T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCHRODINGER OPERATÖRÜNE KARŞILIK GELEN MARCINKIEWICZ İNTAGRAL OPERATÖRÜNÜN MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Okan KUZU

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2014

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCHRODINGER OPERATÖRÜNE KARŞILIK GELEN MARCINKIEWICZ İNTAGRAL OPERATÖRÜNÜN MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Okan KUZU

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Doç. Dr. Ali AKBULUT

KIRŞEHİR 2014

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan
Prof. Dr. Rabil AYAZOĞLU

Üye
Doç. Dr. Ali AKBULUT

Üye
Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

Üye
Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Üye
Prof. Dr. Levent KULA

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2014

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Doktora tezi olarak sunduğum ”Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Marcinkiewicz İntegral Operatörünün Morrey Uzaylarında Sınırlılığı” başlıklı çalışmamın, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynaklarda eksiksiz olarak gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını bildiririm.

Okan KUZU

SCHRODINGER OPERATÖRÜNE KARŞILIK GELEN MARCINKIEWICZ İNTEGRAL OPERATÖRÜNÜN MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Doktora Tezi

Okan KUZU

Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Ekim 2014

ÖZET

Bu çalışmada Schrödinger operatörüne karşılık gelen Marcinkiewicz integral operatörünün Morrey uzaylarındaki sınırlılıkları incelenmiş ve birçok yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü olan ”Giriş” bölümünde, literatürde bu konu ile ilgili araştırmaları olan birçok matematikçi hakkında bilgi verilmiş ve bu çalışmanın amacından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmamız ile ilgili olan temel kavramlar, uzaylar ve operatörler hakkında genel bilgilere ve bazı temel tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Schrödinger operatörüne karşılık gelen Marcinkiewicz integral operatörünün ve komütatörünün genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde Schrödinger operatörüne karşılık gelen kaba çekirdekli Marcinkiewicz integral operatörünün ve komütatörünün vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı gösterilmiştir.

Çalışmamızın sonuncu bölümü olan beşinci bölümde, Schrödinger operatörüne karşılık gelen kaba çekirdekli Marcinkiewicz integral operatörünün ve komütatörünün Guliyev tarafından tanımlanan genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılığı verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Schrödinger operatörü, Morrey uzayı, Marcinkiewicz integral operatörü, Komütatör, A_p Muckenhoupt sınıfı.

Sayfa Adedi: 93

Danışman: Doç. Dr. Ali AKBULUT

BOUNDEDNESS OF MARCINKIEWICZ INTEGRAL OPERATORS ASSOCIATED WITH SCHRODINGER OPERATORS ON MORREY SPACES

Ph.D. Thesis

Okan KUZU

Ahi Evran University

Institute of Science

October 2014

ABSTRACT

In this study, the boundedness of Marcinkiewicz integral operators associated with Schrödinger operators on Morrey spaces are investigated and many new results are obtained.

This study is arranged in five chapters, in ”The Introduction” chapter which is first part, informations are given about many mathematicians studying in this field in the literature and also about purpose of this study.

In the second chapter, some basic definitions and general informations about basic concepts, spaces and operators related to this study are given.

In the third chapter, the boundedness of Marcinkiewicz integral operators associated with Schrödinger operators its commutators on generalized Morrey spaces is proved.

In the fourth chapter, the boundedness of Marcinkiewicz integral operators with rough kernel associated with Schrödinger operators and its commutators on vanishing generalized Morrey spaces is proved.

In the fifth chapter which is last part of this study, the boundedness of Marcinkiewicz integral operators with rough kernel associated with Schrödinger operators and its commutators on generalized weighted Morrey spaces introduced by Guliyev is proved.

Keywords: Schrödinger operators, Morrey spaces, Marcinkiewicz integral operators, commutators, A_p Muckenhoupt class.

Number of Pages 93

Supervisor: Doç. Dr. Ali AKBULUT

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca olduğu gibi tez çalışmalarımın da her aşamasında her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyen; kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Ali AKBULUT'a ve her ihtiyaç duyduğumda bana yardımcı olan, değerli ve derin bilgileriyle ışık tutan, önüme çıkan her konuda yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'e minnettarlığımı sunarım.

Doktora öğrenimim boyunca manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen başta saygıdeğer hocam Prof. Dr. Levent KULA olmak üzere bölümümüzün değerli hocalarına, tez çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili arkadaşım Arş. Gör. Fatih DERİNGÖZ'e şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışma dönemimde de hep yanımda olan kıymetli anne ve babama, beni bu tarz çalışmalara teşvik eden değerli kardeşlerime, bu zorlu süreçte her zaman yanımda olan ve sonsuz desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşime ve biricik kızıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca doktora süresince maddi ve manevi desteğini benden esirgemeyen Türkiye Bilimsel ve Teknoloji Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK[1]), Yüksek Öğretim Kurulu Öğretim Üyesi Yetiştirme Programı'na (ÖYP [2]) ve Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (BAP [3]) teşekkür ederim.

Okan KUZU

[1] Tezin yazarı Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında desteklenlenmiştir.

[2] Tezin yazarı Öğretim Üyesi Yetiştirme Programı kapsamında desteklenmiştir.

[3] Tezin yazarı Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi kapsamında PYO-FEN 4001.14.006 ve PYO-FEN 4003.13.004 proje numaraları ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklamalar**
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$suppf$	f fonksiyonunun desteği
$L_1^{loc}(E^n)$	E^n de lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$L_p(\omega)$	Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$L_{p,\kappa}(\omega)$	Ağırlıklı Morrey uzayı
$M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$M_{p,\varphi}(\omega)$	Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı
$VM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Vanishing Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$BMO(\mathbb{R}^n)$	BMO Uzayı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
$\mathcal{T}$	Singüler integral operatörü
$\mathcal{I}_\alpha$	Riesz potansiyeli
μ_Ω	Marcinkiewicz integral operatörü
$\mu_j^{\mathcal{L}}$	Schrödinger operatörüne karşılık gelen Marcinkiewicz integral operatörü
$\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}$	Schrödinger operatörüne karşılık gelen Marcinkiewicz integral operatörünün komütatörü
$\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$	Schrödinger operatörüne karşılık gelen kaba çekirdekli Marcinkiewicz integral operatörü
$\mu_{j,\Omega,b}^{\mathcal{L}}$	Schrödinger operatörüne karşılık gelen kaba çekirdekli Marcinkiewicz integral operatörünün komütatörü

1 GİRİŞ

Klasik Morrey uzayları 1938 yılında C.B. Morrey [66] tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları araştırılırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenilirken ortaya çıkarılmıştır.

Morrey uzayları Lebesgue uzaylarının bir uzantısı olarak değerlendirileceğinden klasik operatörlerin sınırlılıklarının Morrey uzaylarında araştırılması oldukça doğal ve önemlidir. Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün ve singüler integral operatörünün sınırlılık koşulları F. Chiarenza ve M. Frasca [18] tarafından gösterilmiştir. Ayrıca D.R. Adams [1] tarafından Riesz potansiyelin sınırlılığı çalışılmıştır. Harmonik analizde bu operatörlerin ağırlıklı eşitsizliklerini çalışmak önemli bir yere sahip olup, $L_p(\omega)$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılıklar R. Coifman ve C. Fefferman [23], B. Muckenhoupt [67], B. Muckenhoupt ve R. Wheeden [69] tarafından elde edilmiştir. Bu sonuçlar $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey, $L_{p,\kappa}(\omega)$ ağırlıklı Morrey ve $M_{p,\varphi}(\omega)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları gibi birçok uzaylara genişletilmiştir. Morrey uzaylarının genişlemesi olan $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayları 1990 yılında T. Mizuhara [65] tarafından tanımlanmış ve singüler integral operatörünün bu uzaylardaki sınırlılığı araştırılmıştır. 1994 yılında E. Nakai [72] tarafından harmonik analizde önemli bir yere sahip olan maksimal integral operatörünün, Riesz potansiyelinin ve singüler integral operatörünün $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarınaki sınırlılığı araştırılmıştır. Aynı yıllarda V.S. Guliyev [42] tarafından doktora tezinde, harmonik analizin integral operatörlerinin genişletilmiş lokal Morrey uzayındaki sınırlılığı E. Nakai'nin şartlarından daha geniş şartlar ile araştırılmıştır. 2009 yılında V.S Guliyev, matematik literatüründe önem verilen $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normunu tanımlayarak, $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayında harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığını Mizuhara ve Nakai'ye göre daha geniş şartlar altında araştırmıştır. Ayrıca V.S. Guliyev [45], [46] tarafından $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında maksimal, potansiyel ve singüler integral operatörlerin sınırlılıkları ortaya koyduğu yeni metot ile elde edilmiştir. 2009 yılında Y. Komori ve S. Shirai [59] tarafından $L_{p,\kappa}(\omega)$ ağırlıklı Morrey uzayları tanımlanarak harmonik analizin klasik operatörlerinin sınırlılıkları bu uzaylarda araştırılmıştır. 2011 yılında V.S. Guliyev [41] tarafından $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayını ve $L_{p,\kappa}(\omega)$ ağırlıklı Morrey uzayını kapsayan $M_{p,\varphi}(\omega)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı tanımlanmış ve harmonik analizin integral operatörlerinin ve yüksek mertebeden komütatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılıkları araştırılmıştır. Ayrıca $M_{p,\varphi}(\omega)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı V.S. Guliyev ile birlikte A. Akbulut, F.Ch. Alizadeh, R.Ch. Mustafayev, A. Serbetci gibi araştırmacılar tarafından da çalışılmıştır (bkz. [39], [47], [50], [51] [58], [71]). V.S. Guliyev [42], [43] tarafından harmonik analizin integral operatörleri için doktora tezinde ortaya koyduğu yeni metot ile lie gruplarında ve $\mathbb{R}^n$ de sınırlılıkları elde edilmiştir. V.S. Guliyev ile birlikte V.I. Burenkov, H.V. Guliyev, A. Serbetci, T. Tararykova, A. Gogotashvili, R.Ch Mustafayev, S. Samko ve H. Hasanov gibi araştırmacılar, Morrey-tipli uzaylar başta olmak üzere diğer fonksiyon uzaylarında da yeni sonuçlar elde etmiştir (bkz. [11]-[15], [43], [48], [49]).

Marcinkiewicz integral operatörü ilk olarak 1938 yılında J. Marcinkiewicz [62] tarafından bir boyutta ortaya atılmıştır. 1958 yılında E.M. Stein [81] tarafından n-boyutta Marcinkiewicz integral operatörü tanımlanmıştır. 1960 yılında ise L. Hörmander [54] tarafından parametrik Marcinkiewicz integral operatörü tanımlanmış ve bu operatörün L_p sınırlılığı gösterilmiştir. Ayrıca V.S. Guliyev, A. Al-Salman, H. Al-Qassem, L. Cheng, Y. Pan, Y. Ding D. Fan, S. Lu, D. Yang, A. Torchinsky, S. Wang gibi birçok araştırmacı tarafından L_p Lebesgue ve $L_{p,\lambda}$ Morrey uzaylarında, Marcinkiewicz integral operatörleri ile ilgili çalışmalar yapılmış ve bu uzaylardaki sınırlılıkları ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir (bkz. [5], [8], [24]-[27], [29], [44], [60], [85], [87]).

Son yıllarda, fonksiyon uzayları ve Schrödinger operatörleri için harmonik analizin integral operatörlerinin teorisinde büyük gelişmeler olmuştur. Bu durum, analizde bazı önemli problemlerin anlaşılmasında daha derin bir anlayışa yol açmıştır.

Ters Hölder eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan V potansiyelli $-\Delta + V$ formundaki Schrödinger operatörüne karşılık gelen harmonik analizde L_p Lebesgue ve $L_{p,\lambda}$ Morrey uzaylarının özel yeri ve ağırlığı vardır. Ayrıca Schrödinger operatörüne karşılık gelen diferensiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılması da bu uzaylarda önemli bir yere sahiptir. B. Bongioanni, A. Cabral ve E. Harboure [9], T. Martinez [63], L. Tang ve J. Dong [83] tarafından Schrödinger operatörüne karşılık gelen harmonik analizin integral operatörlerinin L_p Lebesgue uzayı ve $L_p(\omega)$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılıkları araştırılmıştır.

Bu tezde V.S Guliyev tarafından verilen ispat tekniği yardımıyla Schrödinger operatörüne karşılık gelen $\mu_j^{\mathcal{L}}$ Marcinkiewicz integral operatörünün ve $\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}$ komütatörünün $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılıkları ile Schrödinger operatörüne karşılık gelen kaba çekirdekli $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$ Marcinkiewicz integral operatörünün ve $\mu_{j,\Omega,b}^{\mathcal{L}}$ komütatörünün $VM_{p,\varphi}$ vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki ve $M_{p,\varphi}(\omega)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılıkları ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Schrödinger operatörüne karşılık gelen $\mu_j^{\mathcal{L}}$ Marcinkiewicz integral operatörünün $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı incelenmiş ve M_{p,φ_1} genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer M_{p,φ_2} genelleştirilmiş Morrey uzayına ve M_{1,φ_1} genelleştirilmiş Morrey uzayından WM_{1,φ_2} zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayına sınırlılığını sağlayan (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeterlilik şartları elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar "Journal of Mathematical Inequalities" isimli dergide "Marcinkiewicz integrals associated with Schrödinger operator on generalized Morrey spaces" başlığı ile yayımlanmıştır. Ayrıca $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $j = 1, \ldots, n$ için $\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}$ komütatörünün $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı da elde edilmiştir.

Schrödinger operatörüne karşılık gelen kaba çekirdekli $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$ Marcinkiewicz integral operatörünün $VM_{p,\varphi}$ vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı incelenmiş ve VM_{p,φ_1} vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer VM_{p,φ_2} vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayına ve VM_{1,φ_1} vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayından WVM_{1,φ_2} zayıf vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayına sınırlılığını sağlayan (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeterlilik şartları elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar "Azerbaijan Journal of Mathematics" isimli dergide "Marcinkiewicz integrals with rough kernel associated with Schrödinger operator on vanishing generalized Morrey spaces" başlığı ile yayımlanmıştır. Ayrıca $1 < q \leq \infty$ için $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $j = 1, \ldots, n$ için $\mu_{j,\Omega,b}^{\mathcal{L}}$ komütatörünün $VM_{p,\varphi}$ vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı da elde edilmiştir.

Schrödinger operatörüne karşılık gelen kaba çekirdekli $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$ Marcinkiewicz integral operatörünün ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $\mu_{j,\Omega,b}^{\mathcal{L}}$ komütatörünün $M_{p,\varphi}(\omega)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılığı incelenmiş, $q' < p < \infty$ ve

$\omega \in A_{p/q'}$ veya $1 < p < q$ ve $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega}$ ve $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}$ operatörlerinin $M_{p,\varphi_1}(\omega)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayından bir diğer $M_{p,\varphi_2}(\omega)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayına sınırlılığını sağlayan (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeterlilik şartları elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar uluslararası indeksli dergide "Commutators of Marcinkiewicz integrals associated with Schrödinger operator on generalized weighted Morrey spaces" başlığı ile yayımlanması için gönderilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR, UZAYLAR VE OPERATÖRLER

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 ([77]) X bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir $\mathfrak{M}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathfrak{M}$ sınıfı X üzerinde bir **σ-cebir** olarak adlandırılır.

(i) $X \in \mathfrak{M}$

(ii) $\forall E \in \mathfrak{M}, \quad {}^cE = X - E \in \mathfrak{M}$

(iii) $\forall n = 1, 2, ...$ için $\quad E_n \in \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$

Bu durumda $(X, \mathfrak{M})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay**, $\mathfrak{M}$ deki her bir kümeye de **ölçülebilir küme** adı verilir.

Tanım 2.1.2 ([77]) $(X, \mathfrak{M})$ bir ölçülebilir uzay olsun. Bir $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) Her $A \in \mathfrak{M}$ için $\mu(A) \geq 0$,

(iii) $\mathfrak{M}$ nin her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerin sağlıyorsa bu fonksiyona $\mathfrak{M}$ üzerinde bir **ölçü fonksiyonu** veya **ölçü** adı verilir. Eğer her $A \in \mathfrak{M}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ölçüsüne **sonlu ölçü** denir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü **σ-sonlu** olarak adlandırılır. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** denir. Ayrıca $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ **ölçü uzayı** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 ([77]) $(X, \mathfrak{M})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : f(x) > t\} \in \mathfrak{M}$ oluyorsa f fonksiyonu **ölçülebilirdir** denir. Ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$ ile gösterilir.

$\mathfrak{M}$ nin elemanları $\mathbb{R}^n$ nin (Lebesgue) ölçülebilir alt kümeleri olarak adlandırılır ve μ, $\mathbb{R}^n$ de (**Lebesgue) ölçü** olarak adlandırılır. Lebesgue ölçüsü $\mathbb{R}^3$ deki hacmin doğal bir genişlemesi olduğundan $A \in \mathfrak{M}$ için $\mu(A)$, A nın ölçüsü veya hacmi olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.4 ([77]) $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme, ölçüsü sıfır olan bir kümenin tümleyeni üzerinde veya kendisi $\mathfrak{M}$ ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, o önerme **hemen hemen her yerde** doğrudur denir.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1 \cdots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ tam uzayı üzerinde f fonksiyonunun **(Lebesgue) integrali**

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int \cdots \int f(x_1, ..., x_n)dx_1 \cdots dx_n$$

ile gösterilir.

$B = B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$, merkezi x, yarıçap uzunluğu r olan açık yuvarı ve ${}^cB(x,r)$ onun tümleyenini göstersin. $|B(x,r)|$, $B(x,r)$ açık yuvarının Lebesgue ölçüsü ve $\nu_n = |B(0,1)|$ olmak üzere

$$|B(x,r)| = \nu_n r^n = \frac{2\pi^{n/2} r^n}{n\Gamma(n/2)} = \frac{1}{n}|S^{n-1}|r^n$$

biçimindedir. Burada $|S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $\mathbb{R}^n$ de $n \geq 1$ için yarıçapı 1 olan $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ küresinin yüzey alanıdır. $\Gamma(z)$ gamma fonksiyonu ve bir z kompleks sayısı için $\mathrm{Re} z > 0$ olmak üzere $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ ile tanımlanır.

Bu çalışmada $Q = Q(x_0, r)$ ile x_0 merkezli ve kenar uzunluğu r olan küpü ifade edeceğiz. Verilen bir Q küpü ve $\lambda > 0$ için λQ ile Q nun mekezine sahip ve kenar uzunluğu Q nun kenar uzunluğunun λ katı olan küpü göstereceğiz. Ayrıca $A \lesssim B$ gösterimini $A \leq CB$, $C > 0$ eşitsizliğinin yerine kullanacağız. Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ ise $A \approx B$ yazılır ve A, B ye eşdeğerdir denir. Bu çalışma boyunca C farklı sabitleri gösterecektir. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ nin her bir kompakt alt kümesinde p. kuvveti integrallenebilen tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayı $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Bu uzay $p = 1$ için $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) \equiv L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ şeklinde gösterilen lokal integrallenebilir fonksiyonların sınıfını gösterir.

2.2 L_p Lebesgue Uzayı ve $L_p(\omega)$ Ağırlıklı Lebesgue Uzayı

L_p Lebesgue uzayı sonlu boyutlu vektör uzayı için p normunun genelleşmesi kullanılarak tanımlanmış bir fonksiyon uzayıdır. Bourbaki grubuna göre ilk olarak 1910 yılında F. Riesz [10] tarafından tanıtılmasına rağmen 1958 yılında Fransız matematikçi H. Lebesgue'nin adını almıştır. Fonksiyonel analizde, Banach uzaylarının ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını L_p Lebesgue uzayı oluşturur. Lebesgue uzayının fizik, istatistik, finans, mühendislik ve diğer disiplinlerde uygulamaları vardır.

Tanım 2.2.1 $0 < p \leq \infty$ ve f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere Lebesgue uzayı

$$L_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f - \text{ölçülebilir } : \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

ile verilir, burada $0 < p < \infty$ için

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ durumunda ise

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

biçiminde verilir.

Tanım 2.2.2 $WL_p(\mathbb{R}^n)$ zayıf L_p uzayı $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{WL_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} t \left| \{ y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > t \} \right|^{1/p} < \infty$$

quasi-normuna sahip f ölçülebilir fonksiyonlarının uzayıdır. Kolayca gösterilebilir ki $1 \leq p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n) \subset WL_p(\mathbb{R}^n)$ dir.

Örnek 2.2.3

(1) $f(x) = |x|^\alpha \notin L_p(\mathbb{R}^n)$

(2) $f(x) = |x|^\alpha \chi_{B(0,1)}(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha > -\frac{n}{p}$

(3) $f(x) = |x|^\alpha \chi_{^cB(0,1)}(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \alpha < -\frac{n}{p}$

(4) $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \notin L_p(\mathbb{R}^n)$, $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \in WL_p(\mathbb{R}^n)$

Teorem 2.2.4 Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise L_p bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.5 (Hölder eşitsizliği) ([53], [76]) X ölçülebilir herhangi bir küme ve $p > 1$ için $1/p + 1/q = 1$ olsun. Bu durumda $f \in L_p(X)$ ve $g \in L_q(X)$ olmak üzere

$$\|fg\|_{L_1(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)} \|f\|_{L_q(X)}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 2.2.6 (Minkowski eşitsizliği) ([77]) X ölçülebilir herhangi bir küme ve $p \geq 1$ için $f, g \in L_p(X)$ ise

$$\|f+g\|_{L_p(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)} + \|g\|_{L_p(X)}$$

eşitsizliğine Minkowski eşitsizliği denir.

Teorem 2.2.7 $L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $1 \leq p \leq \infty$ için bütün $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının birleşimlerini içerir. Daha genel olarak $0 < p < q < \infty$ için

$$L_q(\mathbb{R}^n) \subseteq L_q^{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.8 (Lebesgue diferensiyelleme teoremi) Eğer $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

sağlanır.

Tanım 2.2.9 ([77]) Bir f fonksiyonunun desteği

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

ile tanımlanır. Yani f fonksiyonunun desteği onun sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesinin kapanışıdır. Eğer supp$f$ sınırlı bir küme ise f fonksiyonuna **kompakt desteğe sahiptir** denir.

Tanım 2.2.10 ([77]) $\mathcal{T}$, reel değerli ölçülebilir fonksiyonların bir (X, μ) ölçü uzayı üzerinde tanımlanmış ve bir (Y, ν) ölçü uzayı üzerinde bütün kompleks değerli hemen her yerde sonlu ölçülebilir fonksiyonların kümesinde değerler alan bir operatör olsun. Bu durumda her f, g ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\mathcal{T}(f+g) = \mathcal{T}(f) + \mathcal{T}(g) \quad \text{ve} \quad \mathcal{T}(\lambda f) = \lambda \mathcal{T}(f)$$

ise $\mathcal{T}$ ye **lineer operatör**,

$$|\mathcal{T}(f+g)| \leq |\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)| \quad \text{ve} \quad |\mathcal{T}(\lambda f)| \leq |\lambda| \, |\mathcal{T}(f)|$$

ise $\mathcal{T}$ ye **altlineer operatör**, bir $K > 0$ sabiti için

$$|\mathcal{T}(f+g)| \leq K\left(|\mathcal{T}(f)| + |\mathcal{T}(g)|\right) \quad \text{ve} \quad |\mathcal{T}(\lambda f)| \leq |\lambda|\,|\mathcal{T}(f)|$$

ise $\mathcal{T}$ ye **quasilineer operatör** denir. Altlineerlik, quasilinerliğin özel bir durumudur.

Tanım 2.2.11 ((p, q) tipli operatör) ([60])

$1 \leq p, q \leq \infty$, (X, μ) ve (Y, ν) iki ölçü uzayı ve $\mathcal{T}$, $L_p(X, \mu)$ den tanım ve görüntü kümeleri sırasıyla Y ve $\mathbb{C}$ olan ölçülebilir fonksiyonların uzayına bir operatör (altlineer) olsun. Eğer $q < \infty$ olmak üzere

$$\nu\left(\{y \in Y : |\mathcal{T}f(y)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

ise $\mathcal{T}$ zayıf (p, q) tipinden ve eğer $q = \infty$ iken $L_p(X, \mu)$ den $L_\infty(Y, \nu)$ ye sınırlı bir operatör ise zayıf (p, ∞) tipindedir denir.

Eğer $\mathcal{T}$, $L_p(X, \mu)$ den $L_q(Y, \nu)$ ya sınırlı ise kuvvetli (p, q) tiplidir denir. Yani, her $f \in L_p(X, \mu)$ için

$$\|\mathcal{T}f\|_q \leq C\|f\|_p$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Buradan $q = \infty$ olması durumunda zayıf ve kuvvetli tip çakışmaktadır.

Eğer $\mathcal{T}$, kuvvetli (p, q) tipli ise aynı zamanda zayıf (p, q) tiplidir. Gerçekten, eğer $E_\lambda = \{y \in Y : |\mathcal{T}f(y)| > \lambda\}$ olarak alırsak, bu durumda

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left|\frac{\mathcal{T}f(x)}{\lambda}\right|^q d\nu \leq \frac{\|\mathcal{T}f\|_q^q}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

olur.

Eğer $(X, \mu) = (Y, \nu)$ ve $\mathcal{T}$ özdeşlik operatörü olursa zayıf (p, p) klasik Chebyshev eşitsizliği olur.

Teorem 2.2.12 (Marcinkiewicz interpolasyon teoremi) ([28]) (X, μ) ve (Y, ν) ölçü uzayları olsunlar. $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ olmak üzere $\mathcal{T}$, $L_{p_0}(X, \mu) + L_(p_1)(X, \mu)$ den Y üzerindeki ölçülebilir fonksiyonlara giden ve zayıf (p_0, p_0) ve zayıf (p_1, p_1) tipli bir altlineer operatör olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$, $p_0 < p < p_1$ için kuvvetli (p, p) tiplidir.

Tanım 2.2.13 (A_p Muckenhoupt sınıfı) ([67]) Eğer $1 < p < \infty$ olmak üzere herhangi bir $B = B(x,r)$ yuvarı için

$$\begin{aligned}[\omega]_{A_p} &= \sup_B [\omega]_{A_p(B)} \\ &= \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1} < \infty \end{aligned} \tag{2.1}$$

ise ω ağırlık fonksiyonu A_p Muckenhoupt sınıfındandır denir. Burada supremum bütün B yuvarları üzerinden alınmaktadır ve $1/p+1/p'$ biçimindedir. Burada Hölder eşitsizliğini kullanarak bütün B yuvarları için

$$[\omega]_{A_p(B)}^{1/p} = |B|^{-1}\|w\|_{L_1(B)}^{1/p}\|w^{-1/p}\|_{L_{p'}(B)} \geq 1$$

olur. $p = 1$ iken, hemen hemen her x için

$$M\omega(x) \leq C\omega(x) \tag{2.2}$$

olacak şekilde $C > 1$ varsa $\omega \in A_1$ dir ve (2.2) eşitsizliğini sağlayan C sayısının infimumu $[\omega]_{A_1}$ ile gösterilir.

p ve p' üsleri ile Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$1 = \frac{1}{|B|}\int_B dx = \frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{1/p}\omega(x)^{-1/p}dx \leq [\omega]_{A_p}^{1/p}$$

elde edilir.

(2.1) eşitsizliğinde $p \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx \leq C\exp\left(\frac{1}{|B}\int_B \log\omega(x)dx\right)$$

elde edilir ve eşitsizlik sağlandığında $\omega \in A_\infty$ denir. Ayrıca, $p = \infty$ iken $A_\infty = \bigcup_{1\leq p<\infty} A_p$ ile tanımlanır. A_∞ için verilen bu iki tanım eşdeğerdir (bkz. [36]).

A_p sınıfı 1972 yılında Muckenhoupt [67] tarafından ağırlıklı $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \omega dx)$ uzayı üzerinde tanımlı Hardy-Littlewood maximal operatörünün sınırlılıkları ile ilgili çalışmalarında tanımlanmış ve $\varepsilon > 0$ için

$$A_p \subset A_{p-\varepsilon}$$

olduğu gösterilmiştir.

$\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$ Muckenhoupt ağırlıklarının en önemli örneklerinden biri $-n < \alpha < n(p-1)$ iken $\omega(x) = |x|^\alpha$ fonksiyonudur. Eğer $-n < \alpha \leq 0$ olarak alınırsa $\omega \in A_1$ elde edilir. $0 < \delta < 1$ ise bu durumda $\omega(x) = |x|^{-n(1-\delta)} \in A_1$ ve $\omega(x) = |x|^{-n(p-1)(1-\delta)} \in A_p$ elde edilir.

Eğer ω bir ağırlık ve $1/\omega$ lokal integrallenebilir ise bu durumda $1/\omega$ da ayrıca bir ağırlıktır. Verilen bir ω ağırlığı ve bir E ölçülebilir kümesi için

$$\omega(E) = \int_E \omega(x)dx$$

notasyonunu E kümesinin ω-ölçüsünü gösterir. Ağırlıklar lokal integrallenebilir fonksiyonlar olduklarından dolayı bir yuvardaki bütün E kümeleri için $\omega(E) < \infty$ olur.

Lemma 2.2.14 ([28]) Eğer $\omega \in A_p$ ise bu durumda $w \in A_{p-\varepsilon}$ sağlanır ve

$$[\omega]_{A_{p-\varepsilon}} \leq C[\omega]_{A_p}$$

olacak şekilde bir C sayısı vardır ve burada $\varepsilon \sim [\omega]_{A_p}^{-\frac{1}{p-1}}$ şeklindedir.

Önerme 2.2.15 ([28])

(1) $1 \leq p < q$ olmak üzere $A_p \subset A_q$ sağlanır.

(2) $1 < p < \infty$ olmak üzere $A_p = \bigcup_{q<p} A_q$ sağlanır.

(3) $1/p + 1/p' = 1$ olmak üzere $\omega \in A_p$ olması için gerek ve yeter şart $\omega^{1-p'} \in A_{p'}$ olmasıdır.

(4) $w_0, w_1 \in A_1$ ise bu durumda $\omega_0 \omega_1^{1-p} \in A_p$ olur.

(5) $\omega \in A_p$, $1 \leq p < \infty$ ise bu durumda $\omega^{1+\epsilon} \in A_p$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır.

Tanım 2.2.16 ([28]) Verilen bir w ağırlık fonksiyonu için B herhangi bir yuvar olmak üzere eğer $\omega(2B) \leq C\omega(B)$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa ω **doubling şartını sağlar** denir ve $\omega \in \Delta_2$ şeklinde yazılır.

Lemma 2.2.17 ([59]) Eğer $\omega \in \Delta_2$ iken

$$\omega(2Q) \geq C\omega(Q)$$

olmak üzere $C > 1$ sabiti varsa ω ters doubling şartını sağlar.

Lemma 2.2.18 ([37]) $1 \leq p < \infty$, $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda

(1) $\omega \in \Delta_2$ sağlanır. Ayrıca her $\lambda > 1$ için

$$\omega(\lambda B) \leq \lambda^{np}[\omega]_{A_p}\omega(B)$$

elde edilir.

(2) Eğer $\omega \in A_\infty$ ise bu durumda $\omega \in \Delta_2$ sağlanır. Ayrıca her $\lambda > 1$ için

$$\omega(\lambda B) \leq 2^{\lambda^n}[\omega]_{A_\infty}^{\lambda^n}\omega(B)$$

elde edilir.

(3)

$$Mf(x) \leq [\omega]_{A_p}^{1/p} M_\omega\left(|f|^p\right)(x)^{1/p}$$

eşitsizliği sağlanır ve burada

$$M_\omega f(x) = \sup_{B \ni x} \omega(B)^{-1} \int_B |f(y)|\, \omega(y)dy$$

biçimindedir.

(4) Her B yuvarı ve bir $S \subset B$ ölçülebilir kümesi için

$$\frac{\omega(S)}{\omega(B)} \leq C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^\delta \tag{2.3}$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $\delta > 0$ sayısı vardır.

ω ağırlık fonksiyonu, (2.3) eşitsizliğini sağlamak üzere, Muckenhoupt [68], Coifman ve Fefferman [23] tarafından $\omega \in A_\infty$ olduğu gösterilmiştir.

Uyarı 2.2.19 Eğer $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < n/\alpha$ ve $1/q = 1/p - \alpha/n$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) Eğer $p > 1$ ise bu durumda $\omega \in A_{p,q} \Longleftrightarrow \omega^q \in A_{q\frac{n-\alpha}{n}} \Longleftrightarrow \omega^q \in A_{1+\frac{q}{p'}} \Longleftrightarrow \omega^{-p'} \in A_{1+\frac{p'}{q}}$ olur.

(2) Eğer $p > 1$ ise bu durumda $\omega \in A_{p,q} \Longleftrightarrow \omega^q \in A_q$ ve $\omega^p \in A_p$ olur.

(3) Eğer $p = 1$ ise bu durumda $\omega \in A_{1,q} \Longleftrightarrow \omega^q \in A_1$ olur.

Tanım 2.2.20 $1 \leq p \leq \infty$, ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, $L_p(\omega) \equiv L_p(\mathbb{R}^n, w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$\|f\|_{L_{p,\omega}} \equiv \|f\|_{L_{p,\omega}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

normuna sahip bütün bütün ölçülebilir f fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır. $p = \infty$ durumunda ise $L_\infty(\omega) \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n, \omega)$ de norm

$$\|f\|_{L_{\infty,\omega}} \equiv \|f\|_{L_{\infty,\omega(\mathbb{R}^n)}} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \, \omega(x)$$

ile tanımlanır.

2.3 BMO Uzayı

BMO (Bounded Mean Oscillation) uzayı, 1961 yılında John ve Nirenberg [56] tarafından ortaya konulmuştur. BMO uzayı L_∞ uzayı ile benzer özelliklere sahiptir ve sıklıkla L_∞ yerine kullanılır. Klasik singüler integral operatörler L_∞ uzayından L_∞ uzayına sınırlı olmamasına rağmen L_∞ uzayından BMO uzayına sınırlıdır. Fefferman 1971 yılında BMO uzayının H^1 Hardy uzayına dual olduğunu göstermiştir.

Tanım 2.3.1 f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|f\|_* = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}| dy < \infty$$

ile verilen $\| \cdot \|_*$ yarı-normu ile tanımlı Banach uzayıdır. Burada $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy$$

dır. BMO uzayı $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına eşit değildir. Fakat $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ dır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \left| f(y) - f_{B(x,r)} \right| dy \\
&\qquad \leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy + \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \left| f_{B(x,r)} \right| dy \\
&\qquad = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy + |f_{B(x,r)}| \\
&\qquad \leq 2 \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy \\
&\qquad \leq 2||f||_\infty
\end{aligned}$$

ve buradan

$$||f||_* \leq 2||f||_\infty$$

elde edilir.

$||f||_* \leq 2||f||_\infty$ olduğundan $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ sağlanır. Her sınırlı (ölçülebilir) fonksiyon BMO uzayındandır. Ancak sınırlı olmayan BMO fonksiyonları da vardır. $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olan fakat $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olmayan tipik bir örnek $\log|x|$ verilebilir. Şimdi BMO fonksiyonlarına pekçok örnek vermeyi sağlayan bir sonucu verelim.

Teorem 2.3.2 ([36]) Eğer ω bir A_1 ağırlığı ise bu durumda sadece $[\omega]_{A_1}$ e bağlı bir norm ile $\log \omega \in BMO$ sağlanır.

Şimdi BMO uzayına ait olmayan bir fonksiyon örneği verelim.

Örnek 2.3.3 $g(x) = sign(x) \log \frac{1}{|x|}$ fonksiyonu $BMO([-1,1])$ uzayına ait değildir. Gerçekten $0 < h < 1$ ve $I \equiv [-h, h]$ için $g_1 = 0$ ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|}\int_I |g(y) - g_1|dy &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left|\log\frac{1}{|x|}\right|dx = \frac{1}{h}\int_0^h \log\frac{1}{x}dx \\ &= 1 + \log\frac{1}{h} \longrightarrow \infty, \quad h \longrightarrow 0 \text{ iken} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu örnek bir fonksiyonun mutlak değeri BMO sınıfına ait ise bu fonksiyonun bir BMO fonksiyonu olmasını gerektirmeyeceğini gösterir.

Uyarı 2.3.4 ([56])

(1) Her $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha > 0$ için

$$|\{x \in B : |f(x) - f_B| > \alpha\}| \leq C_1 |B| e^{-C_2\alpha/\|f\|_*}, \qquad \forall B \subset \mathbb{R}^n$$

olacak şekilde pozitif C_1 ve C_2 sayıları vardır. Bu eşitsizlik John-Nirenberg eşitsizliği olarak bilinir.

(2) John-Nirenberg eşitsizliği $1 < p < \infty$ için

$$\|f\|_* \approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0}\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\left|f(y) - f_{B(x,r)}\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

olmasını gerektirir.

(3) $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $0 < 2r < t$ için

$$\left| f_{B(x,r)} - f_{B(x,t)} \right| \leq C \|f\|_* \ln \frac{t}{r} \tag{2.4}$$

olacak şekilde x, r, t ve f fonksiyonundan bağımsız pozitif bir C sayısı vardır.

Uyarı 2.3.5

(i) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $h \in \mathbb{R}^n$ ise bu durumda $f(\cdot - h) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f(\cdot - h)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

dır.

(ii) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ ise bu durumda $f(\lambda x) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

dır.

(iii) Eğer $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$\|f\|_{BMO} \approx \sup_{Q} \inf_{c \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c| \, dx$$

dır.

2.4 $L_{p,\lambda}$ Morrey Uzayı

Klasik Morrey uzayları 1938 yılında C.B. Morrey tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları araştırılırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenilirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının önemli uygulamaları Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik problemlerde ve potansiyel teoride ortaya çıkmıştır.

Tanım 2.4.1 $1 \leq p < \infty,\ 0 \leq \lambda \leq n,\ f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $L_{p,\lambda} \equiv L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$L_{p,\lambda} := \left\{ f : \ ||f||_{L_{p,\lambda}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $||f||_{L_{p,\lambda}}$ normu

$$||f||_{L_{p,\lambda}} \equiv ||f||_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde verilir.

$\lambda = 0$ için $L_{p,0} \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ dir. Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise bu durumda $L_{p,\lambda} = \theta$ olur. Burada θ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0 a denk olan bütün fonksiyonların kümesini göstermektedir.

$WL_{p\lambda} \equiv WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile bütün $f \in WL_p^{loc}$ fonksiyonlarının uzayı olan zayıf Morrey uzayını göstereceğiz. Burada,

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_{p,\lambda}(B(x,r))} < \infty$$

şeklindedir.

Lemma 2.4.2 $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $L_{p,n} \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{L_{p,n}} = v_n^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olup, burada $v_n = |B(0,1)|$ dır.

İspat. $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\left(t^{-n} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq v_n^{1/p} ||f||_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olur. Buradan $f \in L_{p,n}$ ve

$$\|f\|_{L_{p,n}} \leq v_n^{1/p} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

şeklindedir. $f \in L_{p,n}$ olmak üzere Lebesgue yakınsaklık teoreminden (bkz. [82])

$$\lim_{t\to\infty} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy = |f(x)|^p$$

olur. Bu durumda

$$|f(x)| = \left(\lim_{t\to\infty} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq v_n^{-1/p} \|f\|_{L_{p,n}}$$

şeklindedir. Buradan $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dır ve

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq v_n^{-1/p} \|f\|_{L_{p,n}}$$

olur. ∎

Lemma 2.4.3 $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $\alpha = \frac{n-\lambda}{p}$ için

$$\|f\|_{L_{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

dır ve buradan $L_{p,\lambda} \subset L_{1,n-p}$ olur. Burada $1/p + 1/p' = 1$ dır.

İspat. $f \in L_{p,\lambda}$, $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda < n$ ve $\alpha p = n - \lambda$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,t)} |f(y)| dy &\le \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{B(x,t)} dy \right)^{1/p'} \\
&= v_n^{1/p'} t^{n/p'} \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
t^{\alpha-n} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy &\le v_n^{1/p'} t^{\alpha-n/p} \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\
&= v_n^{1/p'} \left(t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\
&\le v_n^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $f \in L_{1,n-\alpha}$ ve

$$\|f\|_{L_{1,n-\alpha}} \le v_n^{1/p'} \|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

şeklindedir ■

2.5 $L_{p,\kappa}(\omega)$ Ağırlıklı Morrey Uzayı

$L_{p,\kappa}(\omega)$ ağırlıklı Morrey uzayı 2009 yılında Komori ve Shirai [59] tarafından tanımlanmış ve Hardy-Littlewood maximal operatörleri ve Calderón-Zygmund operatörleri gibi harmonik analizin klasik operatörlerinin sınırlılıkları bu uzaylarda araştırılmıştır.

Tanım 2.5.1 $1 \le p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $L_{p,\kappa}(\omega) \equiv L_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n, \omega)$ ağırlıklı Morrey uzayı

$$\|f\|_{L_{p,\kappa}(\omega)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \omega\left(B(x,r)\right)^{-\frac{\kappa}{p}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,r))} < \infty$$

ile bütün lokal integrallenebilir fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WL_{p,\kappa}(\omega) \equiv WL_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n, \omega)$ ile

$$\|f\|_{WL_{p,\kappa}(\omega)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \omega\left(B(x,r)\right)^{-\frac{\kappa}{p}} \|f\|_{WL_{p,\omega}(B(x,r))} < \infty$$

olmak üzere bütün lokal integrallenebilir fonksiyonların zayıf ağırlıklı Morrey uzayı gösterilir.

Uyarı 2.5.2 ([84])

(1) Eğer $\omega \equiv 1$ ve $0 < \lambda < n$ olmak üzere $\kappa = \lambda/n$ ise bu durumda $L_{p,\lambda/n}(1) = L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzayıdır.

(2) $\omega \in \Delta_2$ olsun. Eğer $\kappa = 0$ ise bu durumda $L_{p,0}(\omega) = L_p(\omega)$ olur. Eğer $\kappa = 1$ ise, bu durumda ω ye göre Lebesgue diferensiyelleme teoreminden $L_{p,1}(\omega) = L_\infty(\omega)$ elde edilir.

2.6 $M_{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayı

Morrey uzaylarının genişlemesi olan $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı 1990 yılında Mizuhara [65] tarafından tanımlanmış ve singüler integral operatörünün bu uzaylardaki sınırlılığı araştırılmıştır. 1994 yılında Nakai [72] tarafından harmonik analizde önemli bir yere sahip olan maksimal integral operatörünün, Riesz potansiyelinin ve singüler integral operatörünün $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı araştırılmıştır. $M_{p,\varphi}$ geneleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normlu hali ilk olarak 2009 yılında Guliyev [38] tarafından tanımlanmış ve harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığı Mizuhara ve Nakai'ye göre daha geniş şartlar altında araştırılmıştır. Ayrıca Guliyev [45], [46] tarafından $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında maksimal, potansiyel ve singüler integral operatörlerin sınırlılıkları ortaya koyduğu yeni metot ile elde edilmiştir.

$M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı Mizuhara [65] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.6.1 ([65]) $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ ile

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır. Burada $WL_p(B(x,r))$ uzayı ile

$$\|f\|_{WL_p(B(x,r))} \equiv \|f\chi_{B(x,r)}\|_{WL_p(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

şeklindeki bütün ölçülebilir f fonksiyonlarını içeren zayıf L_p uzayı ifade edilir.

Ayrıca doğal topoloji ile verilen $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ uzayları her $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için $f\chi_B \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $f\chi_B \in WL_p(\mathbb{R}^n)$ şeklindeki bütün f fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda}{p}}$ için

$$L_{p,\lambda} = M_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda}{p}}}\ , \qquad WL_{p,\lambda} = WM_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda}{p}}}$$

olduğu görülür.

$M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleşmiş normlu hali Guliyev [38] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.6.2 [38] $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ ile

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\, |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

normalleşmiş normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\, |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

normalleşmiş normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ için

$$L_{p,\lambda} = M_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}\ , \qquad WL_{p,\lambda} = WM_{p,\varphi}\Big|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

olduğu görülür.

Harmonik analizin integral operatörlerinin $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılıklarını elde etmek amacıyla (φ_1,φ_2) üzerindeki şart için tartışan birçok çalışma vardır. Guliyev [38] tarafından (φ_1,φ_2) çifti için

$$\int_r^\infty t^\alpha \varphi_1(x,t)\frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r) \tag{2.5}$$

şartı getirilmiştir. Burada, C sayısı x ve r den bağımsız pozitif bir sayıdır. Guliyev [2], [46] tarafından Calderón-Zygmund singüler integral operatörünün ve $1 < p < q < \infty$, $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olmak üzere, Riesz potansiyelinin, $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı elde edilmiş ve $x \in \mathbb{R}^n$ ve $1 \le p < \infty$ için

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}} dt \le \varphi_2(x,r) \qquad r > 0 \tag{2.6}$$

daha zayıf şart tanımlanmıştır.

Eğer (φ_1, φ_2) çifti (2.5) şartını sağlarsa, bu durumda (2.6) şartını da sağlar. Ancak tersi doğru değildir (bkz. [46]).

(φ_1, φ_2) çifti (2.6) ve

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}}} \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r)$$

şartlarını sağlamak üzere, Guliyev [2], [46] tarafından kaba çekirdekli $T_{\Omega,\alpha}$ kesirli integral operatörünün ve $[b, T_{\Omega,\alpha}]$ komütatörünün genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılığı elde edilmiştir.

2.7 $M_{p,\varphi}(\omega)$ Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzayı

2009 yılında Komori ve Shirai [59] tarafından tanımlanan $L_{p,\kappa}(\omega)$ ağırlıklı Morrey uzayları ile aynı yıllarda Guliyev [38] tarafından tanımlanan $M_{p,\varphi}$ geneleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normlu halini kapsayan $M_{p,\varphi}(\omega)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları 2011 yılında Guliyev [41] tarafından tanımlanmış ve harmonik analizin integral operatörlerinin ve yüksek mertebeden komütatörlerinin bu uzaylardaki sınırlılıkları araştırılmıştır. Ayrıca $M_{p,\varphi}(\omega)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı Guliyev ile birlikte Akbulut, Alizadeh, Mustafayev, Serbetci gibi araştırmacılar tarafından da çalışılmıştır (bkz. [39], [47], [50], [51], [58], [71]).

$M_{p,\varphi}(\omega)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı Guliyev [41] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.7.1 ([41])$\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde bir pozitif ölçülebilir fonksiyon ve ω, $\mathbb{R}^n$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olsun. $M_{p,\varphi}(\omega) \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n, \omega)$

olmak üzere $1 \leq p < \infty$ için

$$\begin{aligned} \|f\|_{M_{p,\varphi}(\omega)} &\equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n,\omega)} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L_{p,\omega}} < \infty \end{aligned}$$

normuna sahip bütün $f \in L^{loc}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Ayrıca $WM_{p,\varphi}(\omega) \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n,\omega)$ ile

$$\begin{aligned} \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\omega)} &\equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n,\omega)} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{WL_{p,\omega}} < \infty \end{aligned}$$

normuna sahip bütün $f \in WL^{loc}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş ağırlıkı Morrey uzayı olarak tanımlanır.

Uyarı 2.7.2

(1) Eğer $\omega \equiv 1$ ise, bu durumda $M_{p,\varphi}(1) = M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayıdır.

(2) Eğer $\varphi(x,r) \equiv \omega(B(x,r))^{\frac{\kappa-1}{p}}$ ise, bu durumda $M_{p,\varphi}(\omega) = L_{p,\kappa}(\omega)$ ağırlıklı Morrey uzayıdır.

(3) Eğer $\omega \equiv 1$ ve $0 < \lambda < n$ olmak üzere $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ ise, bu durumda $M_{p,\varphi(1)} = L_{p,\lambda}$ klasik Morrey uzayı ve $WM_{p,\varphi(1)} = WL_{p,\lambda}$ zayıf Morrey uzayıdır.

(4) Eğer $\varphi(x,r) \equiv \omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}$ ise, bu durumda $M_{p,\varphi}(\omega) = L_p(\omega)$ ağırlıklı Lebesgue uzayıdır.

Guliyev [41], [50] tarafından her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ olduğunda $1 \leq p < q < \infty$ için $C > 0$ olmak üzere

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)\omega(B(x,s))^{\frac{1}{p}}}{\omega(B(x,t))^{\frac{1}{q}}}\frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r) \tag{2.7}$$

şeklinde bir ağırlık şartı tanımlanmıştır.

$\omega \in A_p$ ve $1 \leq p < q < \infty$ için (φ_1, φ_2) çifti (2.7) veya

$$\int_r^\infty \ln^k\left(e + \frac{t}{r}\right)\frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)(\omega(B(x,s)))^{\frac{1}{p}}}{\omega(B(x,t))^{\frac{1}{q}}}\frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r)$$

şartlarını sağlamak üzere, Guliyev [41] tarafından $\mathcal{T}_\alpha$ operatörünün ve $[b,\mathcal{T}_\alpha]^k$ komütatörünün $M_{p,\varphi}(\omega)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında sınırlılığı elde edilmiştir.

2.8 Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü, Riesz Potansiyeli, Singüler İntegral Operatörü ve Komütatör Operatörü

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ilk olarak 1930 yılında $n = 1$ için Hardy ve Littlewood [52] tarafından 1939 yılında Wiener [88] tarafından $n > 1$ için kompleks analizin uygulamalarına yönelik olarak tanımlanmıştır. Maksimal fonksiyon analizde pekçok operatörün sınırlılığında çok önemli bir role sahiptir. Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun farklı tanımları aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.8.1 (Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu) $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(0,r)|^{-1} \int_{B(0,r)} |f(x-y)|dy \tag{2.8}$$

ile tanımlanır. Bu fonksiyon $+\infty$ a eşit olabilir.

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu yuvar yerine küp alınarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer Q_r, $[-r,r]^n$ kübü ise $M'f$ merkezli Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{Q_r} |f(x-y)|\, dy \tag{2.9}$$

ile tanımlanır. $n = 1$ iken M ve M' çakışır. Eğer $n > 1$ ise bu durumda

$$C_1 M'f(x) \leq Mf(x) \leq C_2 M'f(x)$$

olacak şekilde sadece n ye bağlı C_1 ve C_2 sabitleri vardır. Bu eşitsizlikten dolayı M ve M' operatörleri uygun koşullara göre değiştirilebilir. Ayrıca, M^*f merkezli olmayan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$M^*f(x) = \sup_{B(x_0,r)\ni x} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(y)|dy \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır. Burada supremum x i içeren ve kenarları eksenlere paralel olan bütün $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarları üzerinden alınmaktadır. M ve M^* noktasal olarak eşdeğerdir.

Uyarı 2.8.2 (2.8)-(2.10) ifadeleri için her $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$C_0 Mf(x) \leq C_1 M'f(x) \leq C_2 M^*f(x) \leq C_3 Mf(x)$$

eşitsizliğini sağlayan n ye bağlı $C_i(i = 0, 1, 2, 3)$ sayıları vardır. Mf, $M'f$ ve M^*f Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonları noktasal olarak eşdeğerdir.

Uyarı 2.8.3 $f \in L_1^{loc}$ olmak üzere $Mf(x)$ Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de alt yarı sürekli ölçülebilir bir fonksiyondur.

M Hardy-Littlewood maksimal operatörü altlineer ve homojen bir operatördür. Yani,

$$M(f+g) \leq Mf + Mg \quad \text{ve} \quad M(\lambda f) = \lambda(Mf), \;\; \forall \lambda \geq 0$$

sağlanır.

Hardy-Littewood maksimal operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayındaki sınırlılığı $1 < p \leq \infty$ olmak üzere $n = 1$ için Hardy-Littlewood [52] tarafından $n > 1$ için Wiener [88] tarafından araştırılmıştır

Uyarı 2.8.4 M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı değildir. Gerçekten; $n = 1$ ve $x \geq 1$ durumunda $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ için

$$Mf(x) \geq \frac{1}{2x} \int_0^{2x} |f(y)|dy = \frac{1}{2x}$$

olup, buradan

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)dx \geq \int_1^{\infty} Mf(x)dx \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{2x} dx = \infty$$

elde edilir.

Önerme 2.8.5 ([28]) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ sıfıra denk değilse bu durumda $Mf \notin L_1(\mathbb{R}^n)$ dir.

M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olmamasına rağmen, $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Aağıdaki teorem M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün hemen hemen her yerde sonlu, zayıf $(1, 1)$ ve $1 < p \leq \infty$ için (p, p) tipinden bir operatör olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 2.8.6 ([82])

(1) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) < \infty$ dır.

(2) $p = 1$ ise, bu durumda her $\lambda > 0$ ve $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \ Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır.

(3) $1 < p \leq \infty$ ise, her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n,p) > 0$ sabiti vardır.

Theorem (2.8.7) ve Theorem (2.8.8) ilk olarak 1972 yılında bir boyutta Muckenhoupt [67] tarafından $n > 1$ durumunda ise 1983 yılında Journé [57] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.8.7 ([57]) $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $\omega \in A_p$ için M Hardy-Littlewood maksimal operatörü zayıf $(L_p(\omega), L_p(\omega))$ tipinden bir operatördür. Yani, $1 \leq p < \infty$ ve $\omega \in A_p$ olmak üzere, her $\lambda > 0$ ve $f(x) \in L_p(\omega)$ için

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \ Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^p}\|f\|^p_{L_p(w)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sayısı vardır.

Teorem 2.8.8 ([57]) $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $\omega \in A_p$ için M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $(L_p(\omega), L_p(\omega))$ tipinden bir operatördür.

Teorem 2.8.9 ([18]) $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{L_{p,\lambda}} \leq C\|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{WL_{1,\lambda}} \leq C\|f\|_{L_{1,\lambda}}$$

sağlanır. Burada C sabiti f fonksiyonundan bağımsızdır.

Ayrıca $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \lambda < n$ ve $f \in L_{p,\lambda}$ için $\mathbb{R}^n$ de Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

Teorem 2.8.10 ([59]) $1 < p < \infty$ ve $0 < \kappa < 1$ olsun. Bu durumda $\omega \in A_p$ için M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L_{p,\kappa}(\omega)$ ağırlıklı Morrey uzayında sınırlıdır. Eğer $p = 1$, $0 < \kappa < 1$ ve $\omega \in A_1$ ise bu durumda her $\lambda > 0$ ve herhangi bir Q küpü için

$$\omega\left(\{x \in Q : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_{1,\kappa}(\omega)}\omega(Q)^{\kappa}$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıdaki teorem 1994 yılında Nakai [72] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.8.11 ([72]) $1 \leq q < p < \infty$ olsun. $r \leq t \leq 2r$ iken $c \geq 1$ sayısı t, r, $x \in \mathbb{R}^n$ den, C sayısı da x ve r den bağımsız olmak üzere $\varphi(x, r)$

$$c^{-1}\varphi(x,r) \leq \varphi(x,t) \leq c\varphi(x,r)$$

ve

$$\int_r^{\infty} \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \leq C\varphi(x,r)^p$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda M operatörü $1 \leq q < p < \infty$ için $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayında sınırlıdır.

Aşağıdaki teorem 2011 yılında Guliyev [41] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.8.12 [41] $1 \leq p < \infty$, $\omega \in A_p$ için C pozitif bir sayı olmak üzere (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^{\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)(\omega(B(x,s)))^{\frac{1}{p}}}{\omega(B(x,t))^{\frac{1}{p}}} \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r)$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $M_{p,\varphi_1}(\omega)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(\omega)$ uzayına ve $p = 1$ için $M_{1,\varphi_1}(\omega)$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}(\omega)$ uzayına sınırlıdır.

Singüler integral operatörler harmonik analizde önemli bir yere sahip olup ikinci dereceden kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerliği ile ilgili çalışmalarla yakından ilgilidir.

Tanım 2.8.13 (Singüler integral operatörü ve komütatör operatörü) Singüler integraller $y' = y/|y|$ olmak üzere

$$\mathcal{T}f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)dy$$

biçimindeki operatörlerdir. Burada Ω, $\mathbb{R}^n$ deki S^{n-1} birim küresi üzerinde tanımlanmış olup sıfır ortalamalı, integrallenebilir bir fonksiyondur.

$C_\infty^c(\mathbb{R}^n)$ den $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ tanımlı $\mathcal{T}$ operatörü aşağıdaki şartları sağlarsa **Calderón-Zygmund operatörü** olarak adlandırılır.

(a) $\mathcal{T}$, $L_2(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı lineer operatördür.

(b) Her $f \in L_\infty^c(\mathbb{R}^n)$, için

$$\mathcal{T}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy \qquad x \in \{\mathrm{supp} f\}^c,$$

şeklinde bir K çekirdeği vardır.

(c) K çekirdeği $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $x \neq y$ olduğunda $C > 0$ ve bazı $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} |K(x,y)| &\leq \frac{C}{|x-y|^n}, \\ |K(x+h,y) - K(x,y)| &\leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \\ |K(x,y+h) - K(x,y)| &\leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \end{aligned}$$

Calderón-Zygmund eşitsiziklerini sağlar. Burada $|h| < |x-y|/2$ dır (bkz. [80]).

Teorem 2.8.14 ([30]) Eğer $1 < p < \infty$ için $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır. Eğer $p = 1$ ise, bu durumda her $\lambda > 0$ ve $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{T}f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde bir $C = C(n) > 0$ sabiti vardır.

Teorem 2.8.15 ([28]) Eğer $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p$ ise $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü $L_p(\omega)$ üzerinde sınırlıdır. Eğer $p = 1$ ve $\omega \in A_1$ ise her $\lambda > 0$ için

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{T}f(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L_1(\omega)}$$

ifadesi sağlanır.

Teorem 2.8.16 ([18]) $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda $1 < p < \infty$ için $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü $L_{p,\lambda}$ üzerinde sınırlıdır. Ayrıca $p = 1$ için $L_{1,\lambda}$ uzayından $WL_{1,\lambda}$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 2.8.17 ([59]) $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü $L_{p,\kappa}(\omega)$ üzerinde sınırlıdır. Eğer $p = 1$, $0 < \kappa < 1$ ve $\omega \in A_1$ ise bu durumda her $\lambda > 0$ ve herhangi bir Q küpü için

$$\omega\left(\{x \in Q : |\mathcal{T}f(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L_{1,\kappa}(\omega)}\omega(Q)^{\kappa}$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıdaki teorem 1994 yılında Nakai [72] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.8.18 ([72]) $1 \leq p < \infty$ olsun. $r \leq t \leq 2r$ iken $c \geq 1$ sayısı t, r, $x \in \mathbb{R}^n$ den, C sayısı da x ve r den bağımsız olmak üzere $\varphi(x,r)$

$$c^{-1}\varphi(x,r) \leq \varphi(x,t) \leq c\varphi(x,r)$$

ve

$$\int_r^{\infty} \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \leq C\varphi(x,r)^p$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda $\mathcal{T}$ operatörü $p > 1$ için $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayında ve $M_{1,\varphi}$ uzayından $WM_{1,\varphi}$ uzayına sınırlıdır.

Aşağıdaki teorem, 1994 yılında Guliyev [42] tarafından ispatlanmış ve Mizuhara [65] tarafından elde edilen sonuçları içermektedir. Ayrıca $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ durumu için 1994 yılında Nakai [72] tarafından elde edilen sonuçları da içermektedir. Burada her t, $r > 0$ ve $C > 0$ için $0 < r \leq t \leq 2r$ olacak şekilde φ

$$C^{-1}\varphi(t) \leq \varphi(r) \leq C\varphi(t)$$

doubling şartını sağlar.

Teorem 2.8.19 ([42]) $1 \leq p < \infty$ iken C pozitif bir sayı olmak üzere her $t > 0$ için φ_1 ve φ_2

$$\int_r^{\infty} \varphi_1(x,r)\frac{dr}{r} \leq C\varphi_2(x,t) \tag{2.11}$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır.

Ayrıca, Guliyev [2], [46] tarafından daha zayıf şartla Calderón-Zygmund singüler integral oparatörünün $1 \leq p < \infty$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_1} uzayına sınırlılığı araştırılmışır.

Teorem 2.8.20 ([2], [46]) $1 \leq p < \infty$ iken C pozitif bir sayı olmak üzere her $t > 0$ için φ_1 ve φ_2 çifti

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \leq C\varphi_2(x,r) \tag{2.12}$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır.

Eğer (φ_1, φ_2) çifti (2.11) şartını sağlarsa, bu durumda (2.12) şartını da sağlar. Ancak tersi doğru değildir (bkz. [46]).

Teorem 2.8.21 [41] $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$ için C pozitif bir sayı olmak üzere (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)(\omega(B(x,s)))^{\frac{1}{p}}}{\omega(B(x,t))^{\frac{1}{p}}} \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r)$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü $M_{p,\varphi_1}(\omega)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(\omega)$ uzayına ve $p = 1$ için $M_{1,\varphi_1}(\omega)$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}(\omega)$ uzayına sınırlıdır.

Calderón komütatörü 1965 yılında Calderón [16] tarafından Cauchy integralinin Lipschitz eğrisi üzerindeki çalışması sırasında

$$C_{h,\varphi}(f)(x) = p.v. \int_\infty^\infty h\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x-y}\right) \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, φ ise $\mathbb{R}$ üzerinde bir Lipschitz fonksiyonudur. Eğer $h(t) = (1+it)^1$ ise bu durumda $C_{h,\varphi}(f)$, $y = \varphi(x)$ eğrisi üzerinde Cauchy integralidir. Eğer $h = 1$ ise bu durumda $C_{h,\varphi}(f)$ Hilbert dönüşümüdür. Eğer k bir doğal sayı olmak üzere $h(t) = t^k$ ise bu durumda $C_{h,\varphi}(f)$, φ nin Hilbert dönüşümünün k. mertebeden komütatörüdür.

Tanım 2.8.22 $f \in C_0^\infty$, $b \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü olmak üzere $[b, \mathcal{T}]$ komütatör operatörü

$$[b,\mathcal{T}]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [b(x) - b(y)]\, k(x-y) f(y) dy, \quad x \notin \operatorname{supp} f$$

şeklinde tanımlanır.

K, Calderón-Zygmund singüler integral operatör ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $[b, K]f = K(bf) - bKf$ şeklinde tanımlanan komütatör operatörü $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır (bkz. [16], [17]).

1976 yılında Coifman, Rochberg ve Weiss [22] tarafından T_Ω Calderón-Zygmund singüler integral operatörünün ve bir b fonksiyonunun ürettiği $[b, T_\Omega]$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ sınırlılığı üzerine araştırma yapılmıştır. Burada Ω

(i) Herhangi bir $\lambda > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\Omega(\lambda x) = \Omega(x)$

(ii) $\int_{S^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0$

şartlarını sağlamak üzere, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için $[b, T_\Omega]$ komütatörü

$$[b, T_\Omega](f)(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} [b(x) - b(y)] f(y)dy \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır.

Ölçülebilir fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı bir lineer $\mathcal{T}$ operatörü ve bir b fonksiyonu için $[b, \mathcal{T}]$ komütatörü $[b, \mathcal{T}]f(x) = b(x)\mathcal{T}f(x) - \mathcal{T}(bf)(x)$ ile tanımlanır. Coifman, Rochberg ve Weiss [22] tarafından $[b, \mathcal{T}_\Omega]$ komütatörünün $L_p(Rn)$, $1 < p < \infty$ sınırlılığını kullanarak başarılı bir şekilde $H^1(\mathbb{R}^n)$ Hardy uzayının ayrışımı verilmiştir. (2.13) tipindeki komütatörler ikinci mertebeden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerliği çalışmalarında önemli bir rol oynamaktadır (bkz. [19], [20], [34]). Açık olarak $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $[b, \mathcal{T}]$, $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlıdır. Coifman, Rochberg ve Weiss, [22] çalışmasında $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ iken $[b, \mathcal{T}]$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ sınırlılığını göstermişlerdir. Daha sonra Janson, [55] çalışmasında $[b, \mathcal{T}]$ komütatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlı iken $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermiştir. $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü zayıf $(1, 1)$ eşitsizliğini sağlamasına rağmen $[b, \mathcal{T}]$ komütatörü bu eşitsizliği sağlamaz. Buna karşılık aşağıdaki zayıf sonuç doğrudur.

Teorem 2.8.23 ([73]) $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in C_0^\infty$ ve her $\lambda > 0$ için

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |[b, \mathcal{T}]f(y)| > \lambda\}| \le C\|b\|_* \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\right) dy$$

sağlanır. Burada, $\log^+ t = \max(\log t, 0)$ biçimindedir.

Teorem 2.8.24 ([79]) $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü olsun. Eğer $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p$ ise bu durumda $[b, \mathcal{T}]$, $L_p(\omega)$ ağırlıklı Lebesgue uzayında üzerinde sınırlıdır.

Teorem 2.8.25 ([33]) $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü olmak üzere $[b, \mathcal{T}]$ komütatör operatörü $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayında sınırlıdır.

Teorem 2.8.26 ([59]) $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $\omega \in A_p$ için $\mathcal{T}$ Calderón-Zygmund operatörü olmak üzere $[b, \mathcal{T}]$ komütatör operatörü $L_{p,\kappa}(\omega)$ ağırlıklı Morrey uzayında sınırlıdır.

Aşağıdaki teorem 2011 yılında Guliyev [46] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.8.27 [46] $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ için C pozitif bir sayı olmak üzere (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}} \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r)$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{T}_b$ Calderón-Zygmund operatörünün komütatörü M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır.

Aşağıdaki teorem 2011 yılında Guliyev [41] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.8.28 [41] $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in A_p$ için C pozitif bir sayı olmak üzere (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) (\omega(B(x,s)))^{\frac{1}{p}}}{\omega(B(x,t))^{\frac{1}{p}}} \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r)$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{T}_b$ Calderón-Zygmund operatörünün komütatörü $M_{p,\varphi_1}(\omega)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(\omega)$ uzayına ve $p = 1$ için $M_{1,\varphi_1}(\omega)$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}(\omega)$ uzayına sınırlıdır.

Tanım 2.8.29 (Riesz potansiyeli) $0 < \alpha < n$ için $\mathcal{I}_\alpha$ Riesz potansiyeli

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki teorem I_α Riesz potansiyelinin $0 < \alpha < n$ için (L_p, L_q) sınırlılığını ifade etmektedir.

Teorem 2.8.30 ([37]) $1 \leq p < q < \infty$, $0 < \alpha < n$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|\mathcal{I}_\alpha f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

ve $p = 1$ için

$$\|\mathcal{I}_\alpha f\|_{L_{q,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde $C = C(n, \alpha, p) < \infty$ sabiti vardır ve burada $\alpha = n(1/p - 1/q)$ biçimindedir.

Aşağıdaki teorem I_α Riesz potansiyelinin $0 < \alpha < n$ ve $\omega \in A_{p,q}$ için $(L_p(\omega^p), L_q(\omega^q))$ sınırlılığını ifade etmektedir.

Teorem 2.8.31 ([70]) $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < n/\alpha$, $\alpha = n(1/p - 1/q)$ ve $\omega \in A_{p,q}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{I}_\alpha$ Riesz potansiyeli $p > 1$ için

$$\|\mathcal{I}_\alpha f\|_{L_{q(\omega^q)}} \leq C\|f\|_{L_p(\omega^p)}$$

ve $p = 1$, $q = n/(n-\alpha)$, $\omega \in A_{1,q}$ ve $\lambda > 0$ için

$$\omega^q(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{I}_\alpha f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^q}\|f\|^q_{L_{1(\omega)}}$$

olacak şekilde λ ve f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır.

Teorem 2.8.32 ([1], [74]) $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < n/\alpha$ ve $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olsun. Bu durumda $0 < \lambda < n$ için $\mathcal{I}_\alpha$ Riesz potansiyeli $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 2.8.33 ([59]) $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $\alpha = n(1/p - 1/q)$, $0 < \kappa < p/q$ ve $\omega \in A_{p,q}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{I}_\alpha$ Riesz potansiyeli $p > 1$ için $L_{p,\kappa}(\omega^p, \omega^q)$ uzayından $L_{q,\kappa q/p}(\omega^p, \omega^q)$ uzayına sınırlıdır. Eğer $p = 1$ ise herhangi bir Q küpü için

$$\omega^q(\{x \in Q : |\mathcal{I}_\alpha f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^q}\|f\|^q_{L_{1,\kappa}(\omega,\omega^q)}\omega^q(Q)^{\kappa q}$$

olacak şekilde λ ve f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır.

Aşağıdaki teorem 1994 yılında Nakai [72] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.8.34 ([72]) $1 \leq p < \infty$ ve $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olsun. $r \leq t \leq 2r$ iken $c \geq 1$ sayısı t, r, $x \in \mathbb{R}^n$ den, C sayısı da x ve r den bağımsız olmak üzere $\varphi(x,r)$

$$c^{-1}\varphi(x,r) \leq \varphi(x,t) \leq c\varphi(x,r)$$

ve

$$\int_r^\infty t^\alpha \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \leq C\varphi(x,r)^p$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda $\mathcal{I}_\alpha$ operatörü $p > 1$ için $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayında ve $M_{1,\varphi}$ uzayından $WM_{1,\varphi}$ uzayına sınırlıdır.

Aşağıdaki teorem, 1994 yılında Guliyev [42] tarafından ispatlanmış ve Mizuhara [65] tarafından elde edilen sonuçları içermektedir. Ayrıca $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ durumu için 1994 yılında Nakai [72] tarafından elde edilen sonuçları da içermektedir. Burada her t, $r > 0$ ve $C > 0$ için $0 < r \leq t \leq 2r$ olacak şekilde φ

$$C^{-1}\varphi(t) \leq \varphi(r) \leq C\varphi(t)$$

doubling şartını sağlar.

Teorem 2.8.35 ([42]) $1 \leq p < \infty$ ve $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olsun. Ayrıca her $r > 0$ için φ_1 ve φ_2

$$\int_r^\infty t^\alpha \varphi_1(x,t) \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r) \tag{2.14}$$

şartını sağlayan pozitif ölçülebilir fonksiyon olmak üzere, pozitif bir C sayısı vardır. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{I}_\alpha$ operatörü operatörü M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır.

Ayrıca, Guliyev [2], [46] tarafından daha zayıf şartla Riesz potansiyelinin $1 \leq p < \infty$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_1} uzayına sınırlılığı araştırılmışır.

Teorem 2.8.36 ([2], [46]) $1 \leq p < q < \infty$ ve $\alpha = n(1/p - 1/q)$ olsun. Ayrıca her $t > 0$ için φ_1 ve φ_2 çifti

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}} dt \leq C\varphi_2(x,r) \tag{2.15}$$

şartını sağlayan pozitif ölçülebilir fonksiyon olmak üzere, pozitif bir C sayısı vardır. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{I}_\alpha$ Riesz potansiyeli M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} uzayına sınırlıdır.

Eğer (φ_1, φ_2) çifti (2.14) şartını sağlarsa, bu durumda (2.15) şartını da sağlar. Ancak tersi doğru değildir (Hatırlatma 4.7, [46]).

Teorem 2.8.37 ([41]) $1 \le p < q < \infty$ ve $0 < \alpha < n/p$, $1/q = 1/p - \alpha/n$ ve $\omega \in A_{p,q}$ olsun. Ayrıca her $t > 0$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^{\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)(\omega^p(B(x,s)))^{\frac{1}{p}}}{(\omega^q(B(x,t)))^{\frac{1}{q}}} \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r)$$

şartını sağlamak üzere, pozitif bir C sayısı vardır. Bu durumda $p > 1$ için $\mathcal{I}_\alpha$ Riesz potansiyeli $M_{p,\varphi_1}(\omega^p)$ uzayından $M_{p,\varphi_2}(\omega^q)$ uzayına ve $p = 1$ için $M_{1,\varphi_1}(\omega)$ uzayından $WM_{1,\varphi_2}(\omega)$ uzayına sınırlıdır.

2.9 Marcinkiewicz İntegral Operatörü

Marcinkiewicz integral operatörü ilk olarak 1938 yılında Marcinkiewicz [62] tarafından klasik Littlewood-Paley g fonksiyonun analoğu olarak bir boyutta

$$\mu(f)(x) = \left(\int_0^{\pi} |F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

tanımlanmıştır. Burada $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ şeklindedir. 1944 yılında Zygmund [89] tarafından kompleks değişkenler yöntemi kullanılarak aşağıdaki teoremin ispatı verilmiştir.

Teorem 2.9.1 ([89]) $1 < p < \infty$ için

$$\int_0^{2\pi} [\mu(f)(x)]^p \,dx \le B_p \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \,dx$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ ise, bu durumda

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \,dx \le A_p \int_0^{2\pi} [\mu(f)(x)]^p dx$$

eşitsizliği sağlanır.

1958 yılında Stein [81] Marcinkiewicz integralini n-boyutta

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left(\int_0^{\infty} |F_{\Omega,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada

$$F_{\Omega,t}(f)(x) = \int_{|x-y|\le t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f(y)dy$$

şeklindedir. $n \geq 2$ için $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $\mathbb{R}^n$ de normalleştirilmiş Lebesgue ölçüsü $d\sigma = d\sigma(x')$ ile donatılmış birim küre olmak üzere Ω ise aşağıdaki şartları sağlamaktadır.

(i) Ω, $\mathbb{R}^n$ de derecesi sıfır olan homojen bir fonksiyondur. Yani, $t > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\Omega(tx) = \Omega(x) \tag{2.16}$$

şeklindedir.

(ii) Ω, S^{n-1} birim küre üzerinde ortalama sıfırı vardır. Yani,

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0 \tag{2.17}$$

şeklindedir. Burada her $x \neq 0$ için $x' = x/|x|$ biçimindedir.

(iii) $\Omega \in L_1(S^{n-1})$.

Uyarı 2.9.2 n-boyutlu μ_Ω Marcinkiewicz integrali klasik haldeki bir boyutlu μ Marcinkiewicz integralinin genelleştirilmiş bir versiyonu olarak kabul edilebelir. Ayrıca μ_Ω Marcinkiewicz integrali $g(x) = \Omega(x')|x|^{-n+1}\chi_{\{|x|\leq 1\}}(|\,x|)$ için Littlewood-Paley g fonksiyonunun özel bir durumudur.

Eğer her $x', y' \in S^{n-1}$ için $|\Omega(x') - \Omega(y')| \leq C|x' - y'|^\alpha$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa bu durumda $0 < \alpha \leq 1$ için $\Omega \in \mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ dır.

Teorem 2.9.3 ([81]) Ω, (2.16) şartını sağlasın.

(a) Eğer $\Omega \in L_1(S^{n-1})$ var ve tek ise, bu durumda μ_Ω $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.

(b) Eğer Ω, (2.17) şartını sağlıyorsa ve $0 < \alpha \leq 1$ için $\Omega \in \mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ ise bu durumda μ_Ω zayıf $(1, 1)$ tiplidir. Yani, her $t > 0$ ve $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n :\ \mu_\Omega(f)(x) > t\}| \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$$

olacak şekilde C sabiti vardır.

(c) Eğer Ω, (2.17) şartını sağlıyorsa ve $0 < \alpha \leq 1$ için $\Omega \in \mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ ise bu durumda μ_Ω, $1 < p \leq 2$ için (p,p) tiplidir. Yani, her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L_p} \leq A_p \|f\|_{L_p}$$

olacak şekilde A_p sabiti vardır.

1962 yılında Benedek, Calderón ve Panzone [8] tarafından Stein'in sonucu genişletilmiş ve düzgün çekirdekli Marcinkiewicz integralinin L_p deki sınırlılığı aşağıdaki teorem ile gösterilmiştir.

Teorem 2.9.4 ([8]) $\Omega \in C^1(S^{n-1})$ olsun ve (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın. Bu durumda $1 < p < \infty$ için

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L_p} \leq A_p \|f\|_{L_p}$$

olacak şekilde A_p sabiti vardır.

1972 yılında Walsh [87] tarafından düzgün çekirdekli Marcinkiewicz integralinin yerine kaba çekirdekli Marcinkiewicz integrali kullanılarak aşağıdaki teoremin ispatı verilmiştir.

Teorem 2.9.5 ([87]) $1 < p < \infty$ ve $r = \min\{p, p'\}(1/p + 1/p' = 1)$ olsun. Eğer $\Omega \in L\,(\log^+ L)^{1/r}(\log^+\log^+ L)^{2(1-2/r')}(S^{n-1})$, (2.16) ve (2.17) şartlarını sağlıyorsa, bu durumda

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L_p} \leq A_p \|f\|_{L_p}$$

olacak şekilde A_p sabiti vardır.

Uyarı 2.9.6 $1 < r \leq 2$ için S^{n-1} deki fonksiyon uzayları arasındaki ilişki

$$\mathrm{Lip}_\alpha \subsetneqq L_q\ (q > 1) \subsetneqq L\log^+ L \subsetneqq L\,(\log^+ L)^{1/r}(\log^+\log^+ L)^{2(1-2/r')} \subsetneqq L_1.$$

şeklinde verilebilir.

Ayrıca Ω, Teorem 2.9.5 deki S^{n-1} birim küresinde hiçbir düzgünlüğe sahip olmadığı için, Teorem 2.9.5, Teorem 2.9.4 deki sonucun daha gelişmiş halidir.

2001 yılında Fan ve Sato [32], 2002 yılında Al-Salman, Al-Quassaem, Cheng ve Pan [5] tarafından aşağıdaki teoremin ispatı verilmiştir.

Teorem 2.9.7 ([5]) Ω, (2.16) ve (2.17) ifadelerini sağlasın. Eğer

$$\Omega \in L(\log^+ L)^{1/2}(S^{n-1}) \tag{2.18}$$

ise bu durumda μ_Ω, $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır. Eğer

$$\Omega \in L(\log^+ L)(S^{n-1}), \tag{2.19}$$

ise bu durumda μ_Ω, $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

Uyarı 2.9.8 Teorem 2.9.7 de seçilen 1/2 kuvveti seçilebilecek en iyi kuvvettir.

Uyarı 2.9.9 $L\,(\log^+ L)^{1/r}(\log^+\log^+ L)^{2(1-2/r')}$ $(1 < r \leq 2)$ $\subsetneq$ $L\,(\log^+ L)^{1/2}$ olup Teorem 2.9.7, Teorem 2.9.5 deki sonucun daha gelişmiş halidir.

1960 yılında Hörmander [54] çalışmasında, $0 < \rho < n$ için

$$\mu_\Omega^\rho(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}} f(y)dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan parametrik Marcinkiewicz integrali L_p sınırlılığını göstermiştir. Burada $\rho = 1$ alınırsa Stein [81] tarafından tanımlanan klasik $\mu_\Omega(x)$ elde edilir.

Teorem 2.9.10 ([54]) $0 < \alpha \leq 1$ için $\Omega \in Lip_\alpha(S^{n-1})$, (2.16) ve (2.17) şartlarını sağlıyorsa bu durumda $1 < p < \infty$ için

$$\|\mu_\Omega^\rho(f)\|_{L_p} \leq A_p \|f\|_{L_p}$$

olacak şekilde A_p sabiti vardır.

2002 yılında Ding, Lu ve Yabuta [25] çalışmasında $p = 2$ için Hörmander'in sonucunu geliştirmiştir.

Teorem 2.9.11 ([25]) $\Omega \in L\log^+ L(S^{n-1})$, (2.16) ve (2.17) şartlarını sağlıyorsa bu durumda

$$\|\mu_\Omega^\rho(f)\|_{L_2} \leq A_p \|f\|_{L_2}$$

olacak şekilde A_p sabiti vardır.

Tanım 2.9.12 $\mu_{\Omega,b}$ kaba çekirdekli Marcinkiewicz integral operatörünün komütatörü

$$\mu_{\Omega,b}(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} [b(x) - b(y)] f(y)dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlamıştır.

3 SCHRODINGER OPERATÖRÜNE KARŞILIK GELEN $\mu_j^{\mathcal{L}}$ MARCINKIEWICZ İNTEGRAL OPERATÖRÜNÜN VE $\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}$ KOMÜTATÖRÜNÜN $M_{p,\varphi}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Bu bölümde $1 < p < \infty$ için Schrödinger operatörüne karşılık gelen $\mu_j^{\mathcal{L}}$ Marcinkiewicz integral operatörünün genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar "Journal of Mathematical Inequalities" isimli dergide "Marcinkiewicz integrals associated with Schrödinger operator on generalized Morrey spaces" başlığı ile yayımlanmıştır.

3.1 Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen $\mu_j^{\mathcal{L}}$ Marcinkiewicz İntegral Operatörünün $M_{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Sınırlılığı

ω ağırlık fonksiyonu olmak üzere ağırlıklı Hardy operatörleri

$$H_\omega^* g(t) := \int_t^\infty g(s)\omega(s)ds, \quad 0 < t < \infty,$$

ve

$$H_\omega^* g(t) := \int_t^\infty \Big(1 + \ln \frac{s}{t}\Big) g(s)\omega(s)ds, \quad 0 < t < \infty,$$

şeklinde olup bu bölümde aşağıdaki sonuç kullanılacaktır.

Teorem 3.1.1 ([40]) v_1, v_2 ve ω, $(0,\infty)$ aralğında ağırlık olup $v_1(t)$ orjinin komşuluğu dışında sınırlı olsun. Bütün negatif olmayan ve $(0,\infty)$ üzerinde azalmayan g fonksiyonu için

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t>0} v_2(t) H_\omega^* g(t) \le C \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} v_1(t) g(t) \tag{3.1}$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $C > 0$ sabitinin olması için gerek ve yeter şart

$$B := \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} v_2(t) \int_t^\infty \frac{\omega(s)ds}{\operatorname*{ess\,sup}_{s<\tau<\infty} v_1(\tau)} < \infty \tag{3.2}$$

olmasıdır. Ayrıca $C = B$ değeri (3.1) için seçilebilecek en iyi sabittir.

Uyarı 3.1.2 (3.1) ve (3.2) ifadelerinde $0 \cdot \infty = 0$ olduğu varsayılır.

Son yıllarda, ters Hölder eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan V potansiyelli $\mathcal{L} = -\Delta + V$ formundaki Schrödinger operatörleri için harmonik analizin integral operatörlerinin teorisinde büyük gelişmeler olmuş ve analizde bazı önemli problemlerin anlaşılmasında daha derin bir anlayışa yol açmıştır. Özellikle Shen [80] çalışmasında, $j = 1, \ldots, n$ için $R_j^{\mathcal{L}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}$ şeklindeki Schrödinger Riesz dönüşümünü içeren potansiyelli $\mathcal{L}$ Schrödinger operatörünün L_p uzayındaki durumu üzerine çalışmıştır. Dziubanński ve Zienkiewicz [31] klasik $H_1(\mathbb{R}^n)$ Hardy uzayından daha geniş olan $H_1^{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ Schrödinger operatörüne karşılık gelen Hardy tipli uzayı tanımlamıştır.

$n \neq 3$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de Schrödinger operatörü

$$\mathcal{L} = -\Delta + V$$

olsun. Burada Δ, $\mathbb{R}^n$ de $\Delta \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ eşitliğini sağlayan Laplace operatörüdür. Negatif olmayan $V \not\equiv 0$ potansiyeli ise bazı $q \geq n/2$ için RH_q ters Hölder sınıfındandır. Yani V potansiyeli her $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için

$$\left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} V(y)^q \, dy \right)^{1/q} \leq C \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} V(y) dy \right) \tag{3.3}$$

şeklindeki ters Hölder eşitsizliğini sağlar. $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $m_V(x)$ fonksiyonu

$$\frac{1}{m_V(x)} = \rho(x) = \sup \left\{ r > 0 : \ \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B = B(x,r)$, x merkezli r yarıçaplı bir yuvarı belirtir. $V = 0$ ise $m_V(x) = 0$, $V \neq 0$ ise $0 < m_V(x) < \infty$, $V = 1$ ise $m_V(x) = 1$ ve $V = |x|^2$ ise $m_V(x) \sim (1 + |x|)$ dır (bkz. [80]).

Lemma 3.1.3 ([80]) $q \geq n/2$ için $V \in B_q$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

(a) $|x - y| \leq \dfrac{C}{m_V(x)}$ iken $m_V(x) \sim m_V(y)$

(b) $m_V(y) \leq C(1 \ + |xy| m_V(x))^{N_0} m_V(x)$,

(c) $m_V(y) \geq \dfrac{C m_V(x)}{(1 + |x - y| m_V(x))^{N_0/(N_0+1)}}$.

ifadelerini sağlayacak şekilde pozitif C ve N_0 sabitleri vardır.

Önerme 3.1.4 ([80]) $V \in RH_{n/2}$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$C^{-1}\rho(x) \left(1 + \frac{|x - y|}{\rho(x)} \right)^{-N_0} \leq \rho(y) \leq C\rho(x) \left(1 + \frac{|x - y|}{\rho(x)} \right)^{\frac{N_0}{N_0+1}} \tag{3.4}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde C ve $N_0 \geq 1$ mevcuttur. $y \in B(x,r)$ ve $r \leq C\rho(x)$ (veya $|x-y| < C\rho(x)$) iken $\rho(x) \sim \rho(y)$ dır. Ayrıca $r = \rho(x)$ ise $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı kritik yuvar olarak adlandırılır ve $\sigma > 0$ için

$$\rho(x) \geq c_\sigma \rho(y)$$

şeklindedir. Burada $C_\sigma = C^2(1+\sigma)^{\frac{2N_0+1}{N_0+1}}$ dır.

Sonuç 3.1.5 $x, y \in B(x_0, r_0)$ olsun. Bu durumda

(i)

$$1 + \frac{r_0}{\rho(y)} \leq C\left(1 + \frac{r_0}{\rho(x_0)}\right)^{N_0} \tag{3.5}$$

eşitsizliğini sağlayan $C > 0$ sayısı vardır.

(ii) Her $r > r_0$ için

$$1 + \frac{r}{\rho(y)} \leq C\left(1 + \frac{r_0}{\rho(x_0)}\right)^{\gamma}\left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right) \tag{3.6}$$

eşitsizliğini sağlayan $C > 0$ sayısı vardır. Burada $\gamma = N_0\left(1 + \frac{N_0}{\rho(x)}\right)$ şeklindedir.

İspat. (3.5) eşitsizliği, (3.4) eşitsizliğinin sol tarafının basit bir sonucudur. (3.6)ise (3.4) eşitsizliğinin sağ tarafınından ve (3.5) eşitsizliğinden çıkmaktadır. ∎

Bu çalışmada klasik Marcinkiewicz fonksiyonu

$$\mu_j f(x) = \left(\int_0^\infty \left|\int_{|x-y|\leq t} K_j(x,y) f(y)dy\right|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}$$

şeklinde olup $K_j(x,y) = K_j^\Delta(x,y)$ dır. Schrödinger operatörüne karşılık gelen Marcinkiewicz fonksiyonu ise

$$\mu_j^{\mathcal{L}} f(x) = \left(\int_0^\infty \left|\int_{|x-y|\leq t} K_j^{\mathcal{L}}(x,y) f(y)dy\right|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $K_j^{\mathcal{L}}(x,y) = \widetilde{K_j^{\mathcal{L}}}(x,y)|x-y|$ ve $\widetilde{K_j^{\mathcal{L}}}(x,y)$, $R_j^{\mathcal{L}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}$, $j = 1,\ldots,n$ nin çekirdeğidir. $V = 0$ iken $K_j^\Delta(x,y) = \widetilde{K_j^\Delta}(x,y)|x-y| = \frac{(x-y)_j/|x-y|}{|x-y|^{n-1}}$ ve $\widetilde{K_j^\Delta}(x,y)$, $R_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\Delta^{-\frac{1}{2}}$, $j = 1,\ldots,n$ nin çekirdeği olur. Eğer $q > 1$ için $V \in B_q$ ise, bu durumda $V \in B_{q+\varepsilon}$ olacak şekilde n ve (3.3) eşitsizliğindeki C sabitine bağlı bir $\varepsilon > 0$ vardır. Bu çalışma boyunca $0 \neq V \in B_n$ olduğu kabul edilecektir.

Lemma 3.1.6 [80] $q \geq n/2$ için $V \in B_q$ olduğunu varsayalım. Her $N_0 > 0$ için

$$\left|K_j^{\mathcal{L}}(x,y)\right| \leq \frac{C_{N_0}}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{N_0}} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}$$

ve

$$\left|K_j^{\mathcal{L}}(x,y) - K_j(x,y)\right| \leq \; C\frac{\rho(x)^{-1}}{|x-y|^{n-2}}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $C_{N_0} > 0$ sabiti vardır.

Teorem 3.1.7 [35] $V \in B_n$ olsun. Bu durumda $\mu_j^{\mathcal{L}}$, $j = 1,\ldots,n$, $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ de $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

Lemma 3.1.8 $V \in B_n$ olsun. Herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı için eğer $1 < p < \infty$ ise, bu durumda her $f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_j^{\mathcal{L}}(f)\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))}\, dt$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $p = 1$ ise, bu durumda her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_j^{\mathcal{L}}(f)\|_{WL_1(B(x_0,r))} \lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} t^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))}\, dt$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $p \in (1,\infty)$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar olmak üzere $2B = B(x_0, 2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \qquad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{\complement_{(2B)}}(y), \qquad r > 0$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\|\mu_j^{\mathcal{L}}(f)\|_{L_p(B)} \leq \|\mu_j^{\mathcal{L}}(f_1)\|_{L_p(B)} + \|\mu_j^{\mathcal{L}}(f_2)\|_{L_p(B)}$$

şeklinde yazabiliriz.

$f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $\mu_j^{\mathcal{L}} f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olur ve $\mu_j^{\mathcal{L}}$ in $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki sınırlılığından

$$\|\mu_j^{\mathcal{L}}(f_1)\|_{L_p(B)} \leq \|\mu_j^{\mathcal{L}}(f_1)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \approx \|f\|_{L_p(2B)}$$

elde edilir. Burada C, f fonksiyonundan bağımsız pozitif bir sabittir.

$x \in B$, $y \in \complement(2B)$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olduğunu gösterir ve

$$\begin{aligned}
\mu_j^{\mathcal{L}} f_2(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}} |f_2(y)| \left(\int_{|x-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} dy \\
&\lesssim \int_{\complement(2B)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} \, dy \\
&\lesssim \int_{\complement(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} \, dy
\end{aligned}$$

elde ederiz. Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_{\complement(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy &\approx \int_{\complement(2B)} |f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |x_0-y| < t} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| \, dy \, \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\int_{\complement(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \, \frac{dt}{t^{n+1}}$$

elde edilir. Ayrıca her $p \in [1, \infty)$ için

$$\|\mu_j^{\mathcal{L}}(f_2)\|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \, dt$$

eşitsizliği bulunur. Sonuç olarak

$$\|\mu_j^{\mathcal{L}}(f)\|_{L_p(B)} \lesssim \|f\|_{L_p(2B)} + r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \, dt$$

elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L_p(2B)} &\approx r^{\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(2B)} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \\
&\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \, \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \, dt
\end{aligned} \tag{3.7}$$

bulunur. O halde sonuç olarak

$$\|\mu_j^{\mathcal{L}}(f)\|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \, dt$$

elde edilir. Eğer $p = 1$ ise, bu durumda μ_j^L in zayıf $(1,1)$ sınırlılığından ve (3.7) ifadesinden

$$\begin{aligned}
\|\mu_j^{\mathcal{L}} f_1\|_{WL_1(B)} \leq \|\mu_j^{\mathcal{L}} f_1\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_1(2B)} \\
&\lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| dy \, \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\leq r^n \int_{2r}^{\infty} t^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \, dt
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.1.9 $1 \leq p < \infty$ olsun. $\Omega \in \mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ ise (2.16) ve (2.17) ifadelerini sağlasın. Eğer (φ_1, φ_2),

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \leq C \, \frac{\varphi_2(x,r)}{r^{\frac{n}{p}}}$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda $p > 1$ için $\mu_j^{\mathcal{L}}$, $j = 1, \ldots, n$, M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} den WM_{1,φ_2} e sınırlıdır. Yani, $p > 1$ için

$$\|\mu_j^{\mathcal{L}}(f)\|_{M_{p,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|\mu_j^{\mathcal{L}}(f)\|_{WM_{1,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}$$

sağlanır. Burada C, x ve r den bağımsızdır.

İspat. Teorem 3.1.1 ve Lemma 3.1.8 kullanılarak $p > 1$ için

$$\begin{aligned}
\|\mu_j^{\mathcal{L}}(f)\|_{M_{p,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1}\, r^{\frac{n}{p}} \int_r^\infty \|f\|_{L_p(B(x,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1} \, \|f\|_{L_p(B(x,r))} \\
&= \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $p = 1$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
\|\mu_j^{\mathcal{L}}(f)\|_{WM_{1,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1}\, r^{n} \int_r^\infty \|f\|_{L_1(B(x,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1} \, \|f\|_{L_1(B(x,r))} \\
&= \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}.
\end{aligned}$$

■

3.2 Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen $\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}$ Marcinkiewicz İntegral Operatörünün Komütatörünün $M_{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Sınırlılığı

Bu bölümde klasik Marcinkiewicz fonksiyonunun komütatörü

$$\mu_{j,b}f(x) = \left(\int_0^\infty \left| \int_{|x-y|\leq t} |K_j(x,y)[b(x) - b(y)]f(y)dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}$$

şeklinde olup $K_j(x,y) = K_j^{\Delta}(x,y)$ dır. Schrödinger operatörüne karşılık gelen Marcinkiewicz fonksiyonu ise

$$\mu_{j,b}^{\mathcal{L}} f(x) = \left(\int_0^\infty \left| \int_{|x-y|\leq t} K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)]f(y)dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır. $b \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için maximal operatörünün komütatörü M_b

$$M_b f(x) = \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |b(x)-b(y)|\,|f(y)|dy$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.1 ([7], [64])$1 < p < \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|M_b(f)\|_{L_p} \leq C\|f\|_{L_p}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır. Yani $p > 1$ için M_b, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den zayıf $WL_1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

Teorem 3.2.2 ([26]) $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $p > 1$ için $\mu_{\Omega,b}$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ sınırlıdır ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den zayıf $WL_1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

Teorem 3.2.3 $V \in B_n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere her $1 < p < \infty$ için

$$\|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}(f)\|_{L_p} \leq C\|f\|_{L_p}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti mevcuttur.

İspat. Bu lemmanın ispatı, [3], [4] ve [35] çalışmalarındaki ispat tekniği kullanılarak yapılmıştır. M_b Hardy-Littlewood maximal operatörün komütatörü olmak üzere

$$\mu_{j,b}^{\mathcal{L}} f(x) \leq \mu_{j,b} f(x) + CM_b f(x), \quad h.h.y. \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$x \in \mathbb{R}^n$ ve $r = \rho(x)$ olmak üzere

$$\mu_{j,b}^{\mathcal{L}} f(x) \leq \left(\int_0^r \left| \int_{|x-y|\leq t} K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)]f(y)dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \left(\int_r^\infty \left| \int_{|x-y|\leq r} K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)]f(y)dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_r^\infty\left|\int_{r<|x-y|\le t}K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)]f(y)dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\\
\le&\left(\int_0^r\left|\int_{|x-y|\le t}[K_j^{\mathcal{L}}(x,y)-K_j(x,y)][b(x)-b(y)]f(y)dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+\left(\int_0^r\left|\int_{|x-y|\le t}K_j(x,y)[b(x)-b(y)]f(y)dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+\left(\int_r^\infty\left|\int_{|x-y|\le r}K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)]f(y)dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+\left(\int_r^\infty\left|\int_{r<|x-y|\le t}K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)]f(y)dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\\
:=&E_1+E_2+E_3+E_4
\end{aligned}
$$

şeklindedır.

Lemma 3.1.6 den E_1,

$$
\begin{aligned}
E_1&\le C\left(\int_0^r\left|\frac{1}{r}\int_{|x-y|\le t}[b(x)-b(y)]\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2}}dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le CM_bf(x)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$E_2\le \mu_{j,b}f(x)$$

olduğu açıktır.

E_3 için Lemma 3.1.6 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
E_3&\le\left(\int_r^\infty\left|\frac{1}{r}\int_{|x-y|\le r}[b(x)-b(y)]\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2}}dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le CM_bf(x)
\end{aligned}
$$

olduğu gösterilir. Son olarak E_4 için tekrar Lemma 3.1.6 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
E_4&\le C\left(\int_r^\infty\left|r\int_{r<|x-y|\le t}[b(x)-b(y)]\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n}}dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C_r\left(\int_r^\infty\left|\sum_{k=0}^{[\log_2 t/r]+1}(2^kr)^n\int_{|x-y|\le 2^kr}[b(x)-b(y)]|f(y)|dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_r \left(\int_r^\infty |([\log_2 t/r] + 1) M_b f(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_r \left(\int_r^\infty \frac{t}{r} M_b f(x)^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C M_b f(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve Teorem 3.2.3 nin ispatı tamamlanır. ∎

Lemma 3.2.4 $V \in B_n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı için eğer $1 < p < \infty$ ise, bu durumda her $f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$
\|\mu_{j,b} f\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim \|b\|_* r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^\infty \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))}\, dt
$$

eşitsizliği sağlanır. Herhangi bir $B(x, r)$ yuvarı için eğer $p = 1$ ise, bu durumda her $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$
\|\mu_{j,b} f\|_{WL_1(B(x,r))} \lesssim \|b\|_* r^n \int_{2r}^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x,t))}\, dt
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $p \in (1, \infty)$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar olmak üzere $2B = B(x_0, 2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$
f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{\complement_{(2B)}}(y), \quad r > 0
$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$
\|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}} f\|_{L_p(B)} \leq \|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}} f_1\|_{L_p(B)} + \|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}} f_2\|_{L_p(B)}
$$

şeklinde yazabiliriz.

$f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}(f_1) \in L_p$ olur ve $\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}$ in $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki sınırlılığından (Teorem 3.2.2)

$$
\|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}} f_1\|_{L_p(B)} \leq \|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}} f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \approx \|b\|_* \|f\|_{L_p(2B)}
$$

elde edilir.

$x \in B$, $y \in \complement_{(2B)}$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olduğunu gösterir ve

$$
\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}(f_2(x)) \lesssim \int_{\complement_{(2B)}} |b(y) - b(x)| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy
$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\|\mu_{j,b}f_2\|_{L_p(B)} \lesssim& \left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} |b(y)-b(x)|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
\lesssim& \left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} |b(y)-b_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&+\left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} |b(x)-b_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
=&I_1+I_2
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
I_1 &= r^{\frac{n}{p}}\int_{\complement_{(2B)}} |b(y)-b_B|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy\\
&\approx r^{\frac{n}{p}}\int_{\complement_{(2B)}} |b(y)-b_B||f(y)|\int_{|x_0-y|}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}}\,dy\\
&\approx r^{\frac{n}{p}}\int_{2r}^{\infty}\int_{2r\le|x_0-y|\le t} |b(y)-b_B||f(y)|\,dy\frac{dt}{t^{n+1}}\\
&\lesssim r^{\frac{n}{p}}\int_{2r}^{\infty}\int_{B(x_0,t)} |b(y)-b_B||f(y)|dy\frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Hölder eşitsizliği ve (2.4) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
I_1 &\lesssim \|b\|_*\, r^{\frac{n}{p}}\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\|f\|_{L_1(B(x_0,t))}\frac{dt}{t^{n+1}}\\
&\lesssim \|b\|_*\, r^{\frac{n}{p}}\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}\,|B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p}}\,\frac{dt}{t^{n+1}}\\
&\lesssim \|b\|_*\, r^{\frac{n}{p}}\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)t^{-\frac{n}{p}-1}\,\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}\,dt
\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan

$$I_2=\left(\int_B |b(x)-b_B|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\int_{\complement_{(2B)}}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy$$

elde edilir. (2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \|b\|_*\, r^{\frac{n}{p}}\int_{\complement_{(2B)}}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy\\
&\lesssim \|b\|_*\, r^{\frac{n}{p}}\int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1}\,\|f\|_{L_p(B(x,t))}\,dt
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $p\in(1,\infty)$ için I_1 ve I_2 ifadeleri toplanırsa

$$\|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}f_2\|_{L_p(B)}\lesssim \|b\|_*\, r^{\frac{n}{p}}\int_{2r}^{\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)t^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}dt$$

elde edilir. O halde sonuç olarak

$$\|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}} f\|_{L_p(B)} \lesssim \|b\|_* \Big(\|f\|_{L_p(2B)} + r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt \Big)$$

bulunur. Öte yandan

$$\begin{aligned} \|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}} f\|_{L_p(B)} &\lesssim \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \; dt \\ &\lesssim \|b\|_* \; (B(x_0, r))^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \, dt \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\|\mu_j^{\mathcal{L}} f\|_{L_p(B)} \lesssim \|b\|_* r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt$$

bulunur. Eğer $p = 1 < s < \infty$ ise, bu durumda μ_j^L in zayıf $(1, 1)$ sınırlılığından ve (3.7) ifadesinden

$$\begin{aligned} \|\mu_j^L f_1\|_{WL_1(B)} &\le \|\mu_j^L f_1\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|b\|_* \|f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \|b\|_* \|f\|_{L_1(2B)} \\ &\le \|b\|_* r^n \int_{2r}^{\infty} \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) t^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \, dt \end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.5 $1 \le p < \infty$ ve $b \in BMO(Rn)$ olsun. $\Omega \in \mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ ise (2.16) ve (2.17) ifadelerini sağlasın. Eğer (φ_1, φ_2),

$$\int_r^{\infty} \Big(1 + \ln \frac{t}{r}\Big) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x, s)}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \le C \, \frac{\varphi_2(x, r)}{r^{\frac{n}{p}}}$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda $p > 1$ için $\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}$, $j = 1, \ldots, n$, M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} den WM_{1,φ_2} e sınırlıdır. Yani, $p > 1$ için

$$\|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}(f)\|_{M_{p,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}(f)\|_{WM_{1,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}$$

sağlanır. Burada C, x ve r den bağımsızdır.

İspat. Theorem 3.1.1 ve Lemma 3.2.4 kullanılarak $p > 1$ için

$$\begin{aligned}
\|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}(f)\|_{M_{p,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1}\, r^{\frac{n}{p}} \int_r^\infty \|f\|_{L_p(B(x,t))}\, \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \\
&\lesssim \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1} \int_r^\infty \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_p(B(x,r))} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\, \|f\|_{L_p(B(x,r))} \\
&= \|b\|_* \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $p = 1$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
\|\mu_{j,b}^{\mathcal{L}}(f)\|_{WM_{1,\varphi_2}} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1}\, r^{n} \int_r^\infty \|f\|_{L_1(B(x,t))}\, \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\, \|f\|_{L_1(B(x,r))} \\
&\lesssim \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1} \int_r^\infty \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_p(B(x,r))} \frac{dt}{t} \\
&= \|b\|_* \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}.
\end{aligned}$$

■

4 SCHRODINGER OPERATÖRÜNE KARŞILIK GELEN KABA ÇEKİRDEKLİ $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$ MARCINKIEWICZ İNTEGRAL OPERATÖRÜNÜN VE $\mu_{j,\Omega,b}^{\mathcal{L}}$ KOMÜTATÖRÜNÜN $VM_{p,\varphi}$ VANISHING GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Bu bölümde $1 < q \leq \infty$ için $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ olmak üzere Schrödinger operatörüne karşılık gelen kaba çekirdekli $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$ Marcinkiewicz integral operatörünün vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar "Azerbaijan Journal of Mathematics" isimli dergide "Marcinkiewicz integrals with rough kernel associated with Schrödinger operator on vanishing generalized Morrey spaces" başlığı ile yayımlanmıştır. Ayrıca $1 < q \leq \infty$ için $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $j = 1, \ldots, n$ için $\mu_{j,\Omega,b}^{\mathcal{L}}$ komütatörünün vanishing genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı da elde edilmiştir.

4.1 $VM_{p,\varphi}$ Vanishing Genelleştirilmiş Morrey Uzayı

Klasik vanishing Morrey uzayı $VL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, 1990 yılında Vitanza [86] tarafından kısmi diferansiyel denklemlerin bir uygulaması olarak ortaya atılmıştır. Ayrıca bu gibi uzayların özellikleri hakkında Chiarenza ve Frasca [18] ve Ragusa [75] tarafından bazı çalışmalar yapılmıştır. Vanishing Morrey uzayı,

$$\lim_{r\to 0} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ 0<t<r}} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))} = 0$$

şartını sağlayan $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayının bir alt uzayıdır.

$\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayı $VM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ için

$$\lim_{r\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x,r)^{-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} = 0$$

şeklindeki bütün ölçülebilir $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır. $\varphi(x,r)$ fonksiyonunu için

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{\frac{n}{p}}}{\varphi(x,t)} = 0 \tag{4.1}$$

ve

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{t^{\frac{n}{p}}}{\varphi(x,t)} < \infty \tag{4.2}$$

şartları sağlanmaktadır. Burada $VM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ aşikar olmayan bir uzaydır. Çünkü kompakt destekli sınırlı fonksiyonlar bu uzaylara aittir. Ayrıca vanishing genelleştirilmiş Morrey uzayı $VM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{VM_{p,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır (bkz. [78]).

4.2 Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Kaba Çekirdekli $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega}$ Marcinkiewicz İntegral Operatörünün $VM_{p,\varphi}$ Vanishing Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Sınırlılığı

$f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M_Ω kaba çekirdekli maximal operatör

$$M_\Omega f(x) = \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |\Omega(x-y)|\, |f(y)|dy$$

şeklinde tanımlanır. $\Omega \equiv 1$ iken M_Ω klasik Hardy-Littlewood maximal operatördür.

$p = 1$ için [21] ve $1 < p \le \infty$ için [61] çalışmalarında aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 4.2.1 ([21], [61]) Ω, (2.16) şartını sağlasın. Eğer $\Omega \in L_1(S^{n-1})$ ise, bu durumda M_Ω, $1 < p \le \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır. Eğer Ω, (2.19) şartını sağlıyorsa bu durumda M_Ω, $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

Sonuç 4.2.2 $1 \le p < \infty$ ve $1 < q \le \infty$ için $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için M_Ω, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır. Ayrıca, $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

Teorem 4.2.3 $V \in B_n$ olsun ve Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın. Eğer Ω, (2.18) şartını sağlıyorsa, bu durumda $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega}$, $j = 1, \ldots, n$, $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ de; eğer Ω, (2.19) şartını sağlıyorsa $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

İspat. Bu lemmanın ispatı, [35] çalışmasındaki ispat tekniği kullanılarak yapılmıştır. M_Ω kaba çekirdekli Hardy-Littlewood maximal operator olmak üzere

$$\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f(x) \le \mu_{j,\Omega} f(x) + CM_\Omega f(x), \quad h.h.y.\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$x \in \mathbb{R}^n$ ve $r = \rho(x)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}} f(x) \leq & \left(\int_0^r \left| \int_{|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)| K_j^{\mathcal{L}}(x,y) f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_r^\infty \left| \int_{|x-y|\leq r} |\Omega(x-y)| K_j^{\mathcal{L}}(x,y) f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_r^\infty \left| \int_{r<|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)| K_j^{\mathcal{L}}(x,y) f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \left(\int_0^r \left| \int_{|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)| [K_j^{\mathcal{L}}(x,y) - K_j(x,y)] f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_0^r \left| \int_{|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)| K_j(x,y) f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_r^\infty \left| \int_{|x-y|\leq r} |\Omega(x-y)| K_j^{\mathcal{L}}(x,y) f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_r^\infty \left| \int_{r<|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)| K_j^{\mathcal{L}}(x,y) f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
:= & E_1 + E_2 + E_3 + E_4
\end{aligned}$$

şeklindedır.

Lemma 3.1.6 den E_1,

$$E_1 \leq C \left(\int_0^r \left| \frac{1}{r} \int_{|x-y|\leq t} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-2}} \, |f(y)| dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C M_\Omega f(x)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$E_2 \leq \mu_{j,\Omega} f(x)$$

olduğu açıktır.

E_3 için Lemma 3.1.6 kullanılarak

$$E_3 \leq \left(\int_r^\infty \left| \frac{1}{r} \int_{|x-y|\leq r} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-2}} \, |f(y)| dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C M_\Omega f(x)$$

olduğu gösterilir. Son olarak E_4 için tekrar Lemma 3.1.6 kullanılarak

$$\begin{aligned}
E_4 &\leq C\left(\int_r^\infty \left| r\int_{r<|x-y|\leq t} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n}\ |f(y)|dy\right|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_r\left(\int_r^\infty \left|\sum_{k=0}^{[\log_2 t/r]+1} (2^k r)^n \int_{|x-y|\leq 2^k r} |\Omega(x-y)||f(y)|dy\right|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_r\left(\int_r^\infty \left|\big(\big[\log_2 \frac{t}{r}\big]+1\big)M_\Omega f(x)\right|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_r\left(\int_r^\infty \frac{t}{r} M_\Omega f(x)^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C M_\Omega f(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ve Teorem 4.2.3 nin ispatı tamamlanır. ∎

Lemma 4.2.4 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ ve $V \in B_n$ olsun. $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $1 < q \leq \infty$ (2.16) ve (2.17) şartlarını sağlasın. Herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı için eğer $p > 1$ ise, bu durumda $q' \leq p$ olacak şekilde her $f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}} f\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^\infty t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt \tag{4.3}$$

ve $p < q$ olaca şekilde her $f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}} f\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \int_{2r}^\infty t^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt \tag{4.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $p = 1$ ise, bu durumda her $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}} f\|_{WL_1(B(x_0,r))} \lesssim r^n \int_{2r}^\infty t^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} dt$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned}
\|\Omega(x-\cdot)\|_{L_q(B(x_0,t))} &= \left(\int_{B(x-x_0,t)} |\Omega(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{B(0,t+|x-x_0|)} |\Omega(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^{t+|x-x_0|} r^{n-1} dr \int_{S^{n-1}} |\Omega(y')|^q d\sigma(y')\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= c_0\ \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\ |B(0,t+|x-x_0|)|^{\frac{1}{q}},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olup $p \in (1,\infty)$ olsun. Burada, $c_0 = (nv_n)^{-1/q}$ ve $v_n = |B(0,1)|$ şeklindedir.

Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0,r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar olmak üzere $2B = B(x_0,2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \qquad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{\complement_{(2B)}}(y), \qquad r > 0$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f\|_{L_p(B)} \leq \|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f_1\|_{L_p(B)} + \|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f_2\|_{L_p(B)}$$

şeklinde yazabiliriz.

$f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $\mu^{\mathcal{L}}_j f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olur ve $\mu^{\mathcal{L}}_j$ in $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki sınırlılığından

$$\begin{aligned}
\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f_1\|_{L_p(B)} &\leq \|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\approx \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \|f\|_{L_p(2B)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada C, f fonksiyonundan bağımsız pozitif bir sabittir.

$x \in B$, $y \in {}^{\complement}(2B)$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olduğunu gösterir ve

$$\mu^{\mathcal{L}}_j f_2(x) \lesssim \int_{\complement_{(2B)}} \frac{|\Omega(x-y)||f(y)|}{|x_0 - y|^n}\, dy$$

elde ederiz. Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|\Omega(x-y)||f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy &\approx \int_{\complement_{(2B)}} |\Omega(x-y)|\,|f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |x_0-y| < t} |\Omega(x-y)|\,|f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |\Omega(x-y)|\,|f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $q' \leq p$ iken (4.5) ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|\Omega(x-y)|\,|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|\Omega(x-\cdot)\|_{L_q(B(x_0,t))}\, \|f\|_{L_{q'}(B(x_0,t))}\, \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))}\, |B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\, |B(x_0, t + |x - x_0|)|^{\frac{1}{q}}\, \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))}\, |B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\, |B(x_0,t)|^{\frac{1}{q}}\, \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca her $p \in [1,\infty)$ için

$$\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f_2\|_{L_p(B)} \lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt$$

eşitsizliği bulunur. Sonuç olarak

$$\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f\|_{L_p(B)} \lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \Big(\|f\|_{L_p(2B)} + r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt \Big)$$

elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(2B)} &\approx r^{\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(2B)} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt \end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur. O halde sonuç olarak

$$\begin{aligned} \|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f\|_{L_p(B)} &\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt \end{aligned}$$

elde edilir. $1 < p < q$ iken Minkowski teoremi ve Hölder eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} \|\mu^{L}_{\Omega} f_2\|_{L_p(B)} &\leq \Bigg(\int_B \Bigg(\int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |\Omega(x-y)||f(y)| dy\, \frac{dt}{t^{n+1}} \Bigg)^p dx \Bigg)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_p(B)} |f(y)|\, dy\, \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim |B(x_0,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_q(B)}\, |f(y)|\, dy\, \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\, |B(x_0,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |B(0, r+|x_0-y|)|^{\frac{1}{q}}\, |f(y)|\, dy\, \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\, r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_1 B(x_0,t)}\, |B(0,r+t)|^{\frac{1}{q}}\, dy\, \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\, r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))}\, t^{\frac{n}{q}}\, \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} t^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))}\, dt \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f\|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} t^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt$$

bulunur. Eğer $p = 1 < s < \infty$ ise, bu durumda $\mu_{j,\Omega}^{L}$ in zayıf $(1,1)$ sınırlılığından ve (4.6) ifadesinden

$$\begin{aligned}
\|\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}} f_1\|_{WL_1(B)} \le \|\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}} f_1\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_1(2B)} \\
&\lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| dy \, \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\le r^n \int_{2r}^{\infty} t^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \, dt
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır. ∎

Teorem 4.2.5 $1 \le p < \infty$, $1 < q \le \infty$ ve $q' \le p$ veya $p < q$ olsun. Ayrıca $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, (2.16), (2.17) ifadelerini sağlasın ve $V \in B_n$ olsun. Eğer (φ_1, φ_2) çifti (4.1),(4.2) şartlarını sağlıyorsa ve $\delta > 0$ için

$$c_\delta := \int_{\delta}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_1(x,t) t^{-\frac{n}{p}-1} dt < \infty \tag{4.7}$$

ve

$$\int_{r}^{\infty} \frac{\varphi_1(x,t)}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \le C_0 \frac{\varphi_2(x,r)}{r^{\frac{n}{p}}} \tag{4.8}$$

ise, bu durumda $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$, ise, $j = 1, \ldots, n$, VM_{p,φ_1} den VM_{p,φ_2} e sınırlıdır. C_0, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ den bağımsızdır.

Uyarı 4.2.6 Eğer $\varphi(x,r)$, x e bağlı değilse (4.7) şartına gerek yoktur. Çünkü (4.7) şartı (4.8) den çıkmaktadır.

İspat. Lemma 4.2.4 ve (4.8) den

$$\begin{aligned}
\|\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}} f\|_{VM_{p,\varphi_2}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \, \|\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}\|_{L_p(B(x,r))} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \, r^{\frac{n}{p}} \int_r^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \, r^{\frac{n}{p}} \int_r^{\infty} \varphi_1(x,t) \left[\varphi_1(x,t)^{-1} \, \|f\|_{L_p(B(x_0,t))}\right] \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \\
&\lesssim \|f\|_{VM_{p,\varphi_1}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \, r^{\frac{n}{p}} \int_r^{\infty} \varphi_1(x,t) \, \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \\
&\lesssim \|f\|_{VM_{p,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{r\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_1(x,r)^{-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{r\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_2(x,r)^{-1} \|\mu_{j,\Omega}^{L}\|_{L_p(B(x,r))} = 0$$

gösterilmesi yeterlidir. Bu yüzden $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_2(x,r)^{-1}\|\mu^L_{j,\Omega}\|_{L_p(B(x,r))} < \varepsilon$ olduğunu göstermek için olabildiğince küçük r ler için (4.4) ifadesinin sağ tarafını parçalayalım.

$$\varphi_2(x,r)^{-1}\|\mu^L_{j,\Omega}\|_{L_p(B(x,r))} \le C[I_\delta(x,r) + J_\delta(x,r)], \tag{4.9}$$

olup burada $\delta_0 > 0$ dır. (Ayrıca $\delta_0 > 1$ alınabilir),

$$I_\delta(x,r) := \frac{r^{\frac{n}{p}}}{\varphi_2(x,r)}\left(\int_r^{\delta_0} \varphi_1(x,t)t^{-\frac{n}{p}-1}\left(\varphi_1(x,t)^{-1}\|f\|_{L_p(B(x,t))}\right)dt\right)$$

ve

$$J_\delta(x,r) := \frac{r^{\frac{n}{p}}}{\varphi_2(x,r)}\left(\int_{\delta_0}^{\infty} \varphi_1(x,t)t^{-\frac{n}{p}-1}\left(\varphi_1(x,t)^{-1}\|f\|_{L_p(B(x,t))}\right)dt\right)$$

ve $r < \delta_0$ olduğu varsayılsın.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_1(x,t)^{-1}\|f\|_{L_p(B(x,t))} < \frac{\varepsilon}{2CC_0}$$

olacak şekilde herhangi bir $\delta_0 > 0$ sayısı seçelim. Burada C ve C_0 (4.8) ve (4.9) daki sabitlerdir. Bu durum $r \in (0,\delta_0)$ için ilk terimin

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} CI_{\delta_0}(x,r) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < r < \delta_0.$$

şeklinde olduğunu gösterir.

Şimdi yeterince küçük r için ikinci terimin durumuna bakalım. (4.1) şartından dolayı

$$J_\delta(x,r) \le c_{\delta_0}\|f\|_{VM_{p,\varphi}}\frac{r^{\frac{n}{p}}}{\varphi(x,r)}$$

olur. Burada c_{δ_0}, (4.7) deki sabittir. Bu durumda (4.1) ifadesinden dolayı

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{r^{\frac{n}{p}}}{\varphi(x,r)} \le \frac{\varepsilon}{2c_{\delta_0}\|f\|_{VM_{p,\varphi}}}$$

olacak şekilde yeterince küçük r seçmek yeterlidir. ■

4.3 Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Kaba Çekirdekli $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}$ Marcinkiewicz İntegral Operatörünün Komütatörünün $VM_{p,\varphi}$ Vanishing Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Sınırlılığı

Bu çalışmada kaba çekirdekli klasik Marcinkiewicz fonksiyonunun komütatörü

$$\mu_{j,\Omega,b}f(x) = \left(\int_0^\infty \left|\int_{|x-y|\le t} |\Omega(x-y)|K_j(x,y)[b(x)-b(y)]f(y)dy\right|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}$$

şeklinde olup $K_j(x,y) = K_j^{\Delta}(x,y)$ dır. Schrödinger operatörüne karşılık gelen Marcinkiewicz fonksiyonunun komütatörü

$$\mu_{j,\Omega,b}^{\mathcal{L}} f(x) = \left(\int_0^{\infty} \left| \int_{|x-y|\le t} |\Omega(x-y)| K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)] f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır. $b \in L_1^{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ için maximal operatörünün komütatörü $M_{\Omega,b}$ ise aşağıdaki şekildedir.

$$M_{\Omega,b} f(x) = \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |b(x)-b(y)| \, |\Omega(x-y)| \, |f(y)| dy$$

Teorem 4.3.1 ([6]) Ω, (2.16) şartını sağlasın ve $1 < q \le \infty$ için $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ olsun. Ayrıca $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun ve her $q' < p < \infty$ veya $1 < p < q$ için

$$\|M_{\Omega,b}(f)\|_{L_p} \le C\|f\|_{L_p}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır. Yani $p > 1$ için $M_{\Omega,b}$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den zayıf $WL_1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

Teorem 4.3.2 ([26]) Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $1 < q \le \infty$ için $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ olsun. Ayrıca $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için $\mu_{\Omega,b}$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ sınırlıdır ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den zayıf $WL_1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

Teorem 4.3.3 $V \in B_n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın. Bu durumda her $q' < p < \infty$ için veya $1 < p < q$ için

$$\|\mu_{j,\Omega,b}^{\mathcal{L}}(f)\|_{L_p} \le C\|f\|_{L_p}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti mevcuttur.

İspat. Bu lemmanın ispatı, [3], [4] ve [35] çalışmalarındaki ispat tekniği kullanılarak yapılmıştır. $M_{\Omega,b}$ kaba çekirdekli Hardy-Littlewood maximal operatörünün komütatörü olmak üzere

$$\mu_{j,\Omega,b}^{\mathcal{L}} f(x) \le \mu_{j,\Omega,b} f(x) + C M_{\Omega,b} f(x), \quad h.h.y. \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$x \in \mathbb{R}^n$ ve $r = \rho(x)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b} f(x) \leq & \left(\int_0^r \left| \int_{|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)| K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)] f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_r^\infty \left| \int_{|x-y|\leq r} |\Omega(x-y)| K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)] f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_r^\infty \left| \int_{r<|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)| K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)] f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \left(\int_0^r \left| \int_{|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)| [K_j^{\mathcal{L}}(x,y) - K_j(x,y)][b(x)-b(y)] f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_0^r \left| \int_{|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)| K_j(x,y)[b(x)-b(y)] f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_r^\infty \left| \int_{|x-y|\leq r} |\Omega(x-y)| K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)] f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_r^\infty \left| \int_{r<|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)| K_j^{\mathcal{L}}(x,y)[b(x)-b(y)] f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
:= & E_1 + E_2 + E_3 + E_4
\end{aligned}
$$

şeklindedır.

Lemma 3.1.6 den E_1,

$$
\begin{aligned}
E_1 & \leq C \left(\int_0^r \left| \frac{1}{r} \int_{|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)| [b(x)-b(y)] \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2}} dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq C M_{\Omega,b} f(x)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$
E_2 \leq \mu_{j,\Omega,b} f(x)
$$

olduğu açıktır.

E_3 için Lemma 3.1.6 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
E_3 & \leq \left(\int_r^\infty \left| \frac{1}{r} \int_{|x-y|\leq r} |\Omega(x-y)| [b(x)-b(y)] \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2}} dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq C M_{\Omega,b} f(x)
\end{aligned}
$$

olduğu gösterilir. Son olarak E_4 için tekrar Lemma 3.1.6 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
E_4 &\leq C\left(\int_r^\infty \left| r\int_{r<|x-y|\leq t} |\Omega(x-y)||[b(x)-b(y)]\frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy\right|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_r\left(\int_r^\infty \left|\sum_{k=0}^{[\log_2 t/r]+1}(2^k r)^n\int_{|x-y|\leq 2^k r}|\Omega(x-y)|[b(x)-b(y)]||f(y)|dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_r\left(\int_r^\infty |([\log_2 t/r]+1)M_{\Omega,b}f(x)|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_r\left(\int_r^\infty \frac{t}{r}M_{\Omega,b}f(x)^2\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq CM_{\Omega,b}f(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve Teorem 4.3.3 nin ispatı tamamlanır. ■

Lemma 4.3.4 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $1 < q \leq \infty$ (2.16) ve (2.17) şartlarını sağlasın ve , $V \in B_n$ olsun. Herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı için eğer $p > 1$ ise, bu durumda $q' \leq p$ veya $p < q$ olacak şekilde her $f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$
\|\mu_{j,\Omega,b}f\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim \|b\|_* r^{\frac{n}{p}}\int_{2r}^\infty \left(1+\ln\frac{t}{r}\right)t^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}\,dt \tag{4.10}
$$

eşitsizliği sağlanır. Herhangi bir $B(x, r)$ yuvarı için eğer $p = 1$ ise, bu durumda her $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$
\|\mu_{j,\Omega,b}f\|_{WL_1(B(x,r))} \lesssim \|b\|_* r^n\int_{2r}^\infty \left(1+\ln\frac{t}{r}\right)t^{-n-1}\|f\|_{L_1(B(x,t))}\,dt
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $p \in (1, \infty)$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar olmak üzere $2B = B(x_0, 2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$
f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{\complement_{(2B)}}(y), \quad r > 0
$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$
\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}f\|_{L_p(B)} \leq \|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}f_1\|_{L_p(B)} + \|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}f_2\|_{L_p(B)}
$$

şeklinde yazabiliriz.

$f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}(f_1) \in L_p$ olur ve $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}$ in $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki sınırlılığından (Teorem 4.3.2)

$$\begin{aligned}\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b} f_1\|_{L_p(B)} \leq \|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b} f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\approx \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \|b\|_* \|f\|_{L_p(2B)}\end{aligned}$$

elde edilir.

$x \in B$, $y \in {}^{\complement}(2B)$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olduğunu gösterir ve

$$\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}(f_2(x)) \lesssim \int_{\complement_{(2B)}} |b(y) - b(x)||\Omega(x - y)| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\|\mu_{j,\Omega,b} f_2\|_{L_p(B)} \lesssim & \left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} |b(y) - b(x)||\Omega(x - y)| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ \lesssim & \left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} |b(y) - b_B||\Omega(x - y)| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ & + \left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} |b(x) - b_B||\Omega(x - y)| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ = & I_1 + I_2\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}I_1 &= r^{\frac{n}{p}} \int_{\complement_{(2B)}} |b(y) - b_B||\Omega(x - y)| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \\ &\approx r^{\frac{n}{p}} \int_{\complement_{(2B)}} |b(y) - b_B||\Omega(x - y)||f(y)| \int_{|x_0 - y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\ &\approx r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |x_0 - y| \leq t} |b(y) - b_B||\Omega(x - y)||f(y)| \, dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y) - b_B||\Omega(x - y)||f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Hölder eşitsizliği ve (2.4) kullanılarak,

$$\begin{aligned}I_1 \lesssim & \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|\Omega(x - \cdot)\|_{L_q(B(x_0,t))} \|f\|_{L_{q'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\ \lesssim & \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) |B(0, t + |x - x_0|)|^{\frac{1}{q}} |B(x_0, t)|^{1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \\ & \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dy \, \frac{dt}{t^{n+1}} \\ \lesssim & \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{p} - 1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \, dt\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan

$$I_2 = \left(\int_B |b(x) - b_B|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \int_{\complement(2B)} \frac{|\Omega(x-y)||f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

elde edilir. (2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{\complement(2B)} \frac{|\Omega(x-y)||f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \\ &\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \, \|f\|_{L_p(B(x,t))} \, dt \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $p \in (1, \infty)$ için I_1 ve I_2 ifadeleri toplanırsa

$$\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b} f_2\|_{L_p(B)} \lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt.$$

elde edilir. O halde sonuç olarak

$$\begin{aligned} \|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b} f\|_{L_p(B)} \lesssim & \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \, \|b\|_* \Big(\|f\|_{L_p(2B)} \\ & + r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt \Big) \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan

$$\begin{aligned} \|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b} f\|_{L_p(B)} &\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \, \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \, dt \\ &\lesssim \|b\|_* \, (B(x_0, r))^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \, dt \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer teknik kullanılarak $1 < p < q$ için gösterilebilir ve ispat tamamlanır.

$$\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f\|_{L_p(B)} \lesssim \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt$$

bulunur. Eğer $p = 1 < s < \infty$ ise, bu durumda $\mu^L_{j,\Omega}$ in zayıf $(1, 1)$ sınırlılığından ve (4.6) ifadesinden

$$\begin{aligned} \|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f_1\|_{WL_1(B)} &\leq \|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega} f_1\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|b\|_* \|f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \|b\|_* \|f\|_{L_1(2B)} \\ &\leq \|b\|_* r^n \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \, dt \end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.3.5 $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ ve $q' \leq p$ veya $p < q$ olsun. Ayrıca $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, (2.16), (2.17) ifadelerini sağlasın ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $V \in B_n$ olsun. Eğer (φ_1, φ_2) çifti (4.1),(4.2) şartlarını sağlıyorsa ve her $\delta > 0$ için

$$c_\delta := \int_{\delta}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_1(x,t) t^{-\frac{n}{p}-1} dt < \infty \qquad (4.11)$$

ve

$$\int_r^\infty \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\frac{\varphi_1(x,t)}{t^{\frac{n}{p}+1}}dt \le C_0\frac{\varphi_2(x,r)}{r^{\frac{n}{p}}} \tag{4.12}$$

ise, bu durumda $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega}$, $j=1,\ldots,n$, VM_{p,φ_1} den VM_{p,φ_2} e sınırlıdır. Burada C_0, $x\in\mathbb{R}^n$ ve $r>0$ den bağımsızdır.

Uyarı 4.3.6 Eğer $\varphi(x,r)$, x e bağlı değilse, (4.11) şartına gerek yoktur. Çünkü (4.11) şartı (4.12) den çıkmaktır.

İspat. Lemma 5.2.1 ve (4.12) ifadesinden

$$\begin{aligned}
\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}f\|_{VM_{p,\varphi_2}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\varphi_2(x,r)^{-1}\,\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}\|_{L_p(B(x,r))}\\
&\lesssim \|b\|_*\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\varphi_2(x,r)^{-1}\,r^{\frac{n}{p}}\int_r^\infty\Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)t^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x_0,t))}\,dt\\
&\lesssim \|b\|_*\|f\|_{VM_{p,\varphi_1}}\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\varphi_2(x,r)^{-1}\,r^{\frac{n}{p}}\int_r^\infty\Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)t^{-\frac{n}{p}-1}\varphi_1(x,t)\,dt\\
&\lesssim \|b\|_*\|f\|_{VM_{p,\varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{r\to0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\varphi_1(x,r)^{-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{r\to0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\varphi_2(x,r)^{-1}\|\mu^{L}_{j,\Omega,b}\|_{L_p(B(x,r))}=0$$

gösterilmesi yeterlidir. Bu yüzden $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\varphi_2(x,r)^{-1}\|\mu^{L}_{j,\Omega,b}\|_{L_p(B(x,r))}<\varepsilon$ olduğunu göstermek için olabildiğince küçük r ler için (4.10) ifadesinin sağ tarafını parçalayalım.

$$\varphi_2(x,r)^{-1}\|\mu^{L}_{j,\Omega,b}\|_{L_p(B(x,r))}\le C[I_\delta(x,r)+J_\delta(x,r)] \tag{4.13}$$

olup burada $\delta_0>0$ dır. (Ayrıca $\delta_0>1$ alınabilir),

$$I_\delta(x,r):=\|b\|_*\frac{r^{\frac{n}{p}}}{\varphi_2(x,r)}\left(\int_r^{\delta_0}\Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\varphi_1(x,t)t^{-\frac{n}{p}-1}\left(\varphi_1(x,t)^{-1}\|f\|_{L_p(B(x,t))}\right)dt\right)$$

ve

$$J_\delta(x,r):=\|b\|_*\frac{r^{\frac{n}{p}}}{\varphi_2(x,r)}\left(\int_{\delta_0}^{\infty}\Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\varphi_1(x,t)t^{-\frac{n}{p}-1}\left(\varphi_1(x,t)^{-1}\|f\|_{L_p(B(x,t))}\right)dt\right)$$

ve $r<\delta_0$ olduğu varsayılsın.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\varphi_1(x,t)^{-1}\|f\|_{L_p(B(x,t))}<\frac{\varepsilon}{2CC_0}$$

olacak şekilde herhangi bir $\delta_0 > 0$ sayısı seçelim. Burada C ve C_0 (4.12) ve (4.13) daki sabitlerdir. Bu durum $r \in (0, \delta_0)$ için ilk terimin

$$\|b\|_* \sup_{x \in \mathbb{R}^n} C I_{\delta_0}(x,r) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < r < \delta_0$$

şeklinde olduğunu gösterir.

Şimdi yeterince küçük r için ikinci terimin durumuna bakalım. (4.1) şartından dolayı

$$J_\delta(x,r) \leq \|b\|_* c_{\delta_0} \|f\|_{VM_{p,\varphi}} \frac{r^{\frac{n}{p}}}{\varphi(x,r)}$$

olur. Burada c_{δ_0}, (4.11) deki sabittir. Bu durumda (4.1) ifadesinden dolayı

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{r^{\frac{n}{p}}}{\varphi(x,r)} \leq \frac{\varepsilon}{2\|b\|_* c_{\delta_0} \|f\|_{VM_{p,\varphi}}},$$

olacak şekilde yeterince küçük r seçmek yeterlidir. ■

5 SCHRODINGER OPERATÖRÜNE KARŞILIK GELEN KABA ÇEKİRDEKLİ $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$ MARCINKIEWICZ İNTEGRAL OPERATÖRÜNÜN VE $\mu_{j,\Omega,b}^{\mathcal{L}}$ KOMÜTATÖRÜNÜN $M_{p,\varphi}(\omega)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLI MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Bu bölümde $1 < q \leq \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ için $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ olmak üzere Schrödinger operatörüne karşılık gelen kaba çekirdekli $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$ Marcinkiewicz integral operatörlerinin ve $\mu_{j,\Omega,b}^{\mathcal{L}}$ komütatörlerinin genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılığı elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar uluslararası indeksli dergide ”Commutators of Marcinkiewicz integrals associated with Schrödinger operator on generalized weighted Morrey spaces” başlığı ile yayımlanması için gönderilmiştir.

5.1 Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Kaba Çekirdekli $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$ Marcinkiewicz İntegral Operatörünün $M_{p,\varphi}(\omega)$ Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Sınırlılığı

Eğer $1 < p < \infty$ olmak üzere herhangi bir $B = B(y, r)$ yuvarı için

$$\begin{aligned}[\omega]_{A_p} &= \sup_B [\omega]_{A_p(B)} \\ &= \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1} < \infty\end{aligned}$$

ise ω ağırlık fonksiyonu A_p Muckenhoupt sınıfındandır denir. Burada supremum bütün B yuvarları üzerinden alınmaktadır ve $1/p+1/p'$ biçimindedir. Burada Hölder eşitsizliğini kullanarak bütün B yuvarları için

$$[\omega]_{A_p(B)}^{1/p} = |B|^{-1}\|w\|_{L_1(B)}^{1/p}\|w^{-1/p}\|_{L_{p'}(B)} \geq 1 \tag{5.1}$$

olur. $p = 1$ için A_1 sınıfı $[\omega]_{A_1} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$ olacak şekilde $Mw(x) \leq Cw(x)$ şartı ile tanımlanır. Ayrıca $p = \infty$ için $A_\infty = \bigcup_{1\leq p<\infty} A_p$ ve $[\omega]_{A_\infty} = \inf\limits_{1\leq p<\infty}[\omega]_{A_p}$ şeklindedir (bkz. [67]).

Önerme 5.1.1 A_p Muckenhoupt sınıfı tanımından

$$\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'} \Rightarrow [\omega^{1-p'}]_{A_{p'/q'}(B)}^{q'/p'} = |B|^{-1}\|\omega^{1-p'}\|_{L_1(B)}^{q'/p'}\|w^{q'/p}\|_{L_{(p'/q')'}(B)}$$

olduğu bilinir. Ayrıca $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'} \subset A_{p'}$ olduğundan $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'} \Rightarrow \omega^{1-p'} \in A_{p'}$ şeklinde yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \omega^{1-p'} \in A_{p'/q'} &\Rightarrow \omega^{1-p'} \in A_{p'} \\ &\Rightarrow [\omega^{1-p'}]^{1/p'}_{A_{p'}(B)} = |B|^{-1} \|\omega^{1-p'}\|^{1/p'}_{L_1(B)} \|w^{1/p}\|_{L_p(B)} \end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir. Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Önerme 5.1.2 $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ ifadesini ispatımızda kolaylık sağlaması için

$$\begin{aligned} \omega^{1-p'} \in A_{p'/q'} \Rightarrow [\omega^{1-p'}]^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}_{A_{p'/q'}(B)} &= |B|^{-1} \|\omega^{1-p'}\|^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}_{L_1(B)} \|w^{q'/p}\|_{L_{(p'/q')'}(B)} \\ \Rightarrow [\omega^{1-p'}]^{1/p'}_{A_{p'/q'}(B)} &= |B|^{-\frac{q-1}{q}} \|\omega^{1-p'}\|^{1/p'}_{L_1(B)} \|\omega\|^{1/p}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)} \end{aligned} \tag{5.3}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$1 - p' = -\frac{p'}{p}, \quad \frac{q'}{p} = \frac{q}{p(q-1)}, \quad \frac{q'}{p'} = \frac{q(p-1)}{p(q-1)}, \quad \left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{q}{q-p}, \quad \left(\frac{p'}{q'}\right)' = \frac{p(q-1)}{q-p}.$$

Eğer (5.3) ifadesinde $\|\omega^{1-p'}\|^{1/p'}_{L_1(B)}$ nın yerine (5.2) yazılırsa, bu durumda

$$\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'} \Rightarrow [\omega^{1-p'}]^{1/p'}_{A_{p'/q'}(B)} = |B|^{\frac{1}{q}} [\omega^{1-p'}]^{1/p'}_{A_{p'}(B)} \|w^{1/p}\|^{-1}_{L_p(B)} \|\omega\|^{1/p}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)} \tag{5.4}$$

elde edilir.

Lemma 5.1.3 $1 < p < q$, $\omega^{1-p'} \in A_{\frac{p'}{q'}}$ olsun. Bu durumda, her $y \in \mathbb{R}^n$ ve $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için

$$\|\Omega(\cdot - y)\|_{L_{p,\omega}(B)} \lesssim \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_q(B)} \|\omega\|^{\frac{1}{p}}_{L_{(q/p)'}(B)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_{p,\omega}(B)} &= \left(\int_B |\Omega(\cdot - y)|^p \, w \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \left(\int_B |\Omega(\cdot - y)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_B w^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}} \\ &\approx \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_q(B)} \left(\int_B w^{(q/p)'} \right)^{\frac{1}{(q/p)'} \frac{1}{p}} \\ &\approx \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_q(B)} \|\omega\|^{\frac{1}{p}}_{L_{(q/p)'}(B)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 5.1.4 ([29]) Ω, (2.16) şartını sağlasın ve $1 < q \leq \infty$ için $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ olsun. Bu durumda, her $q' \leq p < \infty$, $p \neq 1$ ve $\omega \in A_{p/q'}$ veya $1 < p \leq q$ ve $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için

$$\|M_\Omega(f)\|_{L_{p,\omega}} \leq C\|f\|_{L_{p,\omega}}$$

olacak şekilde f, Ω ve ω den bağımsız bir C sabiti mevcuttur.

Teorem 5.1.5 ([6]) Ω, (2.16) şartını sağlasın. Ayrıca $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < q \leq \infty$ için $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ olsun. Bu durumda her $q' \leq p < \infty$, $p \neq 1$ ve $\omega \in A_{p/q'}$ veya $1 < p \leq q$ ve $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için

$$\|M_{\Omega,b}(f)\|_{L_{p,\omega}} \leq C\|f\|_{L_{p,\omega}}$$

olacak şekilde f, Ω ve ω den bağımsız bir C sabiti mevcuttur.

Teorem 5.1.6 ([27]) Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $1 < q \leq \infty$ için $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ olsun. Bu durumda, her $q' < p < \infty$ ve $\omega \in A_{p/q'}$ veya $1 < p < q$ ve $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L_{p,\omega}} \leq C\|f\|_{L_{p,\omega}}$$

olacak şekilde f, Ω ve ω den bağımsız bir C sabiti mevcuttur.

Teorem 5.1.7 ([26]) Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın. Ayrıca $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < q \leq \infty$ için $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ olsun. Bu durumda, her $q' < p < \infty$ ve $\omega \in A_{p/q'}$ veya $1 < p < q$ ve $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için

$$\left\|\mu_{\Omega,b}(f)\right\|_{L_{p,\omega}} \leq C\|f\|_{L_{p,\omega}}$$

olacak şekilde f, Ω ve ω den bağımsız bir C sabiti mevcuttur.

Lemma 5.1.8 Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $1 < q \leq \infty$ olsun. Bu durumda herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $q' < p < \infty$, $\omega \in A_{p/q'}$ olacak şekilde her $f \in L^{\text{loc}}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,r))} \lesssim \omega(B(x_0, r))^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\, \omega(B(x_0, t))^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $1 < p < q$, $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ olacak şekilde her $f \in L^{\text{loc}}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,r))} \lesssim \|\omega\|^{\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,r))} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\, \|\omega\|^{-\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $1 < q \le \infty$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$, için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar olmak üzere $2B = B(x_0, 2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{\complement_{(2B)}}(y), \quad r > 0$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L_{p,\omega}(B)} \le \|\mu_\Omega(f_1)\|_{L_{p,\omega}(B)} + \|\mu_\Omega(f_2)\|_{L_{p,\omega}(B)}$$

şeklinde yazabiliriz.

$f_1 \in L_p(\omega)$ olduğundan $\mu_\Omega(f_1) \in L_p(\omega)$ olur ve $\omega \in A_{p/q'}$ ve $q' < p < \infty$ için μ_Ω in $L_p(\omega)$ deki sınırlılığından (bkz. Teorem 5.1.6)

$$\begin{aligned}
\|\mu_\Omega(f_1)\|_{L_{p,\omega}(B)} &\le \|\mu_\Omega(f_1)\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} [\omega]_{A_{\frac{p}{q'}}}^{\frac{1}{p}} \|f_1\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\
&\approx \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} [\omega]_{A_{\frac{p}{q'}}}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,\omega}(2B)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$x \in B$, $y \in \complement(2B)$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \le |x - y| \le \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olduğunu gösterir ve

$$\mu_\Omega(f_2(x)) \lesssim \int_{\complement_{(2B)}} \frac{|\Omega(x-y)||f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

elde edilir. Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|\Omega(x-y)||f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy &\approx \int_{\complement_{(2B)}} |\Omega(x-y)|\,|f(y)| \int_{|x-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\
&= \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \le |x_0 - y| < t} |\Omega(x-y)|\,|f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |\Omega(x-y)|\,|f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

olur. $q' < p < \infty$ ve $\omega \in A_{p/q'}$ iken (4.5) ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\int_{\complement_{(2B)}} \frac{|\Omega(x-y)|\,|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|\Omega(x - \cdot)\|_{L_q(B(x_0,t))} \|f\|_{L_{q'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))} \|\omega^{-q'/p}\|_{L_{(p/q')'}(B(x_0,t))}^{\frac{1}{q'}} |B(0, t + |x - x_0|)|^{\frac{1}{q}} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} [\omega]_{A_{\frac{p}{q'}}}^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,t))} \omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}} |B(x_0,t)|^{\frac{1}{q'}} |B(0, t + |x - x_0|)|^{\frac{1}{q}} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} [\omega]_{A_{\frac{p}{q'}}}^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))} \omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, her $p \in (1,\infty)$ için

$$\|\mu_\Omega\left(f_2\right)\|_{L_{p,\omega}(B)} \lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\,[\omega]_{A_{\frac{p}{q'}}}^{\frac{1}{p}}\,\omega(B)^{\frac{1}{p}}\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}}\frac{dt}{t}$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\|\mu_\Omega(f)\|_{L_{p,\omega}(B)} \lesssim & \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\,[\omega]_{A_{\frac{p}{q'}}}^{\frac{1}{p}}\Big(\|f\|_{L_{p,\omega}(2B)} \\ & + \omega(B)^{\frac{1}{p}}\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}}\frac{dt}{t}\Big)\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan $w \in A_{\frac{p}{q'}}$ olması $w \in A_p$ olduğunu gösterir ve (5.1) ifadesinden,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_{p,\omega}(2B)} &\approx |B|\|f\|_{L_{p,\omega}(2B)}\int_{2r}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim |B|\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim \omega(B)^{\frac{1}{p}}\|\omega^{-1/p}\|_{L_{p'}(B)}\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim \omega(B)^{\frac{1}{p}}\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\|w^{-1/p}\|_{L_{p'}(B(x_0,t))}\frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim [\omega]_{A_{\frac{p}{q'}}}^{\frac{1}{p}}\,\omega(B)^{\frac{1}{p}}\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}}\frac{dt}{t} \qquad (5.7)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde sonuç olarak

$$\begin{aligned}\|\mu_\Omega(f)\|_{L_{p,\omega}(B)} &\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\,[\omega]_{A_{\frac{p}{q'}}}^{\frac{1}{p}}\,\omega(B)^{\frac{1}{p}}\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}}\frac{dt}{t} \\ &\lesssim \omega(B(x_0,r))^{\frac{1}{p}}\int_{2r}^{\infty}\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}}\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

bulunur.

$1 < p < q$ ve $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ iken $f_1 \in L_p(\omega)$, $\mu_\Omega\left(f_1\right) \in L_p(\omega)$ olduğundan ve $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ ve $1 < p < q$ için μ_Ω, $L_p(\omega)$ de sınırlı olduğundan (bkz. Teorem 5.1.6)

$$\begin{aligned}\|\mu_\Omega\left(f_1\right)\|_{L_{p,\omega}(B)} &\leq \|\mu_\Omega\left(f_1\right)\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\,[\omega^{1-p'}]_{A_{\frac{p'}{q'}}}^{\frac{1}{p'}}\,\|f_1\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\ &\approx \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\,[\omega^{1-p'}]_{A_{\frac{p'}{q'}}}^{\frac{1}{p'}}\,\|f\|_{L_{p,\omega}(2B)}\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $1 < p < q$ ve $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ ise, bu durumda (4.5) ve (5.5) ifadelerinden, Lemma 5.1.3, Minkowski teoremi ve Hölder eşitsizliğinden

$$\|\mu_\Omega(f_2)\|_{L_{p,\omega}(B)} \le \left(\int_B \left(\int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |\Omega(x-y)||f(y)|dy \frac{dt}{t^{n+1}}\right)^p \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} \|\Omega(\cdot-y)\|_{L_{p,\omega}(B)}|f(y)|\,dy\,\frac{dt}{t^{n+1}}$$
$$\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} \|\Omega(\cdot-y)\|_{L_q(B)}\,\|\omega\|_{L_{(q/p)'}(B)}^{\frac{1}{p}}\,|f(y)|\,dy\,\frac{dt}{t^{n+1}}$$
$$\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\,\|\omega\|_{L_{(q/p)'}(B)}^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |B(0,r+|x_0-y|)|^{\frac{1}{q}}\,|f(y)|\,dy\,\frac{dt}{t^{n+1}}$$
$$\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\,\|\omega\|_{L_{(q/p)'}(B)}^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))}\,|B(0,r+t)|^{\frac{1}{q}}\,\frac{dt}{t^{n+1}}$$
$$\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\,\|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)}^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\|w^{-p'/p}\|_{L_1(B(x_0,t))}^{\frac{1}{p'}}\,|B(x_0,t)|^{\frac{1}{q}}\,\frac{dt}{t^{n+1}}$$
$$\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\,|B|^{\frac{1}{q}}\,\|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)}^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\|\omega^{1-p'}\|_{L_1(B(x_0,t))}^{\frac{1}{p'}}\,|B(x_0,t)|^{\frac{1}{q}}\,\frac{dt}{t^{n+1}}$$

bulunur. $\|\omega^{1-p'}\|_{L_1(B(x_0,t))}^{\frac{1}{p'}}$ için (5.2) ifadesinin ve $\|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)}^{\frac{1}{p}}$ için (5.4) ifadesinin uygulanması ile

$$\|\mu_\Omega(f_2)\|_{L_{p,\omega}(B)} \lesssim \Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\,[\omega^{1-p'}]_{A_{\frac{p'}{q'}}}^{\frac{1}{p'}}\,\|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)}^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,t))}^{-\frac{1}{p}}\,\frac{dt}{t}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L_{p,\omega}(B)} \lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\,[\omega^{1-p'}]_{A_{\frac{p'}{q'}}}^{\frac{1}{p'}}\Big(\|f\|_{L_{p,\omega}(2B)}$$
$$+\,\|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)}^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,t))}^{-\frac{1}{p}}\,\frac{dt}{t}\Big)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\|f\|_{L_{p,\omega}(2B)} \approx |B|\|f\|_{L_{p,\omega}(2B)} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}}$$
$$\lesssim |B| \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\frac{dt}{t^{n+1}}$$
$$\lesssim [\omega^{1-p'}]_{A_{p'}(B)}^{-\frac{1}{p'}}\,|B|^{\frac{1}{q}}\,\|\omega^{1-p}\|_{L_1(B)}^{\frac{1}{p'}}\,\|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)}^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\frac{dt}{t^{n+1}}$$
$$\lesssim \|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)}^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,t))}^{-\frac{1}{p}}\,\frac{dt}{t}$$

olduğundan sonuç olarak

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L_{p,\omega}(B)} \lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}[\omega^{1-p'}]_{A_{\frac{p'}{q'}}}^{\frac{1}{p'}}\,\|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)}^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\|\omega\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,t))}^{-\frac{1}{p}}\,\frac{dt}{t}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.1.9 Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $1 < q \leq \infty$ olsun. Ayrıca (φ_1, φ_2) çifti, $q' < p < \infty$, $\omega \in A_{p/q'}$ için

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<\tau<\infty} \varphi_1(x,\tau)\omega(B(x,\tau))^{\frac{1}{p}}}{\omega(B(x,t))^{\frac{1}{p}}} \frac{dt}{t} \leq C\, \varphi_2(x,r) \tag{5.8}$$

şartını ve $1 < p < q$, $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<\tau<\infty} \varphi_1(x,\tau)\|\omega\|^{\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x,r))}}{\|\omega\|^{\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x,t))}} \frac{dt}{t} \leq C\, \varphi_2(x,r) \frac{\omega(B(x,r))^{\frac{1}{p}}}{\|\omega\|^{\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x,r))}} \tag{5.9}$$

şartını sağlasın. Burada C, x ve r ye bağlı değildir. Bu durumda $p > 1$ için μ_Ω operatörü $M_{p,\varphi_1}(\omega)$ den $M_{p,\varphi_2}(\omega)$ e sınırlıdır.

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{M_{p,\varphi_2}(\omega)} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(\omega)}.$$

İspat. $\nu_2(r) = \varphi_2(x,r)^{-1}$, $\nu_1(r) = \varphi_1(x,r)^{-1}\omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}$, $g(r) = \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,r))}$ ve $\omega(r) = \omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\, r^{-1}$ olmak üzere Lemma 5.1.8 ve Teorem 3.1.1 den $q' < p < \infty$, $\omega \in A_{p/q'}$ için

$$\begin{aligned}
\|\mu_\Omega(f)\|_{M_{p,\varphi_2}(\omega)} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1}\, \omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\, \|\mu_\Omega(f)\|_{L_{p,\omega}(B(x,r))} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^\infty \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,t))}\, \omega(B(x,t))^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\, \omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{L_{p,\omega}B(x,r)} \\
&= \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(\omega)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\nu_2(r) = \varphi_2(x,r)^{-1}\omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\|\omega\|^{\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x,r))}$, $\nu_1(r) = \varphi_1(x,r)^{-1}\omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}$, $g(r) = \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,r))}$ ve $\omega(r) = \|\omega\|^{-\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)} r^{-1}$ olmak üzere Lemma 5.1.8 ve Teorem 3.1.1 den $1 < p < q$, $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ durumu için

$$\begin{aligned}
&\|\mu_\Omega(f)\|_{M_{p,\varphi_2}(\omega)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1}\, \omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\, \|\mu_\Omega(f)\|_{L_{p,\omega}(B(x,r))} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1}\omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\|\omega\|^{\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)} \int_r^\infty \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,t))}\, \|\omega\|^{-\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\, \omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{L_{p,\omega}B(x,r)} \\
&= \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(\omega)}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.1.10 Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $1 < q \leq \infty$, $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $V \in B_n$ olsun. Bu durumda her $q' < p < \infty$ ve $\omega \in A_{p/q'}$ veya $1 < p < q$ ve $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için

$$\|\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}(f)\|_{L_{p,\omega}} \leq C\|f\|_{L_{p,\omega}}$$

olacak şekilde f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti mevcuttur.

İspat. Aşağıdaki eşitsizliğin doğruluğu [4] çalışmasında gösterilmiştir.

$$\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}} f(x) \leq \mu_{j,\Omega} f(x) + C M_\Omega f(x), \quad h.h.y. \ \ x \in \mathbb{R}^n \tag{5.10}$$

Burada M_Ω ve $\mu_{j,\Omega}$ operatörlerinin $L_{p,\omega}$ uzayındaki sınırlılığı ve (5.10) eşitsizliğinden $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$ operatörünün $L_{p,\omega}$ uzayındaki sınırlılığı elde edilir. ■

Lemma 5.1.8 ifadesinin M_Ω operatörü ve $\mu_{j,\Omega}$ operatörü için sağlandığı açıktır. Bu durumda Lemma 5.1.8 ifadesi (5.10) eşitsizliğinden dolayı $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$, $j = 1, \ldots, n$ operatörü için de sağlanır. Lemma 5.1.8 ve Teorem 5.1.10 dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.1.11 Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $1 < q \leq \infty$, $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $V \in B_n$ olsun. Bu durumda herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $q' < p < \infty$, $\omega \in A_{p/q'}$ olacak şekilde her $f \in L_{p,\omega}^{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}(f)\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,r))} \lesssim \omega(B(x_0,r))^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\, \omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $1 < p < q$, $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ olacak şekilde her $f \in L_{p,\omega}^{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_{j,\Omega}^{L}(f)\|_{L_{p,w}(B(x_0,r))} \lesssim \|w\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,r))}^{1/p} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))}\, \|w\|_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,t))}^{-1/p} \frac{dt}{t}$$

eşitsizliğini sağlar.

Sonuç 5.1.12 Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $1 < q \leq \infty$, $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $V \in B_n$ olsun. Ayrıca (φ_1, φ_2) çifti $q' < p < \infty$, $\omega \in A_{p/q'}$ için (5.8) şartını ve $1 < p < q$, $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için (5.9) şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}$ operatörü $M_{p,\varphi_1}(\omega)$ den $M_{p,\varphi_2}(\omega)$ e sınırlıdır. Yani,

$$\|\mu_{j,\Omega}^{\mathcal{L}}(f)\|_{M_{p,\varphi_2}(\omega)} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(\omega)}.$$

5.2 Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Kaba Çekirdekli $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}$ Marcinkiewicz İntegral Operatörünün Komütatörünün $M_{p,\varphi}(\omega)$ Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Sınırlılığı

Aşağıdaki lemmada $\mu_{\Omega,b}$ komütatör için Guliyev tipli lokal eşitsizlik elde edilmiştir (bkz. [41]).

Lemma 5.2.1 Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın. Ayrıca $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $1 < q \leq \infty$ olsun. Bu durumda herhangi bir $B(x_0,r)$ yuvarı ve her $q' < p < \infty$, $\omega \in A_{p/q'}$ olacak şekilde her $f \in L^{\rm loc}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_{\Omega,b}(f)\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,r))} \lesssim \|b\|_* \omega(B(x_0,r))^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big) \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))} \omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca herhangi bir $B(x_0,r)$ yuvarı ve her $1 < p < q$, $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ olacak şekilde her $f \in L^{\rm loc}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu_{\Omega,b}(f)\|_{L_{p,w}(B(x_0,r))} \lesssim \|w\|^{1/p}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,r))} \int_{2r}^{\infty} \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big) \|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))} \, \|w\|^{-1/p}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $p \in (1,\infty)$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0,r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar olmak üzere $2B = B(x_0,2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{\complement_{(2B)}}(y), \quad r > 0$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\|\mu_{\Omega,b}(f)\|_{L_{p,\omega}(B)} \leq \|\mu_{\Omega,b}(f_1)\|_{L_{p,\omega}(B)} + \|\mu_{\Omega,b}(f_2)\|_{L_{p,\omega}(B)}$$

şeklinde yazabiliriz.

$f_1 \in L_p(\omega)$ olduğundan $\mu_{\Omega,b}(f_1) \in L_p(\omega)$ olur ve $\omega \in A_{p/q'}$ ve $q' < p < \infty$ için $\mu_{\Omega,b}$ nin $L_p(\omega)$ deki sınırlılığından (bkz. Teorem 4.3.2)

$$\begin{aligned}\|\mu_{\Omega,b}(f_1)\|_{L_{p,\omega}(B)} &\leq \|\mu_{\Omega,b}(f_1)\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} [\omega]^{\frac{1}{p}}_{A_{\frac{p}{q'}}} \|b\|_* \|f_1\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\ &\approx \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} [\omega]^{\frac{1}{p}}_{A_{\frac{p}{q'}}} \|b\|_* \|f\|_{L_{p,\omega}(2B)}\end{aligned}$$

elde edilir. $x \in B$ için

$$\mu_{\Omega,b}(f_2(x)) \lesssim \int_{\complement_{(2B)}} |b(y)-b(x)||\Omega(x-y)| \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\|\mu_{\Omega,b}(f_2)\|_{L_{p,\omega}(B)} \lesssim & \left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} |b(y)-b(x)||\Omega(x-y)|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy\right)^p \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
\lesssim & \left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} |b(y)-b_{B,w}||\Omega(x-y)|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy\right)^p \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
& + \left(\int_B \left(\int_{\complement_{(2B)}} |b(x)-b_{B,w}||\Omega(x-y)|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy\right)^p \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
= & I_1 + I_2
\end{aligned}$$

bulunur. I_1 eşitliğini

$$\begin{aligned}
I_1 &= \omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{\complement_{(2B)}} |b(y)-b_{B,w}||\Omega(x-y)|\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy \\
&\approx \omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{\complement_{(2B)}} |b(y)-b_{B,w}||\Omega(x-y)||f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}}\,dy \\
&\approx \omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{2r\le|x_0-y|\le t} |b(y)-b_{B,w}||\Omega(x-y)||f(y)|\,dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y)-b_{B,w}||\Omega(x-y)||f(y)|dy \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edelim. Hölder eşitsizliğiden ve (2.4) den

$$\begin{aligned}
I_1 \lesssim & \|b\|_* \,\omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \|\Omega(x-\cdot)\|_{L_q(B(x_0,t))} \|f\|_{L_{q'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
\lesssim & \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} \|b\|_* \,\omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))} \|\omega^{-q'/p}\|^{\frac{1}{q'}}_{L_{(p/q')'}B(x_0,t)} \\
& |B(x_0,t+r)|^{\frac{1}{q}} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
\lesssim & \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} [\omega]^{\frac{1}{p}}_{A_{\frac{p}{q'}}} \|b\|_* \,\omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,t))} \,\omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

bulunur. I_2 yi

$$I_2 = \left(\int_B |b(x)-b_{B,w}|^p \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \int_{\complement_{(2B)}} \frac{|\Omega(x-y)||f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy$$

ifade edelim. (5.6) ve (2.4) den,

$$\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \|b\|_* \,\omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{\complement_{(2B)}} \frac{|\Omega(x-y)||f(y)|}{|x_0-y|^n}\,dy \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} [\omega]^{\frac{1}{p}}_{A_{\frac{p}{q'}}} \|b\|_* \,\omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,t))} \,\omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $p \in (1,\infty)$ için I_1 ve I_2 den

$$\begin{aligned}
\|\mu_{\Omega,b}(f_2)\|_{L_{p,\omega}(B)} \lesssim & \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})} [\omega]^{\frac{1}{p}}_{A_{\frac{p}{q'}}} \|b\|_* \\
& \times \omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))} \omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\|\mu_{\Omega,b}(f)\|_{L_{p,\omega}(B)} \lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\, [\omega]_{A_{\frac{p}{q'}}}^{\frac{1}{p}}\, \|b\|_* \Big(\|f\|_{L_{p,\omega}(2B)} + \omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big) \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))} \omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \Big)$$

elde edilir. Diğer yandan (5.7) den

$$\begin{aligned}\|\mu_{\Omega,b}(f)\|_{L_{p,\omega}(B)} &\lesssim \|\Omega\|_{L_q(S^{n-1})}\, [\omega]_{A_{\frac{p}{q'}}}^{\frac{1}{p}}\, \|b\|_*\, \omega(B)^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big) \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))} \\ &\quad \times \omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \\ &\lesssim \|b\|_*\, \omega(B(x_0,r))^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big) \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\, \omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

bulunur.

Benzer yöntemle $1 < p < q$, $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için de gösterilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.2.2 Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $1 < q \le \infty$ olsun. Ayrıca (φ_1, φ_2) çifti $q' < p < \infty$, $\omega \in A_{p/q'}$ için

$$\int_r^{\infty} \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<\tau<\infty} \varphi_1(x,\tau)\omega(B(x,\tau))^{\frac{1}{p}}}{\omega(B(x,t))^{\frac{1}{p}}} \frac{dt}{t} \le C\, \varphi_2(x,r) \tag{5.11}$$

şartını ve $1 < p < q$, $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için

$$\int_r^{\infty} \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big) \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<\tau<\infty} \varphi_1(x,\tau) \|w\|^{1/p}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x,\tau))}}{\|w\|^{1/p}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x,t))}} \frac{dt}{t} \le C\, \varphi_2(x,r) \frac{w(B(x,r))^{\frac{1}{p}}}{\|w\|^{\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x,r))}} \tag{5.12}$$

şartını sağlasın. Burada C, x ve r ye bağlı değildir. Bu durumda $\mu_{\Omega,b}$ operatörü $M_{p,\varphi_1}(\omega)$ den $M_{p,\varphi_2}(\omega)$ ye sınırlıdır.

$$\|\mu_{\Omega,b}(f)\|_{M_{p,\varphi_2}(\omega)} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(\omega)}.$$

İspat.

$\nu_2(r) = \varphi_2(x,r)^{-1}$, $\nu_1(r) = \varphi_1(x,r)^{-1} w(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}$, $g(r) = \|f\|_{L_{p,w}B(x,r)}$ ve $w(r) = w(B(x,r))^{-\frac{1}{p}} r^{-1}$ olmak üzere Lemma 5.2.1 ve Teorem 3.1.1 den $q' < p < \infty$, $\omega \in A_{p/q'}$ için

$$
\begin{aligned}
\|\mu_{\Omega,b}(f)\|_{M_{p,\varphi_2}(\omega)} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1}\, \omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\, \|\mu_{\Omega,b}(f)\|_{L_{p,\omega}(B(x,r))} \\
&\lesssim \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^\infty \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,t))}\, \omega(B(x,t))^{-\frac{1}{p}}\, \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\, \omega(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{L_{p,\omega}B(x,r)} \\
&= \|b\|_*\|f\|_{M_{p,\varphi_1}(\omega)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$\nu_2(r) = \varphi_2(x,r)^{-1}\, w(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\, \|w\|^{\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x,r))},\; \nu_1(r) = \varphi_1(x,r)^{-1} w(B(x,r))^{-\frac{1}{p}},$$

$g(r) = \|f\|_{L_{p,w}(B(x,r))}$ ve $w(r) = \|w\|^{-\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x,r))} r^{-1}$ olmak üzere Lemma 5.2.1 ve Teorem 3.1.1 den $1 < p < q$, $w^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için

$$
\begin{aligned}
\|\mu_\Omega(f)\|_{M_{p,\varphi_2}(w)} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1}\, w(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\, \|\mu_\Omega(f)\|_{L_{p,w}(B(x,r))} \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1}\, w(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\, \|w\|^{\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B)} \\
&\quad\times\ \|b\|_* \int_r^\infty \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))}\, \|w\|^{-\frac{1}{p}}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,t))}\, \frac{dt}{t} \\
&\lesssim \|b\|_* \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x,r)^{-1}\, w(B(x,r))^{-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{L_{p,w}(B(x,r))} \\
&= \|b\|_*\, \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(w)}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ∎

Teorem 5.2.3 Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $1 < q \le \infty$, $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $V \in B_n$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $q' < p < \infty$ ve $\omega \in A_{p/q'}$ veya $1 < p < q$ ve $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için

$$\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}(f)\|_{L_{p,\omega}} \le C\|f\|_{L_{p,\omega}}$$

olacak şekilde f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti mevcuttur.

İspat. Aşağıdaki eşitsizliğin doğruluğu Teorem 4.3.3 de gösterilmiştir.

$$\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}f(x) \le \mu_{j,\Omega,b}f(x) + CM_{\Omega,b}f(x), \quad h.h.y.\ \ x\in\mathbb{R}^n \tag{5.13}$$

Burada $M_{\Omega,b}$ ve $\mu_{j,\Omega,b}$ operatörlerinin $L_{p,\omega}$ uzayındaki sınırlılığı ve (5.13) eşitsizliğinden $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}$ operatörünün $L_{p,\omega}$ uzayındaki sınırlılığı elde edilir. ∎

Lemma 5.2.1 ifadesinin $M_{\Omega,b}$ operatörü ve $\mu_{j,\Omega,b}$ operatörü için sağlandığı açıktır. Bu durumda Lemma 5.2.1 ifadesi (5.13) eşitsizliğinden dolayı $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}$, $j = 1,\ldots,n$ operatörü için de sağlanır. Lemma 5.2.1 ve Teorem 5.2.3 dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.2.4 Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $1 < q \leq \infty$, $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $V \in B_n$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda herhangi bir $B(x_0,r)$ yuvarı ve her $q' < p < \infty$, $\omega \in A_{p/q'}$ olacak şekilde her $f \in L^{\rm loc}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}(f)\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,r))} \lesssim ||b||_*\omega(B(x_0,r))^{\frac{1}{p}} \int_{2r}^{\infty} \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x_0,t))}\,\omega(B(x_0,t))^{-\frac{1}{p}}\,\frac{dt}{t}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, herhangi bir $B(x_0,r)$ yuvarı ve her $1 < p < q$, $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ olacak şekilde her $f \in L^{\rm loc}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}(f)\|_{L_{p,w}(B(x_0,r))} \lesssim \|w\|^{1/p}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,r))} \int_{2r}^{\infty} \Big(1+\ln\frac{t}{r}\Big)\|f\|_{L_{p,w}(B(x_0,t))}\,\|w\|^{-1/p}_{L_{\frac{q}{q-p}}(B(x_0,t))}\,\frac{dt}{t}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 5.2.5 Ω, (2.16), (2.17) şartlarını sağlasın ve $1 < q \leq \infty$, $\Omega \in L_q(S^{n-1})$, $V \in B_n$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca (φ_1,φ_2) çifti $q' < p < \infty$, $\omega \in A_{p/q'}$ için (5.8) şartını ve $1 < p < q$, $\omega^{1-p'} \in A_{p'/q'}$ için (5.9) şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için $\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}$ operatörü $M_{p,\varphi_1}(\omega)$ den $M_{p,\varphi_2}(\omega)$ ye sınırlıdır. Yani,

$$\|\mu^{\mathcal{L}}_{j,\Omega,b}(f)\|_{M_{p,\varphi_2}(\omega)} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(\omega)}.$$

KAYNAKLAR

[1] Adams, D. R. *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J. **1975** 42, pp. 765-778.

[2] Akbulut, A.; Guliyev, V.S.; Mustafayev, R. *On Boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized Morrey spaces*, Mathematica Bohemica, **2012**, 137 1, 27-43.

[3] Akbulut, A.; Kuzu, O. *Marcinkiewicz integrals associated with Schrodinger operator on generalized Morrey spaces*, J. Math. Inequal., **2014**, Vol 8, No 4, 791-801.

[4] Akbulut, A.; Kuzu, O. *Marcinkiewicz integrals with rough kernel associated with Schrödinger operator on vanishing generalized Morrey spaces*, Azerb. J. Math., **2014**, Vol 4, No 1.

[5] Al-Salman, A.; Al-Qassem, H.; Cheng, L.; Pan, Y. *L_p bounds for the function of Marcinkiewicz*, Math. Res. Lett., **2002**, 9 697-700.

[6] Alvarez, J.; Bagby, R. J.; Kurtz, D. S.; Pérez, C. *Weighted estimates for commutators of linear operators*, Studia Math, **1993**, 104, 195-209.

[7] Bastero, J.; Milman, M.; Francisco, J. R. *Commutators for the maximal and sharp functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **2000**, 128, 11, 3329-3334.

[8] Benedek, A.; Calderon, A.P.; Panzone, R. *Convolution operators on Banach value functions*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **1962**, 48, 256-265.

[9] Bongioanni, B.; Cabral, A.; Harboure, E. *Extrapolation for Classes of Weights Related to a Family of Operators and Aplications*, Potential Anal., **2013**, 38, 1207-1232.

[10] Bourbaki, N. *Topological vector spaces, Elements of mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[11] Burenkov, V.I.; Gogatishvili, A.; Guliyev, V.S.; Mustafayev, R. *Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces*, Complex variables and elliptic equations, **2010**, vol 55, no. 8-10, 739-758.

[**12**] Burenkov, V.I.; Guliyev, V.S. *Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces*, Potential Anal., **2009**, 30, 3, 211-249.

[**13**] Burenkov, V.I.; Guliyev, H.V.; Guliyev, V.S. *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **2007**, 208, Issue, 1, 280-301.

[**14**] Burenkov, V.I.; Guliyev, H.V.; Guliyev, V.S. *On boundedness of the fractional maximal operator from complementary Morrey-type spaces to Morrey-type spaces*, Contemporary Mathematics, V. 424. The Interaction of Analysis and Geometry American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, **2007**, 17-32.

[**15**] Burenkov, V.I.; Guliyev, V.S.; Serbetci, A.; Tararykova, T.V. *Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integraloperators in local Morrey-type spaces*, Doklady Mathematics, **2008**, 78, 2, 651-654.

[**16**] Calderon, A. P. *Commutators of singular integral operators*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **1965**, 53, 1092-1099.

[**17**] Calderon, A. P. *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **1977**, 74, 4 , 1324-1327.

[**18**] Chiarenza, F.; and Frasca, M. *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Math. Appl. **1987**, 7, 7, 273-279.

[**19**] Chiarenza, F.; Frasca, M.; Longo, P. *Interior* $W^{2,p}$*-estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ricerche Mat. **1991**, 40, 149-168.

[**20**] Chiarenza, F.; Frasca, M.; Longo, P. $W^{2,p}$*-solvability of Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with* VMO *coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **1993**, 336, 841-853.

[**21**] Christ, M.; Rubio de Francia, J. L. *Weak type bounds for rough operators* II, Invent. Math., **1988**, 93, 225-237.

[**22**] Coifman, R.; Rochberg, R.; Weiss, G. *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables*, Ann. of Math., **1976**, 103, no. 2, 611-635.

[**23**] Coifman, R.; Fefferman C. *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **1974**, 51, 241-250.

[**24**] Ding, Y. *On Marcinkiewicz integral*, in: Proc. of the Conference Singular Integrals and Related Topics, III, Osaka, Japan, **2001**, 28-38.

[**25**] Ding, Y.; Lu, S.; Yabuta, K. *A problem on rough parametric Marcinkiewicz functions*, J Austra Math Soc, **2002**, 72, 13-21.

[**26**] Ding, Y.; Lu, S.; Yabuta, K.; *On commutators of Marcinkiewicz integrals with rough kernel*, J. Math. Anal. Appl, **2002**, 275, 60-68.

[**27**] Ding, Y.; Fan, D.; Pan, Y. *Weighted boundedness for a class of rough Marcinkiewicz integrals*, Indiana Univ. Math. J, **1999**, 48, 1037-1055.

[**28**] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode. Island, **2000**, 29.

[**29**] Duoandikoetxea, J. *Weighted norm inequalities for homogeneous singular integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., **1993**, 336, 869-880.

[**30**] Duoandikoetxea, J.; Rubio de Fancia, J. L. Maximal functions and singular integral operators via Fourier transform estimates, Invent. Math., **1986**, 84, 541-561.

[**31**] Dziubańkski, J.; Zienkiewicz, J. *Hardy spaces H^1 associated to Schrödinger operators with potential satisfying reverse Hölder inequality*, Rev. Mat. Iberoam. **1999**, 15, 2, 279-296.

[**32**] Fan, D.S.; Sato, S. *Weak type $(1,1)$ estimates for Marcinkiewicz integrals with rough kernels*, Tohoku Math. J., **2001**, 53, 265-284.

[**33**] Fazio, G.Di.; Ragusa, M.A.; *Commutators and Morrey spaces*, Boll.U.M.I., 7, 5-A, **1991**, 323-332.

[**34**] Fazio, G.Di.; Ragusa, M.A.; *Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients*, J. Funct. Anal., **1993**, 112, 241-256.

[**35**] Gao, W.; Tang, L.; *Boundedness for Marcinkiewicz integrals associated with Schrödinger operators*, Proc. Indian Acad. Sci., **2014**, Vol. 124, No. 2, 193-203.

[**36**] Garcia-Cuerva, J.; Rubio de Francia, J.L. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Math. 116, Amsterdam, 1985.

[**37**] Grafakos, L. *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, 2004.

[**38**] Guliyev, V.S. *Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces*, J. Inequal. Appl., **2009**, Art. ID 503948, 20.

[**39**] Guliyev, V.S. *Boundedness of classical operators and commutators of real analysis in generalized weighted Morrey spaces. Some applications*, International conference in honour of Professor V.I. Burenkov on the occasion of his 70th birthday to be held in Kirsehir, Turkey, **2011**, May 20-27.

[**40**] Guliyev, V.S. *Generalized local Morrey spaces and fractional integral operators with rough kernel*, J. Math. Sci. **2013**, vol 193 No. 2, 211-227.

[**41**] Guliyev, V.S.; *Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators*, Eurasian Math. J., **2012**, 3, 3, 33-61.

[**42**] Guliyev, V.S. *Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in* $\mathbb{R}^n$, Doctoral degree dissertion, Mat. Inst. Steklov, Moscow, 329, 1994.

[**43**] Guliyev, V.S. *Integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups. Some applications*, Function spaces, Casioglu, Baku, 332, 1999.

[**44**] Guliyev, V.S.; Aliyev, S.S. *Boundedness of parametric Marcinkiewicz integral operator and their commutators on generalized Morrey spaces*, Georgian Math. J. **2012**, 19, 195-208.

[**45**] Guliyev, V.S.; Aliyev, S.S.; Karaman, T. *Boundedness of a class of sublinear operators and their commutators on generalized Morrey spaces*, Abstract and Applied Analysis, **2011** , Article ID 356041, 18.

[**46**] Guliyev, V.S.; Aliyev, S.S.; Karaman, T.; Shukurov, P.S. *Boundedness of sublinear operators and commutators on generalized Morrey spaces*, Integral. Equ. Oper. Theory, **2011**, 71, 3, 327-355.

[**47**] Guliyev, V.S.; Alizadeh, F.Ch. *Multilinear commutators of Calder'on-Zygmund operator on generalized weighted Morrey spaces*, J. Funct. Spaces, **2014**, Article ID 710542, 9.

[**48**] Guliyev, V.S.; Hasanov, J.; Samko, S. *Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces*, Math. Scand. **2010**, 197, 2, 285-304.

[**49**] Guliyev, V.S.; Hasanov, J.; Samko, S.; *Boundedness of the maximal, potential type and singular integral operators in the generalized variable exponent Morrey type spaces*, Journal of Mathematical Sciences, **2010**, vol. 170, No. 4, 423-443.

[**50**] Guliyev, V. S.; Karaman, T.; Mustafayev R.; Serbetci, A. *Commutators of sublinear operators generated by Calderón-Zygmund operator on generalized weighted Morrey spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal, **2014**, 64, 139, 2, 365-386.

[**51**] Guliyev, V. S.; Omarova, M. N. *Multilinear commutators of vector-valued intrinsic square functions on vector-valued generalized weighted Morrey spaces*, J. Inequal. Appl. **2014**, 258.

[**52**] Hardy, G. H.; Littlewood, L. E. *A maximal theorem with functio theoretic applications*, Acta Math., **1930**, 54, 81-116.

[**53**] Hölder, O. *Ueber einen Mittelwertsatz*, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen, **1889**, 2, 38-47.

[**54**] Hörmander, L. *Translation invariant operators*, Acta math, **1960**, 104, 93-139.

[**55**] Janson, S. *Mean oscillation and commutators of singular integral operators*, Ark. Mat., **1978**, 16, 263-270.

[**56**] John, F.; Nirenberg, L. *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math **1961**, 14, 415-426.

[**57**] Journé, J. L. *Calderón-Zygmund operators, Pseudo-Diferenial operators and the Cauchy integral of Calderón*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag Berlin, 994, 1983.

[**58**] Karaman, T.; Guliyev, V. S.; Serbetci, A. *Boundedness of sublinear operators generated by Calderón-Zygmund operators on generalized weighted Morrey spaces*, Scientic Annals of "Al.I. Cuza" University of Iasi, **2014**, 60, 1, 1-18.

[**59**] Komori, Y.; Shirai, S. *Weighted Morrey spaces and a singular integral operator*, Math. Nachr. **2009**, 282, No. 2, 219-231.

[**60**] Lu, S.; Ding, Y.; Yan, D. *Singular Integrals and Related Topics* World Scientific Publishing Co. Pte.Ltd., 2007.

[**61**] Lu, G.; Lu, S.; Yang, D. *Singular integrals and commutators on homogeneous groups*, Analysis Mathematica, **2002**, 28, 103-134.

[**62**] Marcinkiewicz, J. *Sur quelques integrales de type de Dini*, Annales de la Société Polon, **1938**, 17, 42-50.

[**63**] Martinez, T. *Extremal Spaces Related to Schrödinger Operators With Potentials Satisfying a Reverse Hölder Inequality*, Volumen 45, Numero 1, **2004**, Paginas 43-61.

[**64**] Milman, M.; Schonbek, T. *Second order estimates in interpolation theory and applications*, Proc. Amer. Math. Soc., **1990**, 110, 4, 961-969.

[**65**] Mizuhara, T. *Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces*, Harmonik analysis (Sendai, 1990), ICM-90 Satellite Conference Proceedings, **1991**, 183-189.

[**66**] Morrey, C.B. *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **1938**, 43, 126-166.

[67] Muckenhoupt, B. *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Soc., **1972**, 165, 207-226.

[68] Muckenhoupt, B. *The equivalence o two conditions for weight functions*, Studia Math., **1974**, 49, 101-106.

[69] Muckenhoupt, B.; Wheeden, R. *Weighted bounded mean oscilation and the Hilbert transform*, Studia Math., **1976**, 54, 221-237.

[70] Muckenhoupt, B.; Wheeden, R. *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., **1974**, 192, 261-274.

[71] Mustafayev, R. *On boundedness of sublinear operators in weighted Morrey spaces*, Azerb. J. Math., **2012**, V.2. No:1, 63-75.

[72] Nakai, E. *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces*, Math. Nachr. **1994**, 166, 95-103.

[73] Pérez, C. *Endpoint estimates for commutators of sinfular integral operators*, J. Funct. Anal., **1995**, 128, 163-185.

[74] Peetre, J. *On the theorey of $L_{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal., **1969**, 4, 71-87.

[75] Ragusa, M.A. *Commutators of frational integral operators on vanishing Morrey sapces*, J. Global Optim., **2008**, 40, 361-368.

[76] Rogers, L. J. *An extension of a certain theorem in inequalities*, Messenger of Mathematics, **1888**, 17, 10, 145-150.

[77] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill., 1987.

[78] Samko, N. *Maximal, potential and singular operators in vanishing generalized Morrey spaces*, J. Glop. Optim., **2013**, 1-15.

[79] Segovia, C.; Torrea, J.L. *Weighted inequalities for commutators of fractional and singular integral*, Publ. Mat., **1991**, 35, 209-235.

[80] Shen, Z., *L_p estimates for Schrödinger operators with certain potentials*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **1995**, 45, 2, 513-546.

[**81**] Stein, E.M. *On the function of Littlewood-Paley, Lusin and Marcinkiewicz*, Trans. Amer. Math. Soc., **1958**, 88, 430-466.

[**82**] Stein, E.M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 304, 1970.

[**83**] Tang, L.; Dong, J. *Boundedness for some Schrödinger type operators on Morrey spaces related to certain nonnegative potentials*, J. Math. Anal. Appl., **2009**, 335, 101-109.

[**84**] Torchinsky, A. *Real Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic, Press, San Diego, 1986.

[**85**] Torchinsky A., Wang S., *A note on the Marcinkiewicz integral*, Coloq Math., **1990**, 60/61, 235-243.

[**86**] Vitanza, C. *Functions with vanishing Morrey norm and elliptic partial differential equations*, In Proceedings of methods of real analysis and partial differential equations, Capri, **1990**, 147-150.

[**87**] Walsh, T. *On the function of Marcinkiewicz*, Studia Math., **1972**, 44, 203-217.

[**88**] Wiener, N. *The ergodic theorem*, Duke Math. J., **1939**, 5, 1-18.

[**89**] Zygmund, A. *On certain integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., **1944**, 55, 170-204.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Okan KUZU
Doğum Yeri	:	Kaman/Kırşehir
Doğum Tarihi	:	21.07.1986
Yabancı Dili	:	İngilizce

İletişim Bilgileri

Adres	:	Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
E-mail	:	okan.kuzu@ahievran.edu.tr

Eğitim Durumu

Lisans	:	Atatürk Üniversitesi K.K. Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği, Lisansla Birleştirilmiş Tezsiz Yüksek Lisans (2004-2009)
Yüksek Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2009-2011)
Doktora	:	Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2011-2014)

Akademik Deneyim

Arş. Gör. (ÖYP)	:	Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği (2010-2011)
Arş. Gör. (ÖYP-39)	:	Orta Doğu Teknik Üniversitesi Yabancı Diller Yüksekokulu Temel İngilizce Bölümü (2010-2011)
Arş. Gör. (ÖYP-35)	:	Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2011-. . .)

Yüksek Lisans Tezi

Bir Sturm-Liouville Tipinde Problemin Çözüm Fonksiyonlarının Asimptotiği ve Green Fonksiyonu

Doktora Tezi

Schrödinger Operatörüne Karşılık Gelen Marcinkiewicz İntegral Operatörünün Morey Uzaylarında Sınırlılığı

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

(1) Akbulut, A.; Kuzu, O. *Marcinkiewicz integrals associated with Schrodinger operator on generalized Morrey spaces*, J. Math. Inequal., **2014**, 4, 8, 791-801.

(2) Akbulut, A.; Kuzu, O. *Marcinkiewicz integrals with rough kernel associated with Schrödinger operator on vanishing generalized Morrey spaces*, Azerb. J. Math., **2014**, 4, 1.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler

(1) Kuzu, O.; Kadakal, M. *Asymptotic of Solution Functions of a Sturm-Liouville-Type Problem and The Green Function*, 1st. International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA), Prishtine, Kosovo, September 03-07,2012.

(2) Kuzu, O.; Kuzu, Y.; Kadakal, M. *Some Properties of a Sturm-Liouville-Type Problem and The Green Function*, 1st. International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM), Gumushane, Turkey, October 18-21,2012.

(3) Kuzu, O,; Akbulut, A. *Marcinkiewicz integrals with rough kernel associated with Schrodinger operator on vanishing generalized Morrey spaces*, On Actual Problems of Mathematics and Mechanics (APMI), Baku, Azerbaijan, May 15-16, 2014.

(4) Akbulut, A.; Kuzu, O. *Commutator of Marcinkiewicz integrals with rough kernel associated with Schrodinger operator on vanishing generalized Morrey spaces*, On Actual Problems of Mathematics and Mechanics (APMI), Baku, Azerbaijan, May 15-16, 2014.

(5) Kuzu, O,; Akbulut, A. *Role of Some Integral Operators and Spaces in Mathematics*, 5th. International Conference on New Horizons (INTE), Paris, France, June 25-27, 2014.