31
4.3 Merkezcil Operatör 37
5 SONUÇLAR 42
KAYNAKLAR 43
ÖZGEÇMİŞ 44

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}^2$: İki boyutlu reel uzay

$\mathbf{K}$: $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\in$: Elemanıdır

$\notin$: Elemanı değildir

$\forall$: Her

$\emptyset$: Boş küme

$<$: Küçüktür

$>$: Büyüktür

$\leq$: Küçük eşittir

$\geq$: Büyük eşittir

$\sum$: Toplam sembolü

A^{d} : A kümesinin ayrık tümleyeni

l_∞ : Sınırlı dizi uzayı

c : Yakınsak dizi uzayı

c_0 : Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı

$[x, y]$: Sıra aralık

$x \perp y$: Birbirine dik elemanlar

$x \vee y$: x ve y nin supremumu

$x \wedge y$: x ve y nin infimumu

x^+ : x in pozitif kısmı

x^- : x in negatif kısmı

$|x|$: x in modülü

$|T|$: T in modülü (mutlak değeri)

T' : T operatörünün adjointi (eşleniği)

$\langle T, T' \rangle$: Dual sistem

$||x||$: x in normu

$x_n \uparrow x$: x_n yukarı yönlendirilmiştir ve supremumu x dir

$x_n \downarrow x$: x_n aşağıya yönlendirilmiştir ve infimumu x dir

$E^\sim$: E nin sıra duali

E^* : E nin cebirsel duali

E^+ : E nin pozitif konisi

E_u : u ile üretilen ideal

B_x : x tarafından üretilen band

$\mathrm{E} \bigoplus \mathrm{F}$	: E ile F nin direkt toplamı
$\mathrm{L(E, F)}$	: Operatörlerin vektör uzayı
$\mathrm{L_b(E, F)}$	: Sıra sınırlı operatörlerin uzayı
$\mathrm{L_r(E, F)}$	: Regüler operatörlerin vektör uzayı
I	: Birim operatör
$\mathrm{Orth(E)}$	: E üzerinde tanımlı orthomorfizmalar
$\mathrm{Orth(E)_+}$	: E üzerinde tanımlı pozitif orthomorfizmalar
supA	: A kümesinin supremumu
infA	: A kümesinin infimumu
$\mathrm{Z(E)}$	: E nin merkezi
$\mathrm{Z(E')}$	: E nin dualinin merkezi

1 GİRİŞ

Riesz uzayları konusunda ilk yapılan çalışma 1928 yılında F. Riesz'in Bologna da düzenlenen Uluslararası Matematikçiler Kongresinde lineer fonksiyonellerin ayrışımı üzerine sunduğu makale olarak kabul edilir. Daha sonra Riesz uzay teorisi 1930 yılının ortalarında F. Riesz, H. Freudenthal ve L.V.Kantorovich tarafından geliştirildi. Bu tarihten sonra bu alanda gelişmeler artmaya başlamış, 1950'li yılların ortalarına kadar bu alanda matematikçiler önemli katkılar yapmışlardır. 1980 yıllarına gelindiğinde pozitif operatörler teorisi oldukça geniş bir hal almıştır. Bu tarihten sonra Riesz uzay teorisi, değişik yönleriyle incelenmiş olup finans, oyun terisi, genel denge teorisi, nükleer reaktör teorisi, istatistiki karar alma ve ekonomi alanlarında önemli katkılar sağlamıştır.

Bu çalışmamızda gerekli temel tanım ve teoremler verildikten sonra Riesz uzayında pozitif operatörler ifade edilmiştir. Riesz uzay kavramına ayrıntılı bir şekilde yer verilerek birçok önemli teoremlerin ispatı verilmiştir. f-cebirleri ile orthomorfizmalar arasındaki ilişkiler üzerinde durulmuştur. Aynı zamanda band koruyan operatörler kümesi olan B(E) nin orthomorfizmalar sınıfına dahil olduğundan ve orthomorfizmalar ile orthomorfizmaların bir alt kümesi olan merkezcil operatörlerden bahsedilmiştir.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Vektör Uzayı ve Sıralama

Tanım 2.1.1 $\mathbf{K}$ boş olmayan bir küme olsun. $\mathbf{K}$ üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ işlemleri tanımlayalım.

(i) $\forall\ x, y \in \mathbf{K}$ için $x + y \in \mathbf{K}$ ve $xy \in \mathbf{K}$ dır. ($\mathbf{K}$ nın toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalılık özelliği)

(ii) $\forall\ x, y \in \mathbf{K}$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Birleşme özelliği)

(iii) K içersinde bir tek sıfır elemenı bulunabilir ki $\forall\ x \in \mathbf{K}$ için $x + 0 = 0 + x = x$ dir (0, K nın birimi).

(iv) $\forall\ x, y \in \mathbf{K}$ için bir tek $-x \in \mathbf{K}$ bulunabilir ki $x + (-x) = 0$ dır.

(v) $\forall\ x, y \in \mathbf{K}$ için $x + y = y + x$ dir. (Değişme özelliği)

(vi) $\forall\ x, y \in \mathbf{K}$ için $xy = yx$ dir. (Değişme özelliği)

(vii) $\forall\ x, y, z \in \mathbf{K}$ için $x(yz) = (xy)z$ dir. (Birleşme özelliği)

(viii) $\forall\ x \in \mathbf{K}$ için $x \cdot 1 = x$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{K}$ nın bir tek $0 \neq 1$ (bir) elemanı vardır.

(ix) $\forall\ 0 \neq x \in \mathbf{K}$ ya karşılık $xx^{-1} = 1$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{K}$ içinde bir tek x^{-1} elemanı vardır.

(x) $\forall\ x, y, z \in \mathbf{K}$ için $x(y + z) = xy + xz$, $(y + z)x = yx + zx$ dir. (Çarpmanın toplama üzerinde dağılma özelliği)

Bu özellikleri sağlayan $\mathbf{K}$ kümesine bir **cisim** ve elemanlarına **skaler** denir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi yukarıdaki özellikleri sağladığından birer cisimdir **(Gök, 1997)**.

Tanım 2.1.2 E boş olmayan bir küme ve $\mathbf{K}$ cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun. $x, y \in E$ için

$$+ : E \times E \to E\ ,\ (x, y) \to x + y$$
$$\cdot\ : \mathbf{K} \times E \to E\ , (a, x) \to ax$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri tanımlansın.

(i) $\forall\ x, y, z \in E$ için

$x + (y + z) = (x + y) + z$ (Toplamada birleşme özelliği)

(ii)$\forall\ x, y \in E$ için

$x + y = y + x$ (Toplamada değişme özelliği)

(iii) $\forall\ x \in E$ için

$$x + 0 = x = 0 + x$$

eşitliğini sağlayan E içinde bir tek 0 (sıfır) elemanı vardır. (Burada 0 elemanı etkisiz elemandır.)

(iv) $\forall\ x \in E$ için

$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in E$ vardır. ($-x$ toplamada ters elemandır.)

(v) $\forall\ x \in E$ için

$$1 \cdot x = x$$

dir. (1 çarpmada birim ya da etkisiz elemandır.)

(vi) $\forall\ x, y \in E$ ve $a \in \mathbf{K}$ için

$$a(x + y) = ax + ay.$$

(vii) $\forall\ x \in E$ ve $\forall\ a, b \in \mathbf{K}$ için

$$a(bx) = (ab)x.$$

(viii) $\forall\ x \in E$ ve $\forall\ a, b \in \mathbf{K}$ için

$$(a + b)x = ax + bx$$

koşulları sağlanıyorsa E ye $\mathbf{K}$ üzerinde bir **vektör uzayı** (**lineer uzay**) denir. $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ alınırsa E ye bir **reel vektör uzayı** ve $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ alınırsa E ye bir **kompleks vektör uzayı** denir **(Gök, 1997)**.

Örnek 2.1.3 Reel sayılar kümesi ve kompleks sayılar kümesi bildiğimiz toplama ve çarpma işlemine göre vektör uzaylarıdır **(Gök, 1997)**.

Örnek 2.1.4 $E = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ olsun.
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ve $x, y \in E$ için toplama işlemini şu şekilde tanımlayalım:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

$a \in \mathbb{R}$ ile $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ vektörünün çarpımını da şu şekilde tanımlayalım:

$$a \cdot x = (ax_1, \ldots, ax_n).$$

Bu toplama ve çarpma tanımları ile $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır **(Gök, 1997)**.

Örnek 2.1.5 $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ cismi ve X boş olmayan bir küme olsun. X kümesinden $\mathbf{K}$ kümesine tanımlı tüm fonksiyonların kümesi E olsun. Yani, $E = \{f | f : X \to \mathbf{K}\}$ dır.

$f, g \in E$ fonksiyonları ve $x \in X$ elemanı için $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ toplamı tanmlansın.

$a \in \mathbf{K}$ skaleri ve $f \in E$ fonksiyonu için $(af)(x) = af(x)$ çarpımı tanımlansın.
Bu toplama ve çarpma işlemlerinin tanımları ile E bir vektör uzayıdır **(Gök, 1997)**.

Tanım 2.1.6 E bir vektör uzayı ve F, E nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer F kümesi

(i) $\forall$ $x, y \in F$ için $x + y \in F$

(ii) $\forall$ $x \in F, a \in \mathbf{K}$ için $ax \in F$

özelliklerini sağlıyarsa, F kümesi (aynı cisim üzerinde) bir vektör uzayıdır ve F ye E nin **vektör alt uzayı** ya da **lineer alt uzayı** denir **(Gök, 1997)**.

Tanım 2.1.7 Boştan farklı bir küme üzerinde yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa β bağıntısına bu küme üzerinde **sıralama bağıntısı** denir. Boştan farklı bir E kümesi üzerinde $\leq$ sıralama bağıntısı $\forall$ $x, y, z \in E$ için

(i) $x \leq x$ (yansıma)

(ii) $x \leq y$ ve $y \leq x$ iken $x = y$ (ters simetri)

(iii) $x \leq y$ ve $y \leq z$ iken $x \leq z$ (geçişme)

özelliklerini sağlıyorsa E ye **kısmi sıralı küme** denir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 2.1.8 Herhangi $x, y \in E$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ oluyorsa E ye **tam sıralı küme** denir **(Abramovich ve Aliprantis 2002)**.

Tanım 2.1.9 E, bir reel vektör uzayı ve $\leq$ E üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun. $\forall$ $x, y, z \in E$ ve $\alpha \geq 0$ reel sayısı için,

(i) $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$

(ii) $x \leq y$ iken $\alpha x \leq \alpha y$

özellikleri sağlanıyorsa E ye **sıralı vektör uzayı** denir ve **L(E)** ile gösterilir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 2.1.10 A kümesi E sıralı kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

(i) $\forall$ $x \in A$ için $x \leq a$ olacak şekilde bir $a \in E$ varsa, a ya A kümesinin bir **üst sınırı** denir. A kümesi bir üst sınıra sahipse A kümesine **üstten sınırlı küme** denir.

(ii) a, A kümesinin bir üst sınırı ve A kümesinin her u üst sınırı için $a \leq u$ oluyorsa a ya A kümesinin **en küçük üst sınırı (supremumu)** denir ve $\sup(A) = a$ şeklinde gösterilir.

(iii) $\forall$ $x \in A$ için $b \leq x$ olacak şekilde bir $b \in E$ varsa, b ye A kümesinin bir **alt sınırı** denir. A kümesi bir alt sınıra sahipse A kümesine **alttan sınırlı küme** denir.

(iv) b, A kümesinin bir alt sınırı ve A kümesinin her v alt sınırı için $v \leq b$ oluyorsa b ye A kümesinin **en büyük alt sınırı (infimumu)** denir ve $\inf(A) = b$ şeklinde gösterilir.

(v) A sıralı bir küme ve $x \leq y$ olacak şekilde $x, y \in A$ olsun.

$$[x, y] = \{z \in A : x \leq z \leq y\}$$

kümesine x ve y arasında **sıralı aralık** denir.

(vi) A kümesi üstten ve alttan sınırlı küme ise A kümesine **sıra sınırlı küme** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

2.2 Banach Uzayı

Tanım 2.2.1 E bir **K** cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $||.|| : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{x} \to ||\mathrm{x}||$, tanımlı dönüşümü için

(i) $\forall$ x $\in$ E için $||\mathrm{x}|| \geq 0$

(ii) $\forall$ x $\in$ E için $||\mathrm{x}|| = 0$ gerek ve yeter koşul $\mathrm{x} = 0$

(iii) $\forall$ x $\in$ E ve $\alpha \in \mathbf{K}$ için $||\alpha \mathrm{x}|| = |\alpha|.||\mathrm{x}||$

(iv) $\forall$ $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{E}$ için $||\mathrm{x}+\mathrm{y}|| \leq ||\mathrm{x}|| + \|\mathrm{y}\|$ (üçgen eşitsizliği)

özellikleri sağlanıyorsa E üzerinde bir **norm** denir. Bu durumda $(\mathrm{E}, ||.||)$ çiftine **normlu vektör uzay** denir. Üzerinde norm tanımlanmış bir uzaya **normlu bir uzay** denir **(Gök, 1997)**.

Örnek 2.2.2 $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ olsun. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ için $||\mathrm{x}|| = |\mathrm{x}|$ tanımı ile $||.||$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir norm belirtir **(Gök, 1997)**.

Örnek 2.2.3 $\mathrm{E} = \mathbb{C}$ olsun. $\mathrm{x} \in \mathbb{C}$ için $||\mathrm{x}|| = |\mathrm{x}|$ tanımı ile $||.||$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir norm belirtir **(Gök, 1997)**.

Tanım 2.2.4 $(\mathrm{E}, ||.||)$ normlu bir uzay olsun. $\mathrm{f} : \mathbb{N} \to \mathrm{E}$ tanımlı fonksiyonuna E de bir **dizi** denir ve $(\mathrm{f}(n)) = (\mathrm{x}_n)$ ile gösterilir **(Gök, 1997)**.

Tanım 2.2.5 (x_n) için $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{x}_n = 0$ ise bu diziye **sıfır dizisi** denir. Bütün sıfır dizilerinin kümesini c_0 ile gösterelim.

$$\mathrm{c}_0 = \{(\mathrm{x}_n) : \lim_{n\to\infty} \mathrm{x}_n = 0\}$$

dır **(Gök, 1997)**.

Tanım 2.2.6 $(\mathrm{E}, ||.||)$ normlu bir uzay ve $(\mathrm{x}_n), \mathrm{E}$ de bir dizi olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $n \geq n_0$ olduğunda $||\mathrm{x}_n - \mathrm{x}|| < \varepsilon$ sağlanıyorsa $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{x}_n = \mathrm{x}$, $\mathrm{x} \in \mathrm{E}$ dir. Bunu sağlayan bir diziye **yakınsak dizi** denir **(Gök, 1997)**.

Tanım 2.2.7 $(\mathrm{E}, ||.||)$ normlu bir uzay ve $(\mathrm{x}_n), \mathrm{E}$ de bir dizi olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için bir n_0 bulunduğunda $\forall\ n, m \geq n_0$ için $||\mathrm{x}_n - \mathrm{x}_m|| < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine E de bir **Cauchy dizisi** denir **(Gök, 1997)**.

Tanım 2.2.8 E deki her Cauchy dizisi E deki norma göre yakınsak yani normlu uzay tam ise E uzayına bir **Banach uzayı(Tam uzay)** denir **(Gök, 1997)**.

Örnek 2.2.9 $1 \leq p < \infty$ için l_p uzayı bir Banach uzayıdır. l_p uzayının Banach uzayı olduğunu gösterelim.

$(\mathrm{x}_n), l_p$ de bir Cauchy dizisi olsun. Yani $(\mathrm{x}_n) = (\mathrm{y}_{jn})_{j\geq 1}$ $, (n = 1, 2, \ldots), \varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda n_0 sayısı bulunabilir ki $n, m \geq n_0$ için

$$||\mathrm{x}_n - \mathrm{x}_m|| < \varepsilon$$

sağlanır. O halde $n, m \geq n_0$ için

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mathrm{y}_{jm} - \mathrm{y}_{jn}|^p < \varepsilon^p$$

olur. Dolayısıyla $\forall\ k > 0$ için

$$|\mathrm{y}_{km} - \mathrm{y}_{kn}|^p \leq \sum_j |\mathrm{y}_{jm} - \mathrm{y}_{jn}|^p < \varepsilon^p$$

olur. $(\mathrm{y}_{kn})_n$ reel sayılarda bir Cauchy dizisi olduğundan yakınsar, yani

$$\lim_n \mathrm{y}_{kn} = \mathrm{y}_k \in \mathbb{R}, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

olsun. Serinin kısmi toplamlar dizisini düşünelim. Bunun için keyfi bir $0 < K$ sayısı için

$$\sum_{j=1}^{K} |\mathrm{y}_{jm} - \mathrm{y}_{jn}|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mathrm{y}_{jm} - \mathrm{y}_{jn}|^p < \varepsilon^p$$

yazalım. $\forall\ n \geq n_0$ için

$$\sum_{j=1}^{K} |\mathrm{y}_{jm} - \mathrm{y}_{jn}|^p = \sum_{j}^{K} |\mathrm{y}_{jm} - \mathrm{y}_{jn}|^p \leq \varepsilon^p$$

olur. $0 < K$ keyfi olduğundan her $n \geq n_0$ için $\sum_j |\mathrm{y}_j - \mathrm{y}_{jn}|^p$ serisi yakınsar. O halde $\forall\ n \geq n_0$ için

$$\sum_{j}^{\infty} |\mathrm{y}_j - \mathrm{y}_{jn}|^p \leq \varepsilon^p$$

olduğundan $(\mathrm{y}_j - \mathrm{y}_{jn_0}) \in l_p$, $(j = 1, 2, \ldots)$ elde edilir. $(\mathrm{y}_{jn_0}) \in l_p$, $(j = 1, 2, \ldots)$ ve l_p bir vektör uzayı olduğundan $(\mathrm{y}_j) = (\mathrm{y}_j - \mathrm{y}_{jn_0}) + (\mathrm{y}_{jn_0}) \in l_p$ olur. $\mathrm{x} = (\mathrm{y}_j)$ ve $n \geq n_0$ için

$$||\mathrm{x}_n - \mathrm{x}|| = \left[\sum_j |\mathrm{y}_{jn} - \mathrm{y}_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

olduğundan $\lim_n \mathrm{x}_n = \mathrm{x}$ elde edilir. Böylece l_p uzayı bir Banach uzayıdır **(Gök, 1997)**.

Tanım 2.2.10 E bir kısmi sıralı küme olsun. E kümesinin boş olmayan her alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa E kümesine **tamdır** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 2.2.11 E bir kısmi sıralı küme olsun. E kümesinin iki elemanlı her alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa E ye **latis (örgü)** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Örnek 2.2.12 $\mathbb{R}$ sıralama bağıntısına göre latistir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Örnek 2.2.13 M boştan farklı bir küme ve E= P(M) olsun. E deki sıralama bağıntısı $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{E}$ olmak üzere $\mathrm{A} \leq \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ şeklinde tanımlansın. Bu sıralama bağıntısına göre E kısmi sıralı bir kümedir.

Ayrıca A ve B kümesinin supremumu $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ ve infimumu $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ olduğundan E kümesi bir latistir. Benzer olarak I bir indis kümesi olmak üzere $\sup\{\mathrm{A}_\alpha, \alpha \in \mathrm{I}\} = \bigcup\limits_{\alpha} \mathrm{A}_\alpha$ ve $\inf\{\mathrm{A}_\alpha, \alpha \in \mathrm{I}\} = \bigcap\limits_{\alpha} \mathrm{A}_\alpha$ olduğundan E latisi tamdır **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

2.3 Operatör ve Lineer Fonksiyoneller

Tanım 2.3.1 X, Y vektör uzayı olmak üzere, bir $\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ fonksiyonu $\forall\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ ve $\forall\ \mathrm{a}, \mathrm{b}$ skalerleri için

$$\mathrm{T}(\mathrm{ax} + \mathrm{by}) = \mathrm{aT}(\mathrm{x}) + \mathrm{bT}(\mathrm{y})$$

koşulunu sağlıyorsa **lineer operatör** veya **operatör** olarak adlandırılır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 2.3.2 X ve Y normlu uzaylar ve $\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ operatörü bir lineer operatör olsun. T nin normu,

$$\|\mathrm{T}\| = \sup_{||\mathrm{x}|| \leq 1} \|\mathrm{Tx}\| = \sup_{||\mathrm{x}|| = 1} \|\mathrm{Tx}\|$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\|\mathrm{T}\| < \infty$ ise T ye **sınırlı operatör** denir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 2.3.3 E ve F sıralı vektör uzayları arasında tanımlanan bir $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ operatörü $\forall\ \mathrm{x} \geq 0$ için $\mathrm{T}(\mathrm{x}) \geq 0$ eşitsizliğini sağlıyorsa T ye **pozitif operatör** denir ve $\mathrm{T} \geq 0$ ile gösterilir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 2.3.4 Hem pozitiflik hem de lineerlik özelliğini sağlayan operatöre kısaca **lineer pozitif operatör** denir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 2.3.5 E sıralı bir vektör uzayı olmak üzere, E nin bütün pozitif elemanlarının kümesi E^+ ile gösterilir. Yani, $\mathrm{E}^+ = \{\mathrm{x} \in \mathrm{E} : \mathrm{x} \geq 0\}$ dır ve **E nin pozitif konisi** denir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 2.3.6 E, F normlu uzaylar ve $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ lineer sınırlı bir operatör olsun.
$\mathrm{T}' : \mathrm{F}' \to \mathrm{E}', \mathrm{g} \in \mathrm{F}'$ için $\mathrm{T}'\mathrm{g} = \mathrm{gT}$ şeklinde tanımlanırsa T' operatörüne **T operatörünün eşleniği (adjointi)** denir. Burada E' ve F' sırasıyla E ve F nin eşlenik uzaylarıdır. **(Gök, 1997)**.

Tanım 2.3.7 E bir vektör uzayı ve **K** reel ya da kompleks cisim olsun. $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathbf{K}$ lineer operatörüne **lineer fonksiyonel** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 2.3.8 E bir sıralı vektör uzayı olmak üzere $T : E \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli $\forall\ x \in E^+$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa T ye **pozitif lineer fonksiyonel** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 2.3.9 T lineer fonksiyoneli E nin sıra sınırlı alt kümelerini $\mathbb{R}$ nin sıra sınırlı alt kümelerine götürüyorsa T ye **sıra sınırlı lineer fonksiyonel** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 2.3.10 E normlu bir vektör uzayı olsun. E de tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına E nin **dual uzayı** denir **(Gök, 1997)**.

3 RIESZ UZAYINDA POZİTİF OPERATÖRLER

Bu bölümde Riesz uzayında pozitif operatörlerden bahsedilecektir.

3.1 Riesz Uzayı

Tanım 3.1.1 E , bir sıralı vektör uzayı olsun. $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{E}$ için $\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}$ kümesinin supremumu ve infimumu yine E nin elemanı ise E ye bir **Riesz uzayı (vektör latis)** denir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.1.2 E sıralı bir vektör uzayı ve E nin herhangi iki elemanı x, y olsun. Eğer,

(i) $\mathrm{x} \leq \mathrm{z}$ ve $\mathrm{y} \leq \mathrm{z}$

(ii) $\forall\, \mathrm{s} \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{x} \leq \mathrm{s}$, $\mathrm{y} \leq \mathrm{s}$ iken $\mathrm{z} \leq \mathrm{s}$

koşullarını sağlayan E nin bir z elemanı varsa buna x ve y nin **supremumu(en küçük üst sınır)** denir ve

$$\mathrm{x} \vee \mathrm{y} = \sup\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}$$

şeklinde ifade edilir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 3.1.3 E sıralı bir vektör uzayı ve E nin herhangi iki elemanı x, y olsun. Eğer,

(i) $\mathrm{z} \leq \mathrm{x}$ ve $\mathrm{z} \leq \mathrm{y}$

(ii) $\forall\, \mathrm{s} \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{s} \leq \mathrm{x}$, $\mathrm{s} \leq \mathrm{y}$ iken $\mathrm{s} \leq \mathrm{z}$

koşullarını sağlayan E nin bir z elemanı varsa buna x ve y nin **infimumu(en büyük alt sınır)** denir ve

$$\mathrm{x} \wedge \mathrm{y} = \inf\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}$$

şeklinde ifade edilir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Örnek 3.1.4 $B(X)$, boştan farklı herhangi bir X kümesi üzerindeki tüm sınırlı reel değerli fonksiyonların kümesi olsun. $B(X)$,

$$(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{x})$$
$$(\alpha \mathrm{f})(\mathrm{x}) = \alpha \mathrm{f}(\mathrm{x})\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

işlemlerine göre bir reel vektör uzayıdır. $B(X)$ in pozitif konisi

$$B(X)_{+} = \{\mathrm{f} \in B(X) : \mathrm{f}(\mathrm{t}) \geq 0, \quad \mathrm{t} \in X\}$$

şeklindedir. $\mathrm{f} \geq \mathrm{g}$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{f} - \mathrm{g} \in B(X)_{+}$ olmasıdır. $\forall\, \mathrm{t} \in X$ ve $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in B(X)$ için

$$(\mathrm{f} \ \vee\ \mathrm{g})(\mathrm{t}) = \sup\{\mathrm{f}(\mathrm{t}),\ \mathrm{g}(\mathrm{t})\} = \max\{\mathrm{f}(\mathrm{t}),\ \mathrm{g}(\mathrm{t})\}$$
$$(\mathrm{f} \ \wedge\ \mathrm{g})(\mathrm{t}) = \inf\{\mathrm{f}(\mathrm{t}),\ \mathrm{g}(\mathrm{t})\} = \min\{\mathrm{f}(\mathrm{t}),\ \mathrm{g}(\mathrm{t})\}$$

dır. Bundan dolayı $B(X)$ bir Riesz uzayıdır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Örnek 3.1.5 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)$ şeklindeki reel sayı n-li terimlerinin toplama ve çarpmaya göre bir reel vektör uzayı olsun. $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_n)$ olmak üzere eğer $\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$ ifadesi $1 \leq k \leq n$ için $\mathrm{x}_k \leq \mathrm{y}_k$ olacak şekilde tanımlanırsa $\mathbb{R}^n$, buradaki kısmi sıralamaya göre bir Riesz uzayıdır.Burada x ve y gibi iki vektörün supremumu ve infimumu sırasıyla

$$\mathrm{x} \vee \mathrm{y} = \big(\max\{\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1\}, \dots, \max\{\mathrm{x}_n, \mathrm{y}_n\}\big)$$

ve

$$\mathrm{x} \wedge \mathrm{y} = \big(\min\{\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1\}, \dots, \min\{\mathrm{x}_n, \mathrm{y}_n\}\big)$$

ile verilir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Örnek 3.1.6 Reel dizilerin oluşturduğu

$$\ell_\mathrm{p} = \left\{(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ \cdots\ , \mathrm{x}_n, \cdots),\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathrm{x}_n \in \mathbb{R}\ \ \text{ve}\ \sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{x}_n|^\mathrm{p} < \infty\right\},\ (1 \leq \mathrm{p} \leq \infty)$$

ℓ_p uzayı Riesz uzayında önemli bir sınıftır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Genel olarak aksi söylenmedikçe E bir Riesz uzayını gösterecektir.

Tanım 3.1.7 Bir E Riesz uzayında $\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{E}$ için, x in pozitif kısmı, negatif kısmı ve mutlak değeri sırasıyla

$$\mathrm{x}^+ = \mathrm{x} \vee 0$$

$$\mathrm{x}^- = (-\mathrm{x}) \vee 0$$

$$|\mathrm{x}| = \mathrm{x} \vee\ (-\mathrm{x})$$

şeklinde tanımlanır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Teorem 3.1.8 Riesz uzayında $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ keyfi elemanları için aşağıdaki özellikler vardır.

(i) $\mathrm{x} \vee \mathrm{y} = -[(-\mathrm{x}) \wedge (-\mathrm{y})]$ ve $\mathrm{x} \wedge \mathrm{y} = -[(-\mathrm{x}) \vee (-\mathrm{y})]$

(ii) $\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{x} \wedge \mathrm{y} + \mathrm{x} \vee \mathrm{y}$

(iii) $\mathrm{x} + (\mathrm{y} \vee \mathrm{z}) = (\mathrm{x} + \mathrm{y}) \vee (\mathrm{x} + \mathrm{z})$ ve $\mathrm{x} + (\mathrm{y} \wedge \mathrm{z}) = (\mathrm{x} + \mathrm{y}) \wedge (\mathrm{x} + \mathrm{z})$

(iv) $\alpha(\mathrm{x} \vee \mathrm{y}) = (\alpha\mathrm{x}) \vee (\alpha\mathrm{y})$ ve $\alpha(\mathrm{x} \wedge \mathrm{y}) = (\alpha\mathrm{x}) \wedge (\alpha\mathrm{y})$, $\alpha \geq 0$ **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. (i) $\mathrm{x} \leq \mathrm{x} \vee \mathrm{y}$ ve $\mathrm{y} \leq \mathrm{x} \vee \mathrm{y}$ olmak üzere buradan

$$-(\mathrm{x} \vee \mathrm{y}) \leq -\mathrm{x}$$

$$-(\mathrm{x} \vee \mathrm{y}) \leq -\mathrm{y}$$

ve

$$-(\mathrm{x} \vee \mathrm{y}) \leq (-\mathrm{x}) \wedge (-\mathrm{y})$$

olur.

Diğer taraftan

$-x \geq z$ ve $-y \geq z$ iken

$-z \geq x$ ve $-z \geq y$ dır. Bundan dolayı $-z \geq x \vee y$ olur.

Bu da

$-(x \vee y) \geq z$, $-(x \vee\ y)$ nin $\{-x, -y\}$ kümesinin infimumu olduğunu gösterir yani $(-x) \wedge (-y) = -(x \vee y)$ elde edilir.

Diğer eşitlik için x yerine $-x$, y yerine $-y$ alınarak ispat yapılabilir.

(ii) $(x \wedge y) \leq y$ den $y - x \wedge y \geq 0$ yazılır. Buradan

$x \leq x + y - x \wedge y$ ve $y \leq x + y - x \wedge y$

elde edilir. Sonuç olarak $x \vee y \leq x + y - x \wedge y$ ve $x \wedge y + x \vee y \leq x + y$ olur.

$y \leq x \vee y$ olduğundan

$x + y - x \vee y \leq x$ ve $x + y - x \vee y \leq y$ olur. Dolayısıyla

$x + y - x \vee y \leq x \wedge y$ dir. Böylece

$x + y \leq x \wedge y + x \vee y$

elde edilir.

(iii) Açık olarak $x + y \leq x + y \vee z$ ve $x + z \leq x + y \vee z$ dır. Buradan

$(x + y) \vee (x + z) \leq x + y \vee z$ olur. Diğer taraftan

$y = -x + (x + y) \leq -x + (x + y) \vee (x + z)$ ve $z \leq -x + (x + y) \vee (x + z)$ eşitsizliklerinden

$y \vee z \leq -x + (x + y) \vee (x + z)$ bulunur. Buradan

$x + y \vee z \leq (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$

elde edilir.

Diğer eşitlik de benzer şekilde ispatlanır.

(iv) $\alpha > 0$ için

$(\alpha x) \vee (\alpha y) \leq \alpha(x \vee y)$

$\alpha x \leq z$ ve $\alpha y \leq z$ dır.

Buradan

$x \leq \alpha^{-1} z$ ve $y \leq \alpha^{-1} z$ yazılabilir ve $x \vee y \leq \alpha^{-1} z$ dır.

Dolayısıyla $\alpha(x \vee y) \leq z$ bulunur.

$\alpha(x \vee y)$, $\{\alpha x, \alpha y\}$ kümesinin supremumudur.

Bu nedenle

$(\alpha x) \vee (\alpha y) = \alpha(x \vee y)$

elde edilir.

Diğeri de benzer şekilde ispatlanır. ■

Sonuç olarak A, en küçük üst sınıra sahip ve bir Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda;

(a) $-A := \{-a : a \in A\}$ kümesinin infimumu vardır ve

$\inf(-A) = -\sup A$ dır.

(b) $\forall$ x vektörü için $x + A = \{x + a : a \in A\}$ kümesinin supremumu vardır ve

$\sup(x + A) = x + \sup A$ dır.

(c) $\forall\ \alpha \geq 0$ için $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$ kümesinin supremumu vardır ve

$\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$ dır.

Teorem 3.1.9 x bir Riesz uzayının elemanı olmak üzere;

(i) $x = x^+ - x^-$

(ii) $|x| = x^+ + x^-$

(iii) $x^+ \wedge x^- = 0$

şeklindedir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat.

(i) Teorem 3.1.8 (i),(ii) deki verilen eşitliklerden ve x in negatif kısmı ile pozitif kısmı tanımından yararlanılarak

$$\begin{aligned} x &= x + 0 \\ &= x \vee 0 + x \wedge 0 \\ &= x \vee 0 - (-x) \vee 0 \\ &= x^+ - x^- \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) x in mutlak kısmının tanımından, $|x| = x \vee (-x)$ olduğu Tanım 3.1.7 de ifade edildi. Şimdi $-x + [(2x) \vee 0]$ ifadesinden yararlanılarak $x \vee (-x)$ elde etmeye çalışalım.

$-x + [(2x) \vee 0]$ ifadesinde Teorem 3.1.8 (iii) deki verilen eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned} -x + [(2x) \vee 0] &= (-x + 2x) \vee (-x + 0) \\ &= x \vee (-x) \\ &= |x| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} |x| &= x \vee (-x) \\ &= -x + [(2x) \vee 0] \\ &= [(2x) \vee 0] - x \\ &= 2(x \vee 0) - x \end{aligned}$$

yazılabilir. Tanım 3.1.7 de verilen x in pozitif kısmının eşiti olan $x^+ = x \vee 0$ ve Teorem 3.1.9 daki (i) de verilen $x = x^+ - x^-$ eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} |x| &= 2(x \vee 0) - x \\ &= 2x^+ - (x^+ - x^-) \\ &= 2x^+ - x^+ + x^- \\ &= x^+ + x^- \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece eşitlik ispatlanır.

(iii) $x^- + [(x^+ - x^-) \wedge 0]$ ifadesinden yararlanılarak $(x^+ \wedge x^-)$ ifadesini elde etmeye çalışalım.

Teorem 3.1.8 deki (iii) deki eşitlik kullanılarak

$$x^- + [(x^+ - x^-) \wedge 0] = (x^- + x^+ - x^-) \wedge (x^- + 0)$$
$$= x^+ \wedge x^-$$

elde edilir. Böylece

$x^+ \wedge x^- = x^- + [(x^+ - x^-) \wedge 0]$ eşitliğinde (i) de verilen $(x^+ - x^-) = x$ kullanılarak

$$x^+ \wedge x^- = x^- + (x \wedge 0)$$

bulunur. Buradan da Teorem 3.1.8 deki (i) de $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$ eşitliğinden yararlanılarak

$$x^+ \wedge x^- = -[(-x) \vee 0] + x^-$$

yazılabilir. Buradan da Tanım 3.1.7 de verilen x in negatif kısmının eşiti olan $x^- = (-x) \vee 0$ kullanılarak

$$\begin{aligned} x^+ \wedge x^- &= -[(-x) \vee 0] + x^- \\ &= -x^- + x^- \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.1.10 Riesz uzayında x ve y keyfi elemanları için;

(i) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ ve $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

(ii) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$

(iii) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$

(iv) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}\big||x + y| - |x - y|\big|$ **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat.

(i) Tanım 3.1.7 de x in mutlak kısmının tanımı $|x| = x \vee (-x)$ olarak verilmişti. Bundan yararlanılarak

$$|x - y| = (x - y) \vee (-x + y)$$

yazılabilir. Bu eşitlik aşağıda yerine yazılarak

$$x + y + |x - y| = x + y + [(x - y) \vee (y - x)]$$

bulunur. Buradan da Teorem 3.1.8 deki (iii) de verilen

$$x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$$

eşitliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} x + y + |x - y| &= x + y + [(x - y) \vee (y - x)] \\ &= (x + y + x - y) \vee (x + y + y - x) \\ &= 2x \vee 2y \\ &= 2(x \vee y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer olarak

$$x + y - |x - y| = x + y - [(x - y) \vee (-x + y)]$$

eşitliğinde de Teorem 3.1.8 (i) den

$$(x - y) \vee (-x + y) = -[(-x + y) \wedge (x - y)]$$

yazılabilir. Bu da yerine yazılarak

$$\begin{aligned} x + y - |x - y| &= x + y - [-(-x + y) \wedge (x - y)] \\ &= x + y + [(y - x) \wedge (x - y)] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da Teorem 3.1.8 deki (iii) de verilen

$$x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$$

eşitliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} x + y - |x - y| &= (x + y + y - x) \wedge (x + y + x - y) \\ &= 2y \wedge 2x \\ &= 2(y \wedge x) \\ &= 2(x \wedge y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) $|x-y| = x \vee y - x \wedge y$ eşitliğinin elde edilebilmesi için (i) deki verilen eşitliklerin taraf tarafa çıkartılması yeterlidir.

(iii) Tanım 3.1.7 de x in mutlak kısmının tanımı $|x| = x \vee (-x)$ olarak verilmişti. Bundan yararlanılarak

$$|x + y| = (x + y) \vee (-x - y)$$

elde edilir. Bu da eşitlikte yerine yazılarak

$|x + y| + |x - y| = (x + y) \vee (-x - y) + |x - y|$ bulunur. Buradan da Teorem 3.1.8 deki (iii) de verilen

$$x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$$

eşitliğinden yararlanılarak,

$$|x - y| + (x + y) \vee (-x - y) = [|x - y| + (x + y)] \vee [|x - y| - x - y]$$

yazılabilir. Yani,

$$\begin{aligned} |x + y| + |x - y| &= (x + y) \vee (-x - y) + |x - y| \\ &= [|x - y| + (x + y)] \vee [|x - y| - x - y] \end{aligned}$$

bulunur. (i) de verilen eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned} |x + y| + |x - y| &= [|x - y| + (x + y)] \vee [|x - y| - x - y] \\ &= 2[x \vee y] \vee 2[(-x) \vee (-y)] \\ &= 2\big([x \vee y] \vee [(-x) \vee (-y)]\big) \\ &= 2\big([x \vee (-x)] \vee [y \vee (-y)]\big) \end{aligned}$$

olur. Buradan da x in mutlak kısmı tanımından

$$\begin{aligned} |x + y| + |x - y| &= 2\big([x \vee (-x)] \vee [y \vee (-y)]\big) \\ &= 2\big(|x| \vee |y|\big) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv)

(i) ve (iii) eşitlikleri kullanarak,

$$\big||x+y|-|x-y|\big| = 2(|x+y| \vee |x-y|) - (|x+y|+|x-y|)$$
$$= 2(|x|+|y|) - 2(|x| \vee |y|)$$
$$= 2(|x| \wedge |y|)$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1.11 Riesz uzayında x, y, z keyfi elemanları için aşağıdaki eşitsizlikler vardır.

(i) $\big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$ (Üçgen Eşitsizliği)

(ii) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x-y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x-y|$ (Birkoff Eşitsizlikleri)

(iii) $x, y, z \geq 0$ için $x \wedge (y+z) \leq x \wedge y + x \wedge z$ **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. (i) x in pozitif kısmı, negatif kısmı ve mutlak kısmı tanımlarından yararlanılarak

$$|x+y| = (x+y)^+ + (x+y)^-$$
$$\leq (x^+ + y^+) + (x^- + y^-)$$
$$= (x^+ + x^-) + (y^+ + y^-)$$
$$= |x| + |y|$$

şeklinde elde edilir. Eşitsizliğin diğer tarafı için

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$$

eşitsizliğinden yararlanılarak

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$|y| - |x| \leq |x-y|$$

yazılabileceğinden

$$|x-y| \geq \sup\{|x|-|y| \ , \ |y|-|x|\} = \big||x|-|y|\big|$$

bulunur. Burada y yerine $(-y)$ alınırsa

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x+y|$$

olup eşitsizliğin sol tarafı da elde edilmiş olur.

(ii) $x \vee z - y \vee z = [(x-z) \vee 0 + z] - [(y-z) \vee 0 + z]$

$$= (x-z)^+ - (y-z)^+$$
$$= [(x-y)+(y-z)]^+ - (y-z)^+$$
$$\leq [(x-y)]^+ + (y-z)^+] - (y-z)^+$$
$$= (x-z)^+$$
$$\leq |x-y|$$

elde edilebilir.

Benzer olarak $y \vee z - x \vee z \leq |x - y|$ olduğuda gösterilebilir. Böylece bu iki sonuçtan istenen eşitsizlik elde edilir. Diğer eşitsizlikte benzer şekilde elde edilir.

(iii) $x \wedge (y + z) = a$ olsun. Buradan

$$a \leq x \text{ ve } a \leq y + z$$

elde edilebilir.

$$a - z \leq a \leq x \text{ ve } a - z \leq y$$

eşitsizliklerinden yararlanılarak

$$a - z \leq x \wedge y$$

bulunur. Yine buradan da

$$a - x \wedge y \leq z \text{ ve } a - x \wedge y \leq a \leq x$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikliklerden

$$a - x \wedge y \leq x \wedge z$$

olur. Böylece

$$a \leq x \wedge y + x \wedge z$$

bulunarak ispat tamamlanır. ■

Tanım 3.1.12 A ve B, E Riesz uzayının boştan farklı alt kümeleri olsun. Bu durumda aşağıdaki tanımları yazabiliriz.

(i) $|A| = \{|a| : a \in A\}$

(ii) $A^+ = \{a^+ : a \in A\}$

(iii) $A^- = \{a^- : a \in A\}$

(iv) $A \vee B = \{a \vee b : a \in A \text{ ve } b \in B\}$

(v) $A \wedge B = \{a \wedge b : a \in A \text{ ve } b \in B\}$

(vi) $x \in E$, $x \vee A = \{x \vee a : a \in A\}$

(vii) $x \in E$, $x \wedge A = \{x \wedge a : a \in A\}$

(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985).

Teorem 3.1.13 E bir Riesz uzayı ve A, E nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. sup A varsa $\forall\, x \in E$ için $\sup(x \wedge A) = x \wedge \sup A$ dır. Benzer şekilde infA var ise $\forall\, x \in E$ için $\inf(x \vee A) = x \vee \inf A$ dır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. supA var ve $\sup A = y$ olsun. $x \in E$ ve $\forall\, a \in A$ için

$$x \wedge a \leq x \wedge y$$

dır. Buradan $x \wedge A$ kümesi $x \wedge y$ de üstten sınırlıdır. Böylece

$$x \wedge a \leq z$$

dır. Yine $\forall\, a \in A$ için

$a = x \wedge a + x \vee a - x \leq z + x \vee y - x$ dır. Buradan da $y \leq z + x \vee y - x$

elde edilir. Dolayısıyla

$x \wedge y = x + y - x \vee y \leq z$ ve $\sup(x \wedge A) = x \wedge \sup A$ olduğu görülür.

Benzer olarak $\inf(x \vee A) = x \vee \inf A$ dır. ■

Tanım 3.1.14 E Riesz uzayında $|x| \wedge |y| = 0$ koşulunu sağlayan x ve y elemanlarına **ayrık (dik)** denir ve $x \perp y$ ile gösterilir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.1.15 A kümesi bir E Riesz uzayının boş olmayan bir alt kümesi ise A nın A^d ayrık tümleyeni (dik tümleyeni);

$$A^d = \{\ x \in E : \forall\ y \in A \text{ için } x \perp y\}$$

veya

$$A^d = \{x \in E : \forall\ y \in A \text{ için } |x| \wedge |y| = 0\}$$

şeklinde tanımlanır.
$(A^d)^d$, A^{dd} şeklinde ifade edilir. Aynı zamanda

$$A \cap A^d = \{0\}$$

dır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.1.16 Bir Riesz uzayının boştan farklı her üstten sınırlı alt kümesinin bir supremumu ya da alttan sınırlı her boştan farklı alt kümesinin bir infumumu varsa, bu uzaya **Dedekind tam** denir **(Zaanen, 1971)**.

Tanım 3.1.17 Bir Riesz uzayının boştan farklı üstten sınırlı her sayılabilir alt kümesinin supremumu varsa o uzaya **Dedekind σ-tam** denir **(Zaanen, 1971)**.

Örnek 3.1.18 $\mathbb{R}$ sıralama bağıntısına göre Dedekind tamdır **(Zaanen, 1971)**.

Örnek 3.1.19 $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ kümesi $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in X$ olmak üzere " $x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1$ ve $x_2 \leq y_2$ " şeklinde tanımlanan düzlemsel sıralama bağıntısına göre Dedekind tamdır **(Zaanen, 1971)**.

Teorem 3.1.20 Riesz uzayında kısmi sıralı bir X kümesinin Dedekind tam olması için gerek ve yeter koşul X kümesinin boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin supremumunun var olmasıdır **(Zaanen, 1971)**.

İspat. X kümesi Dedekind tam olduğundan X kümesinin boştan farklı üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu vardır.

Tersi için X boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu mevcut olsun. İspat için $\emptyset \neq Y \subset X$ ve alttan sınırlı herhangi Y kümesi için $\inf Y \in X$ olduğu gösterilmelidir. A(Y), Y kümesinin tüm alt sınırlarının kümesi olsun. $A(Y) \neq \emptyset$ ve $\emptyset \neq Y$ olduğundan A(Y) üstten sınırlıdır. Bu durumda $\sup A(Y) = k$ mevcuttur. $\forall\ y \in Y$, A(Y) kümesinin bir üst sınırlı olduğundan $k \leq y$ yazılabilir. Bu ise $k \in A(Y)$ olduğunu gösterir. Böylece k elemenı Y kümesinin bir alt sınırı ve diğer alt sınırlardan daha büyük olduğundan $k = \inf Y$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Tanım 3.1.21 E bir Riesz uzayı ve A, E nin bir alt kümesi olsun. $\forall\, x, y \in A$ için $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A ya **yukarı yönlendirilmiş küme** denir ve $A \uparrow$ şeklinde gösterilir.
$A \uparrow x$ ifadesi, A yukarı yönlendirilmiş bir küme ve $\sup A = x$ demektir.

Yukarı yönlendirilmiş kümelerden yararlanılarak E Riesz uzayının Dedekind tam olması için gerek ve yeter koşul E^+ kümesinden alınan yukarı yönlendirilmiş ve üstten sınırlı her alt kümesinin supremumunun var olmasıdır. Benzer olarak Dedekind σ-tam olması için aynı şart geçerlidir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.1.22 E bir Riesz uzayı ve A, E nin bir alt kümesi olsun. $\forall\, x, y \in A$ için $x \geq z$ ve $y \geq z$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A ya **aşağı yönlendirilmiş küme** denir ve $A \downarrow$ şeklinde gösterilir.
$A \downarrow x$ ifadesi, A aşağı yönlendirilmiş bir küme ve $\inf A = x$ demektir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.1.23 X, E Riesz uzayının bir alt kümesi ve $\bigwedge$ sıralama bağıntısına göre yönlendirilmiş bir küme olsun. $f : \bigwedge \to X$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonuna terimleri X in elemanından oluşan bir **ağ (net)** denir. $\alpha \in \bigwedge$ için $f(\alpha) = x_\alpha \in E$ veya $\{x_\alpha\}$ şeklinde gösterilir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.1.24 E bir Riesz uzayı ve (x_n) E de bir dizi olsun.

(i) (x_n) artandır $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$ ve $x_n \uparrow$ ile gösterilir.

(ii) (x_n) azalandır $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$ ve $x_n \downarrow$ ile gösterilir.

(iii) $x_n \uparrow x \Leftrightarrow (x_n)$ artandır ve $\sup x_n = x$ dir.

(iv) $x_n \downarrow x \Leftrightarrow (x_n)$ azalandır ve $\inf\, x_n = x$ dir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.1.25 $||.||$, E Riesz uzayında tanımlı bir norm olsun. $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken $||x|| \leq ||y||$ koşulunu sağlıyorsa $||.||$ normuna **latis normu** denir. Latis normlu Riesz uzayına **normlu Riesz uzayı** denir **(Zaanen, 1971)**.

Tanım 3.1.26 E normlu Riesz uzayı tam ise E ye bir **Banach latis** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Örnek 3.1.27 K Kompakt Hausdorff uzayı olsun. K üzerindeki sürekli reel değerli tüm fonksiyonların Banach uzayı $C(K)$ olmak üzere $\forall\, x \in K$ için $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ sıralamasına göre $(C(K),\leq)$ bir Banach latistir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Örnek 3.1.28 c_0 dizi uzayı Banach latistir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 3.1.29 E bir Riesz uzayı olsun. $\forall\, x \in E^+$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ oluyorsa E Riesz uzayına **Archimedean Riesz uzayı** denir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Çalışmamızdaki Riesz uzayları Archimedean kabul edilecektir.

Örnek 3.1.30 $\mathbb{R}^2$ Archimedean Riesz uzayıdır. Gerçekten $(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{d}) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $(0,0) \leq (\mathrm{a},\mathrm{b}) \leq \frac{1}{n}(\mathrm{c},\mathrm{d})$ için

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $(0,0) \leq (\mathrm{a},\mathrm{b}) \leq \inf\left(\frac{1}{n}(\mathrm{c},\mathrm{d})\right) = 0$

dır. Böylece $(\mathrm{a},\mathrm{b}) = (0,0)$ elde edilir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Örnek 3.1.31 $\mathbb{C}[0,1]$ Archimedean Riesz uzayıdır. $\mathrm{f} \leq \mathrm{g} \Leftrightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}) \leq \mathrm{g}(\mathrm{x}), \forall\ \mathrm{x} \in [0,1]$ sıralaması verilsin. $\mathrm{f},\mathrm{g} \in \mathbb{C}[0,1] = \{\mathrm{f} | \mathrm{f} : X \to \mathbb{R}\}$ sürekli olmak üzere $\forall\ n \in \mathbb{N}$ ve $\forall\ \mathrm{x} \in [0,1]$ için

$$n\mathrm{f} \leq \mathrm{g} \Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}) \leq \frac{1}{n}\ \mathrm{g}(\mathrm{x}),$$
$$\Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0, \forall\ \mathrm{x} \in [0,1]$$
$$\Rightarrow \mathrm{f} = 0$$

elde edilir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

3.2 Riesz Uzaylarında Tanımlı Operatörler

Tanım 3.2.1 (i) E ve F Riesz uzayları ve $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü E Riesz uzayının sıralı aralıklarını F Riesz uzayının sıra sınırlı kümelerine dönüştürüyorsa T operatörüne **sıra sınırlı operatör** denir. Bir E Riesz uzayının bir F Riesz uzayına tanımlı sıra sınırlı operatörler uzayı $\mathrm{L_b}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ile gösterilir.

(ii) İki pozitif operatörün farkı şeklinde yazılabilen operatöre **regüler (düzenli) operatör** denir. Bir E Riesz uzayından bir F Riesz uzayı içine tanımlanan regüler operatörlerin uzayı ise $\mathrm{L_r}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ile gösterilir.

(iii) E ve F Riesz uzayları arasında tanımlı bütün operatörlerin oluşturduğu $\mathrm{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri alışılmış şekilde tanımlanır.

$\mathrm{T} \geq \mathrm{S} \Leftrightarrow \mathrm{T} - \mathrm{S} \geq 0$ sıralaması ele alınırsa $\mathrm{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ bir sıralı vektör uzayı olur. $\mathrm{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ üzerindeki sıralama bağıntısı $\mathrm{L_b}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ve $\mathrm{L_r}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ uzaylarında da korunursa bu uzaylar da sıralı vektör uzayı olur.

T operatörü regüler ise tanım gereğince $\mathrm{T} = \mathrm{T_1} - \mathrm{T_2}$ olacak biçiminde $\mathrm{T_1} \geq 0$, $\mathrm{T_2} \geq 0$ operatörleri vardır ve $\mathrm{T_1} \geq \mathrm{T}$ olur. Tersi olarak $\mathrm{T} \leq \mathrm{S}$ olacak şekilde en az bir $\mathrm{S} \geq 0$ operatörü varsa $\mathrm{T} = \mathrm{S} - (\mathrm{S} - \mathrm{T})$ yazılabileceğinden T operatörü regülerdir. O halde bir operatörün regülerliği için T operatörü regülerdir $\Leftrightarrow$ $\mathrm{T} \leq \mathrm{S}$ olacak şekilde en az bir $\mathrm{S} \geq 0$ operatörü vardır diyebiliriz.

Buradan görüldüğü gibi $\mathrm{T} \in \mathrm{L_r}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ile herhangi bir $[\mathrm{x},\mathrm{y}]$ sıra aralığı için $\mathrm{T}([\mathrm{x},\mathrm{y}]) \subseteq [\mathrm{T_x},\mathrm{S_y}]$ olduğundan $\mathrm{T} \in \mathrm{L_b}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ dır. Dolayısıyla

$$\mathrm{L_r}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \subseteq \mathrm{L_b}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \subseteq \mathrm{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$$

yazılabilir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Teorem 3.2.2 (Kantorovich Teoremi) E ve F Riesz uzayları olmak üzere F Archimedean olsun. Eğer $T : E^+ \to F^+$ toplamsal $\big($yani $\forall\ x, y \in E^+$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)\big)$ ise $x \in E^+$ için $S(x) = T(x)$ olacak biçimde bir tek pozitif $S \in L(E, F)$ vardır ve $\forall\ x \in E$ için $S(x) = S(x^+) - S(x^-)$ sağlanır **(Aliprantis ve Burkinshaw, 2003).**

İspat. $T : E^+ \to F^+$ toplamsal olmak üzere $S(x) = T(x^+) - T(x^-)$ operatörünü ele alalım. $\forall\ x \in E^+$ için $S(x) = T(x)$ sağlandığından, S operatörü T operatörünün pozitif bir genişlemesidir. Ayrıca $\forall\ x \in E^+$ için $x = x^+ - x^-$ olduğundan S mümkün olan tek genişlemedir. İspatı tamamlamak için S operatörünün lineer olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için öncelikle S nin toplamsal olduğunu gösterelim.

$x \in E$ iki pozitif elemanın farklı şekilde yazılabiliyorsa, yani $v_1, v_2 \in E^+$ olmak üzere $x = v_1 - v_2$ yazılabiliyorsa $S(x) = T(v_1) - T(v_2)$ olur. Bunu görmek için $x \in E$ alalım ve $v_1, v_2 \in E^+$ olmak üzere $x = x^+ - x^- = v_1 - v_2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x^+ + v_2 = v_1 + x^-$ olur ve T operatörünün toplamsallığından,

$T(x^+) + T(v_2) = T(x^+ + v_2) = T(v_1 + x^-) = T(v_1) + T(x^-)$, yani

$S(x) = T(x^+) - T(x^-) = T(v_1) - T(v_2)$ elde edilir. Bu özellik kullanılarak $\forall\ x, y \in E$ için,

$$\begin{aligned} S(x + y) &= S[(x^+ + y^+) - (x^- + y)^-] \\ &= T(x^+ + y^+) - T(x^- + y^-) \\ &= T(x^+) + T(y^+) - T(x^-) - T(y^-) \\ &= [T(x^+) - T(x^-)] + [T(y^+) - T(y^-)] \\ &= S(x) + S(y) \end{aligned}$$

olup, S toplamsaldır. S operatörünün toplamsallığından dolayı, $\forall\ x \in E$ ve r rasyonel sayısı için $S(rx) = rS(x)$ sağlanır.

Şimdi de S operatörünün homojen olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle S nin monotonluğuna ihtiyacımız vardır. Eğer $x \geq y$ ise $x - y \in E^+$ olduğundan S operatörünün toplamsallığından,

$$Sx = S((x - y) + y) = S(x - y) + S(y) = T(x - y) + Ty \geq Sy$$

olup S nin monotonluğunu gösterilmiş olur. Herhangi bir $x \in E$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $r_n \uparrow \lambda$ ve $t_n \downarrow \lambda$ olacak biçimde iki (r_n) ve (t_n) rasyonel dizisi vardır. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $r_n x \leq \lambda x \leq t_n x$ olduğundan ve S operatörünün monotonluğundan,

$$r_n S(x) = S(r_n x) \leq S(\lambda x) \leq S(t_n x) = t_n Sx$$

elde edilir. F Archimedean olduğundan $\lambda S(x) = S(\lambda x)$ olur.

Son olarak $x \in E$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} S(\lambda x) &= S(\lambda x^+ + (-\lambda)x^-) \\ &= S(\lambda x^+) + S((-\lambda)x^-) \\ &= \lambda S(x^+) - \lambda S(x^-) \\ &= \lambda[T(x^+) - T(x^-)] \\ &= \lambda Sx \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla S operatörü homojendir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Tanım 3.2.3 E ve F Riesz uzayları arasında tanımlı bir $T : E \to F$ operatörü için

$$|T| = T \vee (-T)$$

oluyorsa $|T|$ ye **T nin modülü** denir.

Eğer bir $T : E \to F$ operatörünün modülü varsa, $\forall\, x \in E$ için $|Tx| \leq |T|(|x|)$ eşitsizliği gerçeklenir. Gerçekten de, $\pm Tx \leq |T|x$ ve $|T|x \leq |T|(|x|)$ olmasından yararlanılarak istenen sonuç elde edilebilir.

Tanım 3.2.3 gereğince her operatörün modülünün var olmasının gerekmediğine dikkat edilmelidir. Aşağıdaki teorem bir operatörün modülünün varlığını garantileyen önemli bir durumu vermektedir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Teorem 3.2.4 E ve F iki Riesz uzayı ve $T \in L(E, F)$ olsun. Bu durumda, $\forall\, x \in E^+$ için $\sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$ mevcutsa $|T|$ modülü vardır ve $\forall\, x \in E^+$ için

$$|T|x = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$$

sağlanır **(Aliprantis ve Burkinshaw, 1985)**.

İspat. $x \in E^+$ olmak üzere $S(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$ şeklinde bir $S : E^+ \to F^+$ operatörü tanımlayalım. $\forall\, x \in E^+$ için $|y| \leq x$ olması $|\pm y| \leq x$ olmasını gerektireceğinden $S(x) = \sup\{Ty : |y| \leq x\}$ yazılabilir.

Öncelikle S operatörünün toplamsal olduğunu gösterelim. Bunun için $u, v \in E^+$ olsun. Eğer, $|y| \leq u$ ve $|z| \leq v$ ise $|y + z| \leq |y| + |z| \leq u + v$ yazılabilir. Ayrıca $T(y) + T(z) = T(y + z) \leq S(u + v)$ olduğundan $S(u) + S(v) \leq S(u + v)$ bulunur. Diğer taraftan, $|y| \leq u + v$ ise $|y_1| \leq u$, $|y_2| \leq v$ ve $y = y_1 + y_2$ olacak biçimde $y_1, y_2 \in E$ olduğu söylenebilir. Buradan $T(y) = T(y_1) + T(y_2) \leq S(u) + S(v)$ yazılabilir. Bu ise $|y| \leq u + v$ olarak alındığında $S(u + v) \leq S(u) + S(v)$ olduğunu gösterir. Böylece S operatörünün toplamsallığı sağlandığından Teorem 3.2.2 gereğince S operatörünün bir pozitif genişlemesi vardır.

Şimdi de S nin $\{T, -T\}$ kümesinin supremumu olduğunu gösterelim. $L(E, F)$ uzayında $T \leq S$ ve $-T \leq S$ olduğundan S, $\{T, -T\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. $\pm T \leq R$ olacak biçimde $R \in L(E, F)$ olduğunu varsayalım. R operatörünün pozitif olduğu açıktır. $x \in E^+$ olmak üzere $|y| \leq x$ ise $Ty = Ty^+ - Ty^- \leq Ry^+ - Ry^- = R(y^+ - y^-) = R|y| \leq Rx$ olur. Yani sabit bir $x \in E^+$ ve $|y| \leq x$ koşulunu sağlayan $\forall\, y \in E$ için $Ty \leq Rx$ elde edilir. $|y| \leq x$ koşulunu sağlayan $\forall\, y \in E$ elemanları üzerinden supremum alınısa $Sx \leq Rx$ elde edilir. Bu $\forall\, x \in E^+$ için doğru olduğundan $S \leq R$ elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Bu teorem kullanılarak, F nin Dedekind tam olması durumunda $L_b(E, F)$ uzayının bir Dedekind tam Riesz uzayı olduğunu gösteren aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.5 (Riesz-Kantorovich Teoremi)E ve F iki Riesz uzayı ve F Dedekind tam olsun. Bu durumda $L_b(E,F)$, bir Dedekind tam Riesz uzayıdır.
Ayrıca, $\forall$ $S,T \in L_b(E,F)$ ve $\forall$ $x \in E^+$ için,

$$(S \vee T)(x) = \sup\{S(y) + T(z) : y,z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\}$$

$$(S \wedge T)(x) = \inf\{S(y) + T(z) : y,z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\}$$

eşitlikleri gerçeklenir **(Aliprantis and Burkinshaw 1985).**

İspat. $T \in L_b(E,F)$ olsun. T sıra sınırlı ve F Dedekind tam olduğundan $\forall$ $x \in E^+$ için $\sup\{|Ty| : |y| \leq x\} = \sup\{Ty : |y| \leq x\} = \sup\{T[-x, x]\} \in F$ dir. Buradan, Teorem 3.2.4 gereğince T operatörünün modülünün olduğu ve $|T|(x) = \sup\{Ty : |y| \leq x\}$ eşitliğinin sağlandığı söylenebilir. Ayrıca $T,S \in L_b(E,F)$ için Teorem 3.1.10 dan yararlanılarak $T \vee S$ ve $T \wedge S$ nin olduğunu, dolayısıyla $L_b(E,F)$ nin Riesz uzayı olduğu da elde edilebilir.

$S,T \in L_b(E,F)$ ve $x \in E^+$ olsun. $y,z \in E^+$ olmak üzere $y + z = x$ olması için gerek ve yeter koşulun $y = \frac{1}{2}(x + u)$ ve $z = \frac{1}{2}(x - u)$ olacak biçimde $|u| \leq x$ olmasından ve yine Teorem 3.1.10 dan yararlanılarak,

$$\begin{aligned}(S \vee T)(x) &= \tfrac{1}{2}(Sx + Tx + |S - T|x) \\ &= \tfrac{1}{2}(Sx + Tx + \sup\{(S - T)u : |u| \leq x\}) \\ &= \tfrac{1}{2}\sup\{Sx + Su + Tx - Tu : |u| \leq x\} \\ &= \sup\{S(\tfrac{1}{2}(x + u)) + T(\tfrac{1}{2}(x - u)) : |u| \leq x\} \\ &= \sup\{S(y) + T(z) : y,z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(S \wedge T)(x) &= \tfrac{1}{2}(Sx + Tx - |S - T|x) \\ &= \tfrac{1}{2}(Sx + Tx - \inf\{(T - S)u : |u| \geq x\}) \\ &= \tfrac{1}{2}\inf\{Sx + Tx - Tu + Su : |u| \geq x\} \\ &= \inf\{S(\tfrac{1}{2}(x + u)) + T(\tfrac{1}{2}(x - u)) : |u| \geq x\} \\ &= \inf\{S(y) + T(z) : y,z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\}\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $L_b(E,F)$ uzayının Dedekind tam olduğunu gösterelim. Bunun için $L_b(E,F)$ uzayında $0 \leq T_\alpha \uparrow\leq T$ olacak biçimde bir $\{T_\alpha\}$ ağı alalım.

$\forall$ $x \in E^+$ için $S(x) = \sup\{T_\alpha(x)\}$ şeklinde tanımlandığında $T_\alpha(x) \uparrow S(x)$ olur.

$T_\alpha(x + y) = T_\alpha(x) + T_\alpha(y)$ olduğundan limit alarak $S : E^+ \to F^+$ operatörünün toplamsal olduğunu ve Teorem 3.2.2 gereğince S operatörünün E uzayından F uzayına pozitif bir operatör tanımlandığını söyleyebiliriz. Böylece $T_\alpha(x) \uparrow S \in L_b(E,F)$ elde edilir ve E uzayının Dedekind tam olduğu gösterilmiş olur. ∎

Teorem 3.2.6 E,F Riesz uzayları, F Dedekind tam ve $T \in L_b(E,F)$ olduğunda $\forall$ $x \in E^+$ için,

$$|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$$

$$T^+(x) = \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\}$$

$T^{-}(x) = \sup\{-Ty : 0 \leq y \leq x\}$
gerçeklenir.

Teorem 3.2.6 gereğince F Dedekind tam ve $T \in L_b(X, Y)$ ise T^{+} ve T^{-} operatörleri mevcuttur. Ayrıca $T = T^{+} - T^{-}$ olduğundan $L_b(X, Y)$ uzayındaki her operatör, iki pozitif operatörün farklı olarak yazılabilmekte ve dolayısıyla $L_b(E, F) \subseteq L_r(E, F)$ olmaktadır. Diğer taraftan her zaman $L_r(E, F) \subseteq L_b(E, F)$ var olduğundan,

$$L_r(E, F) = L_b(E, F)$$

eşitliği elde edilir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.2.7 (i) E ve F Riesz uzayları, $T : E \to F$ bir pozitif operatör olsun. $\forall\, x, y \in E$ için

$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$$

oluyorsa T operatörüne bir **Riesz homomorfizması (veya latis homomorfizması)** denir.

(ii) Bir Riesz homomorfizması birebir ise buna **Riesz izomorfizması** denir.

(iii) Bir Riesz homomorfizması örten ise buna **Riesz izomorfiktir** denir.

Her Riesz homomorfizması bir pozitif operatördür. Gerçekten de $\forall\, x \in E^{+}$ için
$T(x) = T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0) = [T(x)]^{+} \geq 0$
sağlanır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Örnek 3.2.8 K_1 ve K_2 Kompakt Hausdorff uzayı, $\Phi : K_2 \to K_1$ sürekli fonksiyon ve $g \in C\,(K_2)^{+}$ olsun.

$T : C(K_1) \to C(K_2)$

$Tf = g \cdot f \circ \Phi$

şeklinde tanımlanan T operatörü bir Riesz homomorfizmasıdır.
Gerçekten f,h $\in C(K_1)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} T(f \vee h) &= g \cdot (f \vee h) \circ \Phi \\ &= (g \cdot f \vee g \cdot h) \circ \Phi \\ &= g \cdot f \circ \Phi \vee g \cdot h \circ \Phi \\ &= Tf \vee Th \end{aligned}$$

dır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Teorem 3.2.9 E ve F Riesz uzayları olmak üzere $T : E \to F$ pozitif operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) T bir Riesz homomorfizmasıdır

(ii) $\forall\, x \in E$ için $T(x^{+}) = [T(x)]^{+}$

(iii) $\forall\, x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$

(iv) $\forall\, x \in E$ için $T(|x|) = |T(x)|$

(v) E Riesz uzayında $x \wedge y = 0$ ise F Riesz uzayında $T(x) \wedge T(y) = 0$ dır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. (i)$\Rightarrow$ (ii) T bir Riesz homomorfizması olsun. Bu durumda $\forall\, x \in E$ için

$$\begin{aligned} T(x^+) &= T(x \vee 0) \\ &= T(x) \vee T(0) \\ &= T(x) \vee 0 \\ &= [T(x)]^+ \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) $\forall\, x, y \in E$ için $x \wedge y = x - (x - y)^+$ eşitliğinde yararlanılarak

$$\begin{aligned} T(x \wedge y) &= T(x - (x - y)^+) \\ &= T(x) - T[(x - y)]^+ \\ &= T(x) - (Tx - Ty)^+ \\ &= T(x) \wedge T(y) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii)$\Rightarrow$ (iv) $\forall\, x, y \in E$ için $|x - y| = x + y - 2(x \wedge y)$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} T(|x - y|) &= T(x) + T(y) - 2[T(x \wedge y)] \\ &= T(x) + T(y) - 2[T(x) \wedge T(y)] \\ &= |T(x) - T(y)| \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da özel olarak $y = 0$ alırsa $|T(x)| = T(|x|)$ elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ (v) $x \wedge y = 0$ olsun. Teorem 3.1.10 da verilen $x \wedge y = \frac{1}{2}[(x + y) - |x - y|]$ eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} T(x) \wedge T(y) &= \tfrac{1}{2}[T(x) + T(y) - |T(x) - T(y)|] \\ &= \tfrac{1}{2}[T(x) + T(y) - T|x - y|] \\ &= T[\tfrac{1}{2}(x + y - |x - y|)] \\ &= T(x \wedge y) \\ &= T(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $\Rightarrow$ (i) $(x - x \wedge y) \wedge (y - x \wedge y) = 0$ olduğundan $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ elde edilir. Ayrıca $x \vee y = x + y - x \wedge y$ eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} T(x \vee y) &= T(x) + T(y) - T(x \wedge y) \\ &= T(x) + T(y) - [T(x) \wedge T(y)] \\ &= T(x) \vee T(y) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan T bir Riesz homomorfizmasıdır. ■

Tanım 3.2.10 E ve F Riesz uzayları, $T : E \to F$ bir operatör olsun.

$$\text{Çek } T = \{x \in E : Tx = 0\}$$

kümesine **T nin çekirdeği** denir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.2.11 Riesz uzaylarında tanımlı $T : E \to F$ operatörü ve $T \in L(E, F)$ olsun. $\forall\, x, y \in E$ için $x \perp y$ olduğunda F de $Tx \perp Ty$ oluyorsa T ye **ayrıklığı (dikliği) koruyan operatör** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 3.2.12 E bir Riesz uzayı olsun. E üzerindeki tüm sıra sınırlı lineer fonksiyonellerin vektör uzayına E Riesz uzayının **sıra duali** denir ve $E^{\sim}$ ile gösterilir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 3.2.13 E ve F vektör uzayları olmak üzere $T : E \to F$ cebirsel eşleniği $T^* : F^{\sim} \to E^{\sim}, \forall\, f \in F^{\sim}$ ve $x \in E$ için

$$\left[T^* f\right](x) = f(Tx)$$

şeklinde tanımlanır. Dual gösterimi

$$\left\langle T^* f, x\right\rangle = \left\langle f, (Tx)\right\rangle$$

şeklinde de ifade edilebilir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Teorem 3.2.14 E ve F Riesz uzayları ve $T : E \to F$ sıra sınırlı operatör olsun. T nin eşleniği T' olmak üzere $\forall\, f \in F^{\sim}$ ve $x \in E^+$ için

$$\left\langle f, |Tx|\right\rangle \leq \left\langle |T'| f, x\right\rangle$$

dır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

3.3 Riesz Uzaylarında İdeal ve Band Kavramları

Tanım 3.3.1 E bir Riesz uzayı ve V, E nin lineer alt uzayı olsun. $\forall\, x, y \in V$ için $x \vee y$ ve $x \wedge y$, V de kapsanıyorsa V ye **Riesz lineer alt uzay (Vektör alt latis)** denir **(Zaanen, 1971)**.

Örnek 3.3.2 $l_\infty = \{x = (x_n) : \sup\limits_n |x_n| < \infty\}$ sınırlı dizi uzayının

$$c_0 = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$$

ve

$$c = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 1, \quad 1 \in \mathbb{R}\}$$

uzayları noktasal sıralamaya göre Riesz lineer alt uzaylarıdır **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 3.3.3 E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. A alt kümesi, $x \in A$ ve $|y| \leq |x|$ iken $y \in A$ koşulunu sağlıyorsa A ya **katı (solid)** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 3.3.4 Bir E Riesz uzayında solid olan alt uzaya **ideal** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Örnek 3.3.5 E ve F Riesz uzayları, $T : E \to F$ bir Riesz homomorfizması olsun. Bu durumda Çek T bir idealdir. Çek T nin ideal olduğunu gösterelim. Bunun için Çek T nin alt uzay ve katı olduğu gösterilmelidir.
$x, y \in$ Çek T olsun.

$T(x + y) = T(x) + T(y) = 0 + 0 = 0$ dır. Buradan da $x + y \in$ Çek T dir.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in$ Çek T olsun.

$T(\lambda x) = \lambda Tx = \lambda 0 = 0$ dır. Buradan da $\lambda x \in$ Çek T dir.

O halde Çek T bir alt uzaydır.
$|x| \leq |y|$ ve $y \in$ Çek T olsun. $|x| \leq |y|$ ise $|y| - |x| \geq 0$ olur.
T bir Riesz homomorfizması olduğundan pozitiftir.

$T(|y| - |x|) \geq T(0)$

$T|y| - T|x| \geq 0$

$|Ty| - |Tx| \geq 0$

$|Tx| \leq |Ty|$

olur. $y \in$ Çek T olduğundan $T(y) = 0$ dır. Dolayısıyla $T(x) = 0$ olur. Buradan da $x \in$ Çek T elde edilir.

Görüldüğü gibi Çek T hem alt uzay hem de katı olduğundan idealdir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Örnek 3.3.6 $l_\infty = \{x = (x_n) : \sup_n |x_n| < \infty\}$, Riesz uzayında

$$c_0 = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$$

vektör uzayı bir idealdir. Fakat

$$c = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 1, \ \ 1 \in \mathbb{R}\}$$

uzayı için $|((-1)^n)| \leq |(1)|$; $(1) \in c$ iken $((-1)^n) \notin c$ olduğundan c, l_∞ Riesz uzayında ideal değildir.

Tanım 3.3.7 E bir Riesz uzayı için $0 < u \in E$ olsun. u ile üretilen ideal

$$E_u = \{x \in E : \text{bir } \ \lambda > 0 \text{ için } |x| \leq \lambda u\}$$

dır. E_u şeklindeki bir ideale **temel ideal** denir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.3.8 E bir Riesz uzayı ve A, E de ideal olsun. $\forall$ B $\subseteq$ A için supB=b $\in$ E iken b $\in$ A oluyorsa A ya **band** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Örnek 3.3.9 E tüm reel dizilerin Riesz uzayı olsun. E Riesz uzayı için $f = (f(1), f(2), \ldots)$ içeren ve $f(1) = 0$ şartını sağlayan bir alt kümesi E Riesz uzayında bir banddır **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Örnek 3.3.10 E Riesz uzayı ve A, E nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda A^d banddır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.3.11 E bir Riesz uzayı olsun. $x \in E$ vektörüyle üretilen band

$$B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$$

olarak tanımlanır. B_x şeklindeki her banda **temel band** denir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 3.3.12 E bir Riesz uzayı olsun. Bir $e > 0$ vektörü için $E_e = E$ oluyorsa yani, $\forall\, x \in E$ için $|x| \leq \lambda_e$ olacak şekilde bir $\lambda \geq 0$ varsa e ye **güçlü sıralı birim** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Örnek 3.3.13 K Kompakt Hausdorff uzayı için 1_K, K da bir sabit fonksiyon olmak üzere reel değerli sürekli tüm fonksiyonların uzayı $C(K)$ uzayı için 1_K güçlü sıralı birimdir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 3.3.14 E bir Riesz uzayı olsun. Bir $e > 0$ vektörü için $B_e = E$ oluyorsa yani, $\forall\, x \in E^+$ için $x \wedge ne \uparrow x$ sağlanıyorsa e ye **zayıf sıralı birim** denir **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Tanım 3.3.15 (i) Bir V vektör uzayında $P : V \to V$ lineer operatörü $P^2 = P$ özelliğini sağlıyorsa P operatörüne **izdüşüm(projeksiyon)** denir.

(ii) Bir P izdüşümü bir E Riesz uzayında tanımlı ve P aynı zamanda bir pozitif operatör ise bu durumda P ye **pozitif izdüşüm** denir.

(iii) Bir E Riesz uzayında B izdüşüm band olduğunda E Riesz uzayı $E = B \oplus B^d$ şeklinde ifade edilir. $\forall\, x \in E$ vektörü $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ için $x = x_1 + x_2$ şeklinde tek gösterime sahiptir.

(iv) Bir E Riesz uzayında $E = B \oplus B^d$ yi sağlayan bir B bandına **izdüşüm bandı(projeksiyon bandı)** denir.

(v) $P_B : E \to E$ izdüşümü ve $P_B(x) = x_1$ şeklinde verilsin. P_B şeklinde bir izdüşüme **sıra izdüşümü (band izdüşümü)** denir.

(vi) Bir Riesz uzayında her band bir izdüşüm bandı ise bu uzay **izdüşüm özelliğine sahiptir** denir.

(vii) Bir Riesz uzayında her temel band bir izdüşüm bandı ise bu uzay **temel izdüşüm özelliğine sahiptir** denir.

(viii) Bir E Riesz uzayında $T : E \to E$ operatörü için I, E üzerinde birim operatör olmak üzere $0 \leq T \leq I$ özelliği sağlanıyorsa T operatörüne **sıra izdüşüm** denir **(Zaanen, 1971)**.

Teorem 3.3.16 Riesz uzayındaki bir x vektörünün bir projeksiyon vektörü olması için gerek ve yeter koşul $\forall$ y ≥ 0 için $\sup\{y \wedge n|x| : n \in \mathbb{N}\}$ var olmasıdır. Bu durumda $\forall$ y ≥ 0 için

$$P_x(y) = \sup\{y \wedge n|x| : n \in \mathbb{N}\}$$

dır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Teorem 3.3.17 (Temel Kapsama Teoremi) : Bir E Riesz uzayında aşağıdaki gösterim sağlanır.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Dedekind } \sigma - \text{tam} \arrow[dr] & & \\
\text{Dedekind tam} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Temel İzdüşüm Özelliği} \arrow[r] & \text{Archimedean} \\
 & \text{İzdüşüm Özelliği} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Her Dedekind tam Riesz uzayı Dedekind $\sigma-$tamdır. Görüldüğü gibi Dedekind $\sigma-$ tamlık ve izdüşüm özelliği birbirinden bağımsız özelliklerdir. E Dedekind tam Riesz uzayında her band izdüşüm bandıdır. E Riesz uzayı izdüşüm bandı olduğundan dolayı izdüşüm özelliğine sahiptir **(De. Pagter, 1981)**

4 f-CEBİRLERİ VE ORTHOMORFİZMALAR

Bu bölümde f-cebirleri ve orthomorfizmalar arasındaki ilişkiler verilerek orthomorfizmaların bir alt kümesi olan merkezcil operatörlerden bahsedilecektir.

4.1 f-Cebirleri ve Özellikleri

Tanım 4.1.1 E bir kompleks vektör uzayı olsun. $\forall\, x, y \in E$ için $xy \in E$ olmak üzere

(i) $x(yz) = (xy)z$

(ii) $x(y+z) = xy + xz$

(iii) $(x+y)z = xz + yz$

(iv) $a \in \mathbf{K}$ için $a(xy) = x(ay)$

özelliklerini sağlıyorsa E ye bir **cebir** denir.

$\forall\, x \in E$ için $ex = xe = x$ eşitliğini sağlayan $0 \neq e \in E$ varsa E ye **birimli cebir** denir.

$\forall\, x, y \in E$ için $xy = yx$ ise E ye **değişmeli cebir** denir **(Zaanen, 1983)**.

Tanım 4.1.2 Normlu bir E uzayı cebir aksiyomlarını sağlasın. $\forall\, x, y \in E$ için $||xy|| \leq \|x\|\|y\|$ ise E ye **normlu cebir** denir. Tam normlu cebire bir **Banach cebiri** denir **(Zaanen, 1983)**.

Örnek 4.1.3 K Kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $C(K)$ Banach cebiridir **(Zaanen, 1983)**.

Tanım 4.1.4 E bir Riesz uzayı ve çarpmanın birleşme özelliğine sahip cebir olsun. $u, v \in E^+$ için $uv \geq 0$ oluyorsa E ye bir **Riesz cebiri** denir. $0 \leq u, v \in E$ için $|u.v| \leq |u|.|v|$ olmasına denktir. Ayrıca bir E Riesz cebiri $\forall\, u, v \in E$ için $uv = vu$ ise E ye değişmelidir denir.

Riesz cebirine aşağıdaki örnekleri verebiliriz **(Zaanen, 1983)**.

Örnek 4.1.5 Dedekind tam Riesz uzayı E deki tüm sıra sınırlı operatörler cebiri olan $L_b(E)$ bir Riesz cebiridir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Örnek 4.1.6 X topolojik uzayı üzerindeki tüm sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı C(X) bir Riesz cebiridir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Tanım 4.1.7 E bir Riesz cebiri olsun. $\forall\, a, b \in E$ ve $\forall\, c \in E^+$ $a \wedge b = 0$ iken $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$ oluyorsa E ye **f-cebiri** denir. Archimedean özelliğini sağlayan f-cebirine **Archimedean f-cebiri** denir **(Zaanen, 1983)**.

Şimdi f-cebirlerinin temel özelliklerini gösteren teorem ispatı ile verilecektir.

Teorem 4.1.8 Her E f-cebiri için aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

(i) Bir pozitif eleman ile çarpım Riesz homomorfizmasıdır. Yani $u \in \mathrm{E}^{+}$ ve $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{E}$ için

$u(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) = (u\mathrm{a}) \wedge (u\mathrm{b})$ ve $(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})u = (\mathrm{a}u) \wedge (\mathrm{b}u)$ eşitsizlikleri sağlanır.

Benzer olarak

$u(\mathrm{a} \vee \mathrm{b}) = (u\mathrm{a}) \vee (u\mathrm{b})$ ve $(\mathrm{a} \vee \mathrm{b})u = (\mathrm{a}u) \vee (\mathrm{b}u)$ eşitlikleri de sağlanır. Ayrıca $u\mathrm{a}^{+} = (u\mathrm{a})^{+}$ ve $\mathrm{a}^{+}u = (\mathrm{a}u)^{+}$ eşitlikleri de sağlanır.

(ii) $\forall$ $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{E}$ için $|\mathrm{ab}| = |\mathrm{a}| \cdot |\mathrm{b}|$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $(\mathrm{ab})^{+} = \mathrm{a}^{+}\mathrm{b}^{+} + \mathrm{a}^{-}\mathrm{b}^{-}$ ve $(\mathrm{ab})^{-} = \mathrm{a}^{+}\mathrm{b}^{-} + \mathrm{a}^{-}\mathrm{b}^{+}$ eşitlikleri de sağlanır.

(iii) $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{E}$ ve $\mathrm{a} \perp \mathrm{b}$ ise $\mathrm{ca} \perp \mathrm{b}$ ve $\mathrm{ac} \perp \mathrm{b}$ olur.

(iv) $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{a} \perp \mathrm{b}$ ise $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = 0$ dır. $\forall$ $\mathrm{a} \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{a}^{+}\mathrm{a}^{-} = \mathrm{a}^{-}\mathrm{a}^{+} = 0$ eşitliği sağlanır.

(v) $\forall$ $\mathrm{a} \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{a}^2 \geq 0$ ve $\mathrm{aa}^{+} = \mathrm{a}^{+}\mathrm{a} = (\mathrm{a}^{+})^2 \geq 0$ dır.

(vi) $\forall$ $u, v \in \mathrm{E}^{+}$ için $u^2 \wedge v^2 \leq (uv) \wedge (vu)$ ve $u^2 \vee v^2 \geq (uv) \vee (vu)$ sağlanır.

(vii) $\forall$ $u, v \in \mathrm{E}^{+}$ için $u^2 \wedge v^2 = (u \wedge v)^2$ ve $u^2 \vee v^2 = (u \vee v)^2$ sağlanır (**Zaanen, 1983**).

İspat. (i) $\{\mathrm{a} - (\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})\} \wedge \{\mathrm{b} - (\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})\} = 0$ olduğundan $\{u\mathrm{a} - u(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})\} \wedge \{u\mathrm{b} - u(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})\} = 0$ olur. Buradan da $u(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) = (u\mathrm{a}) \wedge (u\mathrm{b})$ elde edilir. $\mathrm{a} \vee \mathrm{b} = (\mathrm{a} + \mathrm{b}) - (\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})$ eşitliğinden yararlanılarak $u(\mathrm{a} \vee \mathrm{b}) = (u\mathrm{a}) \vee (u\mathrm{b})$ elde edilir. Sağdan çarpım da benzer olarak gösterilir.

(ii) $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{E}$ olsun. f-cebiri tanımından $\mathrm{a}^{+}\mathrm{b}^{+} \perp \mathrm{a}^{+}\mathrm{b}^{-}$, $\mathrm{a}^{+}\mathrm{b}^{+} \perp \mathrm{a}^{-}\mathrm{b}^{+}$, $\mathrm{a}^{-}\mathrm{b}^{-} \perp \mathrm{a}^{+}\mathrm{b}^{-}$ ve $\mathrm{a}^{-}\mathrm{b}^{-} \perp \mathrm{a}^{-}\mathrm{b}^{+}$ vardır. Buradan

$$u_1 = (\mathrm{a}^{+}\mathrm{b}^{+} + \mathrm{a}^{-}\mathrm{b}^{-}) \perp (\mathrm{a}^{+}\mathrm{b}^{-} + \mathrm{a}^{-}\mathrm{b}^{+}) = u_2$$

bulunur. Aynı zamanda $\mathrm{ab} = u_1 - u_2$ olduğundan u_1 ile u_2 elemanları pozitiftir ve farkları da ab dır. O zaman $(\mathrm{ab})^{+} = u_1$ ve $(\mathrm{ab})^{-} = u_2$ olduğundan

$$|\mathrm{ab}| = (\mathrm{ab})^{+} + (\mathrm{ab})^{-} = u_1 + u_2 = (\mathrm{a}^{+} + \mathrm{a}^{-})(\mathrm{b}^{+} + \mathrm{b}^{-}) = |\mathrm{a}| \cdot |\mathrm{b}|$$

elde edilir.

(iii) $\mathrm{a} \perp \mathrm{b}$ ve c keyfi olsun. $|\mathrm{a}| \wedge |\mathrm{b}| = 0$ olduğundan $(|\mathrm{c}| \cdot |\mathrm{a}|) \wedge |\mathrm{b}| = 0$ dır. Yani $|\mathrm{ca}| \wedge |\mathrm{b}| = 0$ dır. Diğer bir ifadeyle $\mathrm{ca} \perp \mathrm{b}$ dır. Benzer olarak $\mathrm{ac} \perp \mathrm{b}$ dır.

(iv) $\mathrm{a} \perp \mathrm{b}$ ise (iii) den $\mathrm{ab} \perp \mathrm{b}$ elde edilir. Buradan $\mathrm{ab} \perp \mathrm{ab}$ yani $\mathrm{ab} = 0$ dır.

(v) $\forall$ $\mathrm{a} \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{a}^{+}\mathrm{a}^{-} = \mathrm{a}^{-}\mathrm{a}^{+} = 0$ dır. Buradan da

$$\mathrm{a}^2 = (\mathrm{a}^{+} - \mathrm{a}^{-})^2 = (\mathrm{a}^{+})^2 + (\mathrm{a}^{-})^2 \geq 0$$

dır. Ayrıca

$$\mathrm{aa}^{+} = (\mathrm{a}^{+} - \mathrm{a}^{-})\mathrm{a}^{+} = (\mathrm{a}^{+})^2 - \mathrm{a}^{-}\mathrm{a}^{+} = (\mathrm{a}^{+})^2$$

elde edilir. Benzer olarak $\mathrm{a}^{+}\mathrm{a} = (\mathrm{a}^{+})^2$ dır.

(vi) $(u - v)^{+} \wedge (v - u)^{+} = 0$ olduğundan $\{u(u - v)^{+}\} \wedge \{(v - u)^{+}v\} = 0$ olur. $\mathrm{f}^{+} \wedge \mathrm{g}^{+} = (\mathrm{f} + \mathrm{g})^{+}$ eşitlğinden yararlanılarak

$$\{u(u - v) \wedge (v - u)v\}^{+} = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\{(u^2 \wedge v^2) - uv\}^+ = \{(u^2 - uv) \wedge (v^2 - uv)\}^+ = 0 \text{ olur.}$$

Bu eşitlikten $u^2 \wedge v^2 \leq uv$ ve $u^2 \wedge v^2 \leq vu$ eşitsizlikleri sağlanır. $u^2 \vee v^2$ için ispat benzer olarak

$$(u - v)^+ \wedge (v - u)^+ = 0$$

eşitliğinden yararlanılarak

$$\{(u - v)^+ v\} \wedge \{u(v - u)^+\} = 0$$

olmasıyla gösterilir.

(vii) $$\begin{aligned}(u \wedge v)^2 &= \{u(u \wedge v)\} \wedge \{v(u \wedge v)\} \\ &= u^2 \wedge uv \wedge vu \wedge v^2 \\ &= u^2 \wedge v^2\end{aligned}$$

olduğundan

$$u^2 \wedge v^2 \leq (uv) \wedge (vu)$$

bulunur. $(u \vee v)^2$ için ispat benzer olarak gösterilir. ■

f-cebirlerine aşağıdaki örnekleri verebiliriz **(De. Pagter, 1981)**.

Örnek 4.1.9 Bir X topolojik uzayı üzerinde tüm sürekli reel fonksiyonların cebiri C(X) bir f- cebiridir **(De. Pagter, 1981)**.

Örnek 4.1.10 Bir X topolojik uzayı üzerinde tüm sınırlı sürekli reel fonksiyonların oluşturduğu Riesz uzayı $\mathrm{C_b(X)}$ bir f-cebiridir **(De. Pagter, 1981)**.

Tanım 4.1.11 E f-cebiri olmak üzere $\forall\ \mathrm{x, y} \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{x} \wedge \mathrm{y} = 0$ iken $\mathrm{xy} = 0$ ise E ye **hemen hemen f-cebiri** denir **(De. Pagter, 1981)**.

4.2 Orthomorfizmalar

Tanım 4.2.1 Bir Riesz uzayı üzerindeki bir $\mathrm{T : E \to E}$ operatörü, E nin her B bandı için $\mathrm{T(B) \subseteq B}$ ise **band koruyan operatör** adını alır. E den E ye tüm band koruyan opetatörleri B(E) ile ifade edeceğiz.
Aşağıdaki teorem band koruyan operatörlerin özelliklerini göstermektedir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Teorem 4.2.2 E bir Archimedean Riesz uzayı ve $\mathrm{T : E \to E}$ operatörü olsun. I_{x} , x in ürettiği ideal ve $\mathrm{B_x}$, x in ürettiği band olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) T band koruyan operatördür

(ii) $\mathrm{x \perp y}$ ise $\mathrm{Tx \perp y}$ dir

(iii) $\forall\ \mathrm{x \in E}$ için $\mathrm{Tx \in B_x}$ olur **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\mathrm{x \perp y}$ iken $I_{\mathrm{x}} \perp \mathrm{y}$ olduğunu gösterelim. $\forall\ k \in I_{\mathrm{x}}$ için $0 \leq |k| \leq \lambda|\mathrm{x}|$ olacak şekilde $0 < \lambda$ vardır.

$0 \leq |k| \wedge |\mathrm{y}| \leq \lambda|\mathrm{x}| \wedge |\mathrm{y}| \leq \lambda(|\mathrm{x}| \wedge |\mathrm{y}|) = 0$

dır. Böylece $k \perp \mathrm{y}$ dır. Buradan da $I_{\mathrm{x}} \perp \mathrm{y}$ elde edilir.

Şimdi de $\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$ iken $\mathrm{B_x} \perp \mathrm{y}$ olduğunu gösterelim. $\forall\, k \in \mathrm{B_x}$ için $k_n = |k| \wedge k|\mathrm{x}|$ alınırsa $(k_n) \subseteq I_{\mathrm{x}}$ ve $k_n \uparrow |k|$ dır. Dolayısıyla $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $k_n \in I_{\mathrm{x}}$ olduğundan $k_n \perp \mathrm{y}$ dır.

$$\begin{aligned} k_n \perp \mathrm{y} &\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ için } (|k_n| \wedge |\mathrm{y}|) = 0 \\ &\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ için } \sup(|k_n| \wedge |\mathrm{y}|) = 0 \\ &\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ için } |\mathrm{y}| \wedge \sup(|k_n|) = 0 \\ &\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ için } |\mathrm{y}| \wedge \sup(k_n) = 0 \\ &\Rightarrow |\mathrm{y}| \wedge |k| = 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{y} \perp k \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece $\mathrm{y} \perp \mathrm{B_x}$ elde edilir. T bir band koruyan operatör olduğu için $\mathrm{T(B_x)} \subseteq \mathrm{B_x}$ dır. Böylece $\mathrm{y} \perp \mathrm{B_x}$ olur. Buradan da $\mathrm{y} \perp \mathrm{T(B_x)}$ dır. Dolayısıyla $\mathrm{x} \in \mathrm{B_x}$ için $\mathrm{Tx} \perp \mathrm{y}$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\mathrm{x} \in \mathrm{E}$ olsun. Bu durumda, $\forall\, \mathrm{y} \in \mathrm{B_x^d}$ için $\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$ olur ve böylece $\forall\, \mathrm{y} \in \mathrm{B_x^d}$ için $\mathrm{Tx} \perp \mathrm{y}$ geçerli olur. Buradan da, $\mathrm{Tx} \in \mathrm{B_x^{dd}} = \mathrm{B_x}$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) B, E nin bir bandı olsun. $\mathrm{x} \in \mathrm{B}$ ise, $\mathrm{B_x} \subseteq \mathrm{B}$ ve böylece $\mathrm{Tx} \in \mathrm{B_x} \subseteq \mathrm{B}$ olur. Yani, $\mathrm{T(B)} \subseteq \mathrm{B}$ olduğundan T bir band koruyan operatördür. ■

Teorem 4.2.3 E bir Riesz uzayı ve $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ band koruyan operatörü verilsin. Bu durumda T operatörü ayrıklığı koruyan operatördür **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

İspat. T band koruyan operatör ile $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$ ise $\mathrm{Tx} \perp \mathrm{y}$ dir. Buradan da $\mathrm{Tx} \perp \mathrm{Ty}$ elde edilir. Böylece T ayrıklığı koruyan operatördür. ■

Teorem 4.2.4 E temel izdüşüm özelliğine sahip olsun. $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ operatörü E nin her sıra izdüşümü ile değişmeli olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün band koruyan olmasıdır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. İlk olarak T nin her sıra izdüşüm ile değişmeli olduğunu varsayalım. Bu durumda $\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{E}$ için,

$$\mathrm{T(x)} = \mathrm{TP_x(x)} = \mathrm{P_xT(x)} \in \mathrm{B_x}$$

olur ve böylece Teorem 4.2.2 den T operatörü band koruyandır.

Tersi için, T nin band koruyan olduğunu varsayalım ve $\mathrm{P_B}$ de bir sıra izdüşüm olsun.

$\mathrm{x} \in \mathrm{E}$ ise $\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z} \in \mathrm{B} \oplus \mathrm{B^d}$, ve $\mathrm{T(y)} \in \mathrm{B}$ ve $\mathrm{T(z)} \in \mathrm{B^d}$ olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla,

$$\mathrm{P_BT(x)} = \mathrm{P_BT_y} + \mathrm{P_BT_z} = \mathrm{T_y} = \mathrm{TP_B(x)}$$

dır. Böylece $\mathrm{P_BT} = \mathrm{TP_B}$ elde edilir. ■

Tanım 4.2.5 Bir Riesz uzayında $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ operatörü $|\mathrm{x}| \wedge |\mathrm{y}| = 0$ iken $|\mathrm{x}| \wedge |\mathrm{Ty}| = 0$ oluyorsa T operatörüne **orthomorfizma** denir.

Bir E Riesz uzayındaki orthomorfizmalar kümesi bir vektör uzayıdır ve bu vektör uzayı Orth(E) ile gösterilir. Yani,

$$\mathrm{Orth(E)} = \{\mathrm{T} \in \mathrm{L_b(E)} : \mathrm{x} \perp \mathrm{y} \;\Rightarrow\; \mathrm{Tx} \perp \mathrm{y}\}$$

dır.

Orth(E) , $\mathrm{L_b(E)}$ nin bir vektör alt uzaydır.

Diğer bir ifade ile E bir Archimedean Riesz uzayı olsun. E deki sıra sınırlı band koruyan operatöre **orthomorfizma** denir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Teorem 4.2.6 E bir Archimedean Riesz uzayı olsun. Sıralı vektör uzayı olan Orth(E), bir Archimedean Riesz uzayıdır ve $\forall\ \mathrm{T_1}, \mathrm{T_2} \in \mathrm{Orth(E)}$ ve $0 \leq u \in \mathrm{E}$ için

$$(\mathrm{T_1} \vee \mathrm{T_2})u = (\mathrm{T_1}u) \vee (\mathrm{T_2}u)$$

ve

$$(\mathrm{T_1} \wedge \mathrm{T_2})u = (\mathrm{T_1}u) \wedge (\mathrm{T_2}u)$$

eşitlikleri sağlanır.
Ayrıca, $\mathrm{T} \in \mathrm{Orth(E)}$ ve $0 \leq u \in \mathrm{E}$ için

$$(\mathrm{T}^+)u = (\mathrm{T}u)^+$$

$$(\mathrm{T}^-)u = (\mathrm{T}u)^-$$

$$|\mathrm{T}|u = |\mathrm{T}u|$$

eşitlikleri sağlanır (**Zaanen, 1983**).

İspat. $\mathrm{T} \in \mathrm{Orth(E)}$ Teorem 3.2.9 dan dolayı $|\mathrm{T}|$ var ve $\forall\ u \in \mathrm{E}$ için $|\mathrm{T}||u| = |\mathrm{T}u|$ olduğundan $|\mathrm{T}|$ sıra sınırlıdır. Ayrıca $u \perp v$ olduğundan

$$0 \leq \big||\mathrm{T}|u\big| \wedge |v| \leq \big||\mathrm{T}||u|\big| \wedge |v| = |\mathrm{T}||u| \wedge |v| = |\mathrm{T}u| \wedge |v| = 0$$

elde edilir. Buradan da $|\mathrm{T}| \in \mathrm{Orth(E)}$ dir. $\mathrm{S}, \mathrm{T} \in \mathrm{Orth(E)}$ için

$$\mathrm{S} \vee \mathrm{T} = \frac{1}{2}(\mathrm{S} + \mathrm{T} + |\mathrm{S} - \mathrm{T}|)$$

ve

$$\mathrm{S} \wedge \mathrm{T} = \frac{1}{2}(\mathrm{S} + \mathrm{T} - |\mathrm{S} - \mathrm{T}|)$$

eşitlikleri sağlandığından Orth(E) Riesz uzayıdır ve $\forall\ u \in \mathrm{E}^+$ için $(\mathrm{S} \vee \mathrm{T})(u) = \mathrm{S}(u) \vee \mathrm{T}(u)$ ve $(\mathrm{S} \wedge \mathrm{T})(u) = \mathrm{S}(u) \wedge \mathrm{T}(u)$ dır. $\mathrm{T} \in \mathrm{Orth(E)}_+$ iken $\forall\ \mathrm{x} \in \mathrm{E}^+$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}^+$ için

$$\begin{aligned}(n^{-1}\mathrm{T} \wedge 0) &= (n^{-1}\mathrm{Tx}) \wedge 0 \\ &= \mathrm{T}(n^{-1}\mathrm{x}) \wedge 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan Orth(E) Archimedean Riesz uzayı olduğu görülür.

$T_1, T_2 \in \mathrm{Orth}(E)$ ve $u \in E$ olsun. Bu durumda $T_1 - T_2 \in \mathrm{Orth}(E)$ olur. Buradan da $(T_1 - T_2)^+ \in \mathrm{Orth}(E)$ dir. $T_1 \vee T_2 = (T_1 - T_2)^+ + T_2$ eşitliğinden yararlanılarak $\forall\ u \in E^+$ için

$$\begin{aligned}(T_1 \vee T_2)u &= (T_1 - T_2)^+ u + T_2 u \\ &= (T_1 u - T_2 u)^+ + T_2 u \\ &= T_1 u \vee T_2 u\end{aligned}$$

ve yine $\forall\ u \in E^+$ için $T_1 \wedge T_2 = T_2 - (T_2 - T_1)^+$ eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}(T_1 \wedge T_2)u &= T_2 u - (T_2 - T_1)^+ u \\ &= T_2 u - (T_2 u - T_1 u)^+ \\ &= T_1 u \wedge T_2 u\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de diğer eşitlikler için Tanım 3.1.7 den ve Teorem 3.1.10 (i) den yararlanılarak

$$\begin{aligned}T^+(u) &= (T \vee 0)(u) \\ &= \tfrac{1}{2}(T + 0 + |T - 0|)(u) \\ &= \tfrac{1}{2}(|T| + T)(u) \\ &= \tfrac{1}{2}\big[|T|(u) + T(u)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big[(T \vee (-T))(u) + T(u)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big[(T(u) \vee (-T)(u)) + T(u)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big[\big(T(u) + T(u)\big) \vee \big((-T)(u) + T(u)\big)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}[2T(u) \vee 0] \\ &= T(u) \vee 0 \\ &= [T(u)]^+\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}T^-(u) &= \big((-T) \vee 0\big)(u) \\ &= \tfrac{1}{2}\big((-T) + 0 + |-T - 0|\big)(u) \\ &= \tfrac{1}{2}\big((-T) + |T|\big)(u) \\ &= \tfrac{1}{2}\big[(-T)(u) + |T|(u)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big[(-T)(u) + (T \vee (-T))(u)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big[(-T)(u) + T(x) \vee (-T)(u)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big[(-T)(u) + T(x) \vee (-T)(u) + (-T)(u)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big[0 \vee (-2T)(u)\big] \\ &= (-T)(u) \vee 0 \\ &= [T(u)]^-\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}|\mathrm{T}|u &= [\mathrm{T}\vee(-\mathrm{T})]u\\ &= \tfrac{1}{2}[\mathrm{T}+(-\mathrm{T})+|\mathrm{T}-(-\mathrm{T})|]u\\ &= \tfrac{1}{2}[\mathrm{T}u+(-\mathrm{T})u+|2\mathrm{T}u|]\\ &= \tfrac{1}{2}[0+2|\mathrm{T}u|]\\ &= |\mathrm{T}u|\end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Teorem 4.2.7 E bir Archimedean Riesz uzayı olsun. Orth(E) bileşke işlemi altında I operatörünü birim eleman kabul eden Archimedean f-cebiridir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. Orth(E) Teorem 4.2.6 dan dolayı Archimedean Riesz uzayıdır. Ayrıca Orth(E) nin üzerindeki çarpım bileşke işlemi olarak alındığında Orth(E) bir Riesz cebiridir. Şimdi Orth(E) nin bir f-cebiri olduğunu gösterelim. Buradan $\mathrm{T}\in\mathrm{Orth(E)}_+$ ve $\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2\in\mathrm{Orth(E)}$ olmak üzere $\mathrm{T}_1\wedge\mathrm{T}_2=0$ olduğundan $u\in\mathrm{E}^+$ için $\mathrm{T}_1u\wedge\mathrm{T}_2u=(\mathrm{T}_1\wedge\mathrm{T}_2)u=0$ dır. Buradan

$$(\mathrm{T}\mathrm{T}_1\wedge\mathrm{T}_2)(u)=\mathrm{T}\mathrm{T}_1u\wedge\mathrm{T}_2u=0$$

ve

$$\begin{aligned}0 &\le (\mathrm{T}_1\mathrm{T}\wedge\mathrm{T}_2)(u)\\ &= \mathrm{T}_1\mathrm{T}u\wedge\mathrm{T}_2u\\ &\le \{\mathrm{T}_1\ (\mathrm{T}u\ \vee u)\}\wedge\{\mathrm{T}_2\ (\mathrm{T}u\ \vee u)\}\\ &= (\mathrm{T}_1\wedge\mathrm{T}_2)(\mathrm{T}u\vee u)\\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan Orth(E) f-cebiridir. ∎

Teorem 4.2.8 E bir Dedekind tam Riesz uzayı ise I ile üretilen band B_I olmak üzere Orth(E)$=\mathrm{B}_I$ dır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. I birim operatör ile üretilen band B_I ise Teorem 3.3.16 dan dolayı $\mathrm{B}_I\subseteq\mathrm{Orth(E)}$ dır.

Tersi için de $\mathrm{T}\in\mathrm{Orth(E)}$ olsun. Orth(E) Arcimedean Riesz uzayı olduğuna göre I zayıf birimi $\mathrm{T}\wedge nI\uparrow\mathrm{T}$ dır. Buradan $\{\mathrm{T}\wedge nI\}\subseteq\mathrm{B}_I$ olur. Yani Orth(E)$\subseteq\mathrm{B}_I$ bulunur.

Böylece $\mathrm{B}_I\subseteq\mathrm{Orth(E)}$ ve Orth(E)$\subseteq\mathrm{B}_I$ olduğundan Orth(E)$=\mathrm{B}_I$ elde edilir. ∎

Teorem 4.2.9 (De Pagter Teoremi) E bir Archimedean f-cebiri olsun. e çarpmanın birimi olmak üzere $\forall\ \mathrm{x}\in\mathrm{E}^+$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$0\le\mathrm{x}-\mathrm{x}\wedge ne\le n^{-1}\mathrm{x}^2$$

dır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

Teorem 4.2.10 Bir E Riesz uzayında $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ bir orthomorfizma ise T operatörünün eşleniği T' operatörü $\mathrm{T}' : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}'$ ye bir orthomorfizmadır. Orth(E) den Orth(E$'$) ne $\mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ operatörü bir Riesz homomorfizmasıdır.
$\forall\ \mathrm{T} \in \mathrm{Orth(E)}$ için $|\mathrm{T}'| = |\mathrm{T}|'$ dır **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

İspat. $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ pozitif orthomorfizma olsun. Teorem 4.2.9 gereği Riesz homomorfizması olduğu ve $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq \mathrm{T} - \mathrm{T} \wedge nI \leq n^{-1}\mathrm{T}^2$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. T operatörünün eşleniği olan T' için de $\forall\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$0 \leq \mathrm{T}' - \mathrm{T}' \wedge nI' \leq \mathrm{T}' - (\mathrm{T} \wedge nI)' \leq n^{-1}\mathrm{T}^2$$

dır. Buradan da görüldüğü gibi T' orthomorfizmadır.

Diğeri için $\mathrm{T} \in \mathrm{Orth(E)}$ olsun. $0 \leq \mathrm{f} \in \mathrm{E}^{\sim}$ ve $\mathrm{x} \in \mathrm{E}^{+}$ için Teorem 3.2.14 ten dolayı

$$\big\langle \mathrm{f}, |\mathrm{Tx}| \big\rangle \leq \big\langle |\mathrm{T}'|\mathrm{f}, \mathrm{x} \big\rangle$$

dır. Dolayısıyla $|\mathrm{T}|' \leq |\mathrm{T}'|$ elde edilir. T pozitif olduğundan T' de pozitiftir ve $|\mathrm{T}'| \leq |\mathrm{T}|'$ dır. Böylece $|\mathrm{T}|' \leq |\mathrm{T}'|$ ve $|\mathrm{T}'| \leq |\mathrm{T}|'$ olduğundan $|\mathrm{T}'| = |\mathrm{T}|'$ bulunur. ■

Tanım 4.2.11 E bir Archimedean f-cebiri olmak üzere $\forall\ \mathrm{x} \in \mathrm{E}$ ve $u \in \mathrm{E}$ için

$$\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{Orth(E)}$$

$$u \to \mathrm{T}_u(x) = u.\mathrm{x}$$

olarak tanımlanır **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Teorem 4.2.12 E bir Archimedean f-cebiri olmak üzere

$$\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{Orth(E)}$$

$$u \to \mathrm{T}_u(x) = u.\mathrm{x}$$

operatörü f-cebir izomorfizmasıdır ve Orth(E)= E dir. Ayrıca E bir Archimedean Riesz uzayı olmak üzere Orth(Orth(E))=Orth(E) dir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. T nin lineer ve çarpmayı koruyan dönüşüm olduğunu gösterelim. $\mathrm{e} > 0$ olsun. e T nin çarpmaya göre birim elemanı olmak üzere $\mathrm{S} \in \mathrm{Orth(E)}$ için $\mathrm{T}_{\mathrm{S(e)}}(\mathrm{e}) = \mathrm{S(e)e} = \mathrm{S(e)}$ dir. Dolayısıyla $\mathrm{B_e} = \mathrm{E}$ olduğundan E üzerinde $\mathrm{T}_{\mathrm{S(e)}} = \mathrm{S}$, yani T örten olur. $u_1, u_2 \in \mathrm{E}$ için $\mathrm{T}_{u_1} = \mathrm{T}_{u_2}$ olmak üzere $\mathrm{T}_{u_1}(\mathrm{e}) = \mathrm{T}_{u_2}(\mathrm{e})$ olduğundan $u_1(\mathrm{e}) = u_2(\mathrm{e})$ dır. Buradan da $u_1 = u_2$ olur. Böylece T birebirdir. $u \in \mathrm{E}$, $u \geq 0$ ise $\forall\ \mathrm{x} \in \mathrm{E}^{+}$ için $\mathrm{T}_u(\mathrm{x}) = u.\mathrm{x} \geq 0$ olduğundan $\mathrm{T}_u \geq 0$ dır. Ayrıca $\mathrm{T}_u \geq 0$ ise $u = u\mathrm{e} = \mathrm{T}_u(\mathrm{e})$ olduğundan $u \geq 0$ dır. Böylece T, Riesz homomorfizması olur. Sonuç olarak T, f-cebir izomorfizmasıdır. Orth(E)= E olduğundan Orth(Orth(E))=Orth(E) olduğu kolayca görülür. ■

4.3 Merkezcil Operatör

Tanım 4.3.1 Reel veya kompleks bir Riesz uzayında tanımlı bir $T : E \to F$ operatörü birim operatörün bir çarpımı ile sınırlanıyorsa **merkezcil operatör** adını alır. Yani, T nin bir merkezcil operatör olması için gerek ve yeter koşul $\forall\, x \in E$ için $|Tx| \leq \lambda|x|$ eşitsizliğini sağlayan bir $\lambda > 0$ skalerinin var olmasıdır.

Merkezcil operatörlerinin kümesi Z(E) ile gösterilir ve Z(E) , bir E Riesz uzayının merkezi olarak isimlendirilerek

$$Z(E) = \{T \in \mathrm{Orth}(E) : |T| \leq \lambda I, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+\}$$

şeklinde ifade edilir.

Merkezcil operatörlerin özellikleri:

(i) Z(E) bir Riesz uzayıdır.

(ii) Her merkezcil operatörler regülerdir ve her pozitif merkezcil operatörler bir Riesz homomorfizmasıdır.

(iii) Genel olarak band koruyan operatörün sıra sınırlı olması gerekmektedir. Fakat Banach latiste band koruyan operatörler merkezcil operatörlere eşittir.

(iv) Merkezcil operatörler orthomorfizmalar sınıfının bir alt kümesidir. Yani

$$Z(E) \subseteq \mathrm{Orth}(E)$$

şeklinde ifade edilir **(Abramovich ve Aliprantis 2002)**.

Teorem 4.3.2 Bir E Riesz uzayında Z(E) bir hemen hemen f-cebirdir **(Zaanen, 1983)**.

İspat. $S, T \in Z(E)$ olsun. $S, T \geq 0$ ve $x \in E^+$ için

$Tx \leq \lambda_1 x$ olacak şekilde $\lambda_1 > 0$ ve

$Sx \leq \lambda_2 x$ olacak şekilde $\lambda_2 > 0$ vardır.

$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \lambda$ ve $S \wedge T = 0$ olsun.

Buradan

$$0 \leq (ST)x = S(Tx) \leq S(\lambda_1 x) = \lambda_1 Sx$$

$$0 \leq (ST)x = S(Tx) \leq \lambda_2 Tx$$

$$0 \leq (ST)x \leq \lambda_1 Sx \wedge \lambda_2 Tx = \lambda(Sx \wedge Tx) = \lambda(S \wedge T)x = 0$$

dır.

Böylece $ST = 0$ elde edilir. ∎

Teorem 4.3.3 (Abramovich-Veksler-Koldunov Teoremi) Bir E Banach latisde verilen $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ operatörü için aşağıdaki özellikler denktir.

(i) T bir merkezcil operatördür

(ii) T bir orthomorfizmadır

(iii) T bir band koruyan operatördür

Teoremden dolayı E bir Banach latis olduğundan

$$\mathrm{Orth(E)} = \mathrm{Z(E)} = \mathrm{B(E)}$$

dır **(Abramovich ve Aliprantis 2002)**.

Teorem 4.3.4 E bir Archimedean Riesz uzayı ise Z(E) de bir Archimedean Riesz uzayıdır. $\forall\ \mathrm{T}, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in \mathrm{Z(E)}$ ve $0 \leq u \in \mathrm{E}$ için

$$(\mathrm{T}_1 \vee \mathrm{T}_2)u = (\mathrm{T}_1 u) \vee (\mathrm{T}_2 u)$$

ve

$$(\mathrm{T}_1 \wedge \mathrm{T}_2)u = (\mathrm{T}_1 u) \wedge (\mathrm{T}_2 u)$$

eşitlikleri sağlanır.

Ayrıca, $\mathrm{T} \in \mathrm{Z(E)}$ ve $0 \leq u \in \mathrm{E}$ için

$$(\mathrm{T}^+)u = (\mathrm{T}u)^+$$

$$(\mathrm{T}^-)u = (\mathrm{T}u)^-$$

$$|\mathrm{T}|u = |\mathrm{T}u|$$

eşitlikleri sağlanır (**Zaanen, 1983**).

İspat. Teorem 4.3.3 te ifade edilen Z(E)= Orth(E) vardır. Dolayısıyla Teorem 4.2.6 da verilen ispat benzer şekilde geçerlidir. ■

Tanım 4.3.5 E bir Archimedean f-cebiri olmak üzere $\forall\ \mathrm{x} \in \mathrm{E}$ ve $u \in \mathrm{E}$ için

$$\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{Z(E)}$$

$$u \to \mathrm{T}_u(x) = u.\mathrm{x}$$

olarak tanımlanır **(Meyer ve Nieberg 1991)**.

Teorem 4.3.6 E bir Archimedean f-cebiri olmak üzere

$$\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{Z(E)}$$

$$u \to \mathrm{T}_u(x) = u.\mathrm{x}$$

operatörü f-cebir izomorfizmasıdır ve Z(E)= E dir. Ayrıca E bir Archimedean Riesz uzayı olmak üzere Z(Z(E))=Z(E) dir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. Teorem 4.3.3 te ifade edilen Z(E)= Orth(E) vardır. Dolayısıyla Teorem 4.2.12 de verilen ispat benzer şekilde geçerlidir. ■

Teorem 4.3.7 Bir E Banach latis üzerinde Z(E) bir Banach cebiridir **(Abramovich ve Aliprantis 2002)**.

İspat. E bir Banach latis olsun. $\forall\ \mathrm{S},\mathrm{T}\in \mathrm{Z(E)}$ için
$\|\mathrm{ST}\| \le \|\mathrm{S}\|\|\mathrm{T}\|$ dır.
$\|\mathrm{T}\| = \sup\limits_{||x||\le 1} \|\mathrm{Tx}\| = \sup\limits_{||x||\le 1} \||\mathrm{Tx}|\| \le \sup\limits_{||x||\le 1} \||\mathrm{T}||x|\| = \||\mathrm{T}|\|$ den
$\|T\| \le \||\mathrm{T}|\|$ elde edilir. ■

Teorem 4.3.8 Bir Banach latiste her merkezcil operatör band izdüşüm operatörleri ile değişmelidir **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. Bir Banach latiste $\mathrm{T}:\mathrm{E}\to\mathrm{E}$ bir merkezcil operatör ve $\mathrm{P}:\mathrm{E}\to\mathrm{E}$ bir band izdüşüm olsun.
$\mathrm{P(E)} = \mathrm{B}$ bir izdüşüm olduğundan $\mathrm{E} = \mathrm{B}\oplus\mathrm{B^d}$ ve T bir band koruyan operatör olduğundan da $\mathrm{T(B)} \subseteq \mathrm{B}$ ve $\mathrm{T(B^d)} \subseteq \mathrm{B^d}$ dir.
$\mathrm{x}\in\mathrm{E}$ için $\mathrm{x} = \mathrm{y}\oplus\mathrm{z},\ \mathrm{y}\in\mathrm{B},\ \mathrm{z}\in\mathrm{B^d}$ yazılabilir. Buradan $\mathrm{Ty}\in\mathrm{B}$ ve $\mathrm{Tz}\in\mathrm{B^d}$ olur.
$\forall\ \mathrm{x}\in\mathrm{E}$ için

$$\mathrm{(TP)x = T(Px) = Ty = P(Ty) = P(Ty) + P(Tz) = P(Ty + Tz) = P(Tx) = (PT)x}$$

dır.
Böylece TP = PT elde edilir.
Sonuç olarak tüm band izdüşümler Z(E) nin elemanıdır. ■

Teorem 4.3.9 E bir Dedekind tam Banach latis ise B_I, I ile üretilen band olmak üzere Z(E)= B_I dır **(Aliprantis ve Burksinshaw, 1985)**.

İspat. I birim operatörü ile üretilen bir band B_I ise Teorem 3.3.16 dan dolayı $\mathrm{B}_I \subseteq \mathrm{Z(E)}$ dir.

Tersi için $0 \le \mathrm{T}\in\mathrm{Z(E)}$ olsun. Z(E) Archimedean Riesz uzayı olduğundan I zayıf birimi $\mathrm{T}\wedge nI \uparrow \mathrm{T}$ dır. Buradan $\{\mathrm{T}\wedge nI \uparrow \mathrm{T}\} \subseteq \mathrm{B}_I$ olur. Yani, $\mathrm{Z(E)} \subseteq \mathrm{B}_I$ bulunur.

Böylece $\mathrm{B}_I \subseteq \mathrm{Z(E)}$ ve $\mathrm{Z(E)} \subseteq \mathrm{B}_I$ olduğundan Z(E)= B_I elde edilir. ■

Teorem 4.3.10 Bir E Riesz uzayında $\mathrm{Z(E')}$, E nin dualinin merkezi olmak üzere
$\forall\ \mathrm{S'},\mathrm{T'}\in\mathrm{Z(E')}$ ve $\forall\ \mathrm{f}\in\mathrm{E'_+}$ için

$$\mathrm{(S'\vee T')f = S'f \vee T'f}$$

ve

$$\mathrm{(S'\wedge T')f = S'f \wedge T'f}$$

dır **(Zaanen, 1997)**.

İspat. $S', T' \in Z(E')$ için $|T'|,\ S' \vee T',\ S' \wedge T'$ merkezcil operatör olduğu gösterilmelidir.
$\forall\ f \in E'$ için $|T'f| \leq \lambda |f|$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır.
$u \in E'_+$ için $|T'|u = \sup\limits_{|f|\leq u} |T'f| \leq \sup\limits_{|f|\leq u} \lambda|f| = \lambda u$ olduğundan $|T'| \in Z(E')$ dır.
Şimdi de
$S' \vee T',\ S' \wedge T'$ nın $Z(E')$ ye ait olduğunu göstermek için Teorem 3.1.10 dan

$$S' \vee T' = \frac{1}{2}(S' + T' + |T' - S'|)$$

$$S' \wedge T' = \frac{1}{2}(S' + T' - |T' - S'|)$$

latis işlemleri kullanılır.
$S', T' \in Z(E')$ için
Eğer $g \wedge u = 0$ ise $g \wedge T'u = 0$ ve $S'g \wedge T'u = 0$ dır.
Buradan $S'g + T'u = S'g \vee T'u$ dır.
$\forall\ f \in E'_+$ için

$$\begin{aligned}(S' \vee T')f &= \sup\{S'g + T'u : g \wedge u = 0 \text{ ve } g + u = f\}\\ &= \sup\{S'g \vee T'u : g \wedge u = 0 \text{ ve } g + u = f\}\\ &\leq S'f \vee T'f\end{aligned}$$

olduğundan

$$(S' \vee T')f = S'f \vee T'f$$

$\forall\ f \in E'_+$ için

$$\begin{aligned}(S' \wedge T')f &= \frac{1}{2}(S' + T' - S' \vee T')f\\ &= \frac{1}{2}(S'f + T'f - S'f \vee T'f)\\ &= S'f \wedge T'f.\end{aligned}$$

$0 \leq S' - S' \wedge T' \in Z(E')$ ve $0 \leq T' - S' \wedge T' \in Z(E')$ olduğundan

$$(S' - S' \wedge T') \wedge (T' - S' \wedge T') = 0$$

dır.
$\forall\ f \in E'_+$ için

$$\begin{aligned}0 &= [(S' - S' \wedge T') \wedge (T' - S' \wedge T')]f\\ &= [S'f - (S' \wedge T')f] \wedge [T'f - (S' \wedge T')f]\\ &= (S' - S' \wedge T')f \wedge (T' - S' \wedge T')f\\ &= S'f \wedge T'f - (S' \wedge T')f\end{aligned}$$

veya

$$(S' \wedge T')(f) = S'f \wedge T'f$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3.11 Bir Banach latiste, Z(E) , E nin merkezi ve Z(E$'$) de E nin dualinin merkezi olmak üzere $T \in Z(E)$ iken $T' \in Z(E')$ dir **(Orhon, 2010)**.

İspat. $T \in Z(E)$ ve $x \in E^+$ için $-\lambda x \leq Tx \leq \lambda x$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır. $\forall\, x \in E^+$ için ve $f \in E'_+$ için

$$-\lambda f(x) \leq f(Tx) = (T'f)(x) \leq \lambda f(x)$$

den

$$-\lambda f \leq T'f \leq \lambda f \quad , \quad T' \in Z(E')$$

dır.

$0 \leq T \in Z(E)$ olsun. $T_n = T \wedge nI$, $(n = 1, 2, \cdots)$ olacak şekilde bir (T_n) dizisi alalım. Buradan $T \wedge nI \uparrow T$ ve E de $T_n \uparrow T$ olduğundan E$'$ de $T'_n \uparrow T'$ olur. Böylece $T' \in Z(E')$ elde edilir. ■

5 SONUÇLAR

Bu tezde Riesz uzayında pozitif operatörler ve orthomorfizmalar üzerinde çalışılmıştır. Band koruyan operatörlerin orthomorfizmalar sınıfına dahil olduğu hakkında bilgi verilmiştir. Bir Banach latiste band koruyan operatörler kümesi olan B(E), orthomorfizmalar kümesi olan Orth(E) ve orthomorfizmaların bir alt kümesi olan merkezcil operatörler kümesi Z(E) arasındaki ilişkiler sonucu

$$\mathrm{Orth(E)} = \mathrm{Z(E)} = \mathrm{B(E)}$$

olduğu ifade edilmiştir. Merkezcil operatörlerin orthomorfizmalar ile aynı sınıfta yer aldığı durumlar görülmüştür.

Ayrıca Dedekind tam bir Banach latiste merkezcil operatörler incelenmiştir ve bununla birlikte merkezcil operatörlerin eşleniğinden yararlanılarak önemli ifadelere yer verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Abramovich, Y. A. ; Aliprantis, C.D. *An Invitation to Operator Theory*, **2002**.

[2] Abramovich, Y. A. ; Aliprantis, C.D. *Problems in Operator Theory*, **2002**.

[3] Aliprantis, C.D. ; Burkinshaw, O. *Positive operators*, Academic Press, New York, **1985**.

[4] De Pagter, B. *f- algebras and Orthomorphisms*, Thesis, Leiden, **1981**.

[5] Gök, Ö. *Fonksiyonel Analize Giriş*, YTÜ yayını, **1997**.

[6] Meyer, P. ; Nieberg, *Banach Lattices*, Berlin, **1991**.

[7] Orhon, M. *The Ideal Center of Dual of a Banach Lattice*, **2010**, 841-847.

[8] Zaanen, A. C. *Riesz Spaces I*, North Holland, Amsterdam, **1971**.

[9] Zaanen, A. C. *Riesz Spaces II*, North Holland, Amsterdam, **1983**.

[10] Zaanen, A. C. *Introduction Operator Theory in Riesz Spaces*, Verlag Berlin Heidelberg New York, **1997**.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Hüseyin BAHADIR
Doğum Yeri ve Tarihi	:	KIRŞEHİR / 1988
Yabancı Dili	:	İngilizce
E-mail	:	huseyin_bahadir88@hotmail.com

Eğitim Durumu

İlköğretim	:	Vali Mithat Saylam İlköğretim Okulu, (Mezuniyet Okul Birincisi) 1994-2002
Ortaöğretim	:	Kızılırmak Lisesi, (Mezuniyet Okul Birincisi) 2002-2005
Lisans	:	Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2005-2009
Pedagojik Eğitimi	:	Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi 2010-2011
Yüksek Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2014.-2017

İş Deneyimi

2013-...	:	Kırşehir Valiliği / Bilgisayar İşletmeni
2012-2013	:	Kırşehir Polis Meslek Yüksek Okulu İdari ve Mali İşler Muhasebe
2010-2012	:	Emniyet Genel Müdürlüğü Koruma Dairesi Başkanlığı İdari Büro
2009-2010	:	Kaman Türk Telekom O. Kulaksız Mes. ve Tek. And. Lisesi Matematik Öğretmeni