T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SERBEST LİE CEBİRLERİNDE DÖRT HOMOJEN BİLEŞENİN ÇARPIMININ BOYUTU

Derya KARATAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2018

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SERBEST LİE CEBİRLERİNDE DÖRT HOMOJEN BİLEŞENİN ÇARPIMININ BOYUTU

Derya KARATAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU

KIRŞEHİR / 2018

Bu çalışma 19.10.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. İlker AKKUŞ
Kırıkkale Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Handan KÖSE
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Derya KARATAŞ

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

"Serbest Lie cebirlerinde dört homojen bileşenin çarpımının boyutu" başlıklı tez çalışmamın hazırlanmasında, başlangıcından sonuna kadar yardımlarını esirgemeyen, karşılaştığım sorunların çözümünde deneyimlerinden yararlandığım danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU'na katkılarından dolayı sonsuz teşekkür ederim. Bu çalışmanın her aşamasında maddi, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, başta babam Cemal KARATAŞ olmak üzere değerli aileme ve değerli arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösterici olan tüm hocalarıma, çalışmam sırasında küçük veya büyük yardımını esirgemeyen herkese teşekkür ederim.

EKİM, 2018 Derya KARATAŞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST LİE CEBİRLERİNDE DÖRT HOMOJEN BİLEŞENİN ÇARPIMININ BOYUTU

Derya KARATAŞ

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
MATEMATİK Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU

L, F cismi üzerinde rankı r olan bir serbest Lie cebiri ve her n pozitif tamsayısı için L_n, L nin n dereceli homojen bileşeni olsun. Bu çalışmada öncelikle n dereceli homojen bileşenin boyutunu veren formül incelenmiştir. Daha sonra literatürde yer alan serbest Lie cebirlerinde iki homojen bileşenin çarpımının ve üç homojen bileşenin çarpımının boyutlarını elde eden formüller incelenmiştir. Yapılan bu incelemeler sonrasında serbest Lie cebirlerinde dört homojen bileşenin çarpımı üzerinde çalışılmış ve bu çarpımın boyutunu hesaplayan formüller elde edilmiştir.

EKİM 2018, 48 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Serbest Lie cebirleri, homojen alt uzaylar, homojen bileşenler, Witt formülü, serbest üreteçler.

ABSTRACT

MSc THESIS

DIMENSION OF PRODUCT OF FOUR HOMOGENEOUS COMPONENTS IN FREE LIE ALGEBRAS

Derya KARATAŞ

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
MATHEMATICS Department

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Nil MANSUROĞLU

Let L be a free Lie algebra of rank r over a field F and L_n be the homogeneous component of degree n of L for every n positive integer. In this thesis, firstly we examine how to calculate the dimension of L_n, then the dimension of product of two homogeneous components and the dimension of product of three homogeneous components in free Lie algebra existed in literature are given. After these investigations, we study on the product of four homogeneous components in free Lie algebra and to obtain formulae for calculating the dimension of such product in free Lie algebras.

OCTOBER 2018, 48 Pages.

Keywords: Free Lie algebra, homogeneous subspaces, homogeneous components, Witt formula, free generators.

1. GİRİŞ

Literatürde serbest Lie cebirleri üzerinde yapılmış ilk araştırmalar, 1950 li yıllarda A.I. Shirshov ve E. Witt tarafından yapılmış çalışmalara dayanır. Bir serbest grubun her alt grubunun serbest olduğu Nielsen-Schreier [14], [15] tarafından gösterilmiştir. Serbest Lie cebiri için benzer bir sonuç Shirsov [3] tarafından gösterilmiştir, yani bir serbest Lie cebirinin her alt cebirinin de serbest olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca [4] makalesinde Witt tarafından bir serbest Lie cebirinde n dereceli bir homojen bileşenin boyutunu hesaplayan formül elde edilmiştir ve bu formül Witt formülü olarak adlandırılmıştır.

Bu tezde, serbest Lie cebirlerinin homojen bileşenlerinin çarpımı üzerinde incelemeler yapılmış ve bu bileşenlerin çarpımlarının boyutları ile ilgili literatürde var olan çalışmalar incelenmiştir.

L, F cismi üzerinde rankı r olan bir serbest Lie cebiri ve her n pozitif tamsayısı için L_n, L nin n dereceli homojen bileşeni olsun. Bu çalışmada öncelikle n dereceli homojen bileşen L_n nin boyutunun nasıl hesaplandığı araştırılmış, daha sonra literatürde yer alan serbest Lie cebirlerinde iki homojen bileşenin çarpımının ve üç homojen bileşenin çarpımının boyutlarını hesaplayan formüller incelenmiştir. Yapılan bu incelemeler sonrasında tezin amacı olan serbest Lie cebirlerinde dört homojen bileşenin çarpımı üzerinde çalışılmış ve bu çarpımın boyutunu hesaplayan formüller üretilmiştir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Tezin ikinci bölümünde tez boyunca kullanılacak olan tanımlar, teoremler ve notasyonlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Ralph Stöhr ve Michael Vaughan-Lee'nin [7] makalesi incelenmiştir. L, F cismi üzerinde rankı sonlu olan bir serbest Lie cebiri ve m, n pozitif tamsayılar olmak üzere L_m ile L_n, L nin sırasıyla m ve n dereceli iki homojen bileşenleri olsun. Bu bölümde L_m ve L_n homojen bileşenlerin çarpımı $[L_m, L_n]$ nin üzerinde çalışılmış ve [7] makalesinde yer alan $[L_m, L_n]$ nin boyutunu hesaplayan formül verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümü, Nil Mansuroğlu ve R. Stöhr'ün [8] makalesinde yer alan bir serbest Lie cebirinde iki homojen alt uzayın çarpımı ile ilgili buldukları sonuçları içermektedir. Ayrıca

m, n, k pozitif tamsayılar olmak üzere, L serbest Lie cebirinin homojen bileşenleri L_m, L_n ve L_k nın çarpımı $[L_m, L_n, L_k]$ incelenmiş ve bu çarpımın boyutunu hesaplamak için Mansuroğlu ve Stöhr [8] tarafından elde edilen formüller verilmiştir.

Beşinci bölüm ise elde edilen ana sonuçlardan oluşmaktadır. m, n, k, p pozitif tamsayılar olmak üzere L_m, L_n, L_k ve L_p, bir serbest Lie cebiri L nin homojen bileşenleri olsun. Bu bölümde [7], [8] ve [9] daki $[L_m, L_n, L_k, L_p]$ ile $[[L_m, L_n], [L_k, L_p]]$ formundaki çarpımların boyutunu hesaplayan formüller elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, N. Mansuroğlu ile R. Stöhr'ün [8], N. Mansuroğlu'nun [9], K. Erdmann ile M.J. Wildon'ın [10] ve N. Jacobson'ın [11] kaynaklarından yararlanarak tez boyunca kullanılacak olan tanımlar, teoremler ve bazı notasyonlar verilmiştir.

2.1. Cebir

Tanım 2.1. F bir cisim ve A, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\begin{aligned} m : A \times A &\to A \\ (x, y) &\mapsto m(x, y) := xy \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki bilineerlik koşullarını her $x, y, z \in A$ ve her $\alpha \in F$ için

(i) $(x + y)z = xz + yz$

(ii) $x(y + z) = xy + xz$

(iii) $x(\alpha y) = (\alpha x)y = \alpha(xy)$

sağlıyorsa, (A,m) ikilisine F cismi üzerinde bir cebir denir.

Tanım 2.2. A, F cismi üzerinde bir cebir, B ise A nın bir alt uzayı olsun. Eğer her $x, y \in B$ için $xy \in B$ ise, B ye A nın bir alt cebiri denir ve $B \leq A$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer her $x, y, z \in A$ için

$$(xy)z = x(yz)$$

oluyorsa, A ya birleşmeli (asosyatif) cebir denir.

Tanım 2.4. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer A nın her x, y elemanı için

$$xy = yx$$

ise, A ya değişmeli (komütatif) cebir denir.

Tanım 2.5. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer A daki her x elemanı için

$$x^2 = xx = 0$$

oluyorsa, A ya anti-komütatif cebir denir.

A bir anti-komütatif cebir olsun. Her $x, y \in A$ için $x + y \in A$ olduğundan

$$(x + y)^2 = 0$$

dır. O halde

$$x^2 + xy + yx + y^2 = 0$$

elde edilir. Kabulden $x^2 = 0$ ve $y^2 = 0$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} xy + yx &= 0 \\ xy &= -yx \end{aligned} \tag{2.1}$$

dır. Böylece bir anti-komütatif cebirden seçilen herhangi iki eleman $xy = -yx$ özelliğini sağlar. Fakat bu önermenin karşıtı her zaman doğru değildir. Kabul edilsin ki, herhangi bir A cebirinde (2.1) özelliği sağlansın ve (2.1) ifadesinde $y = x$ olsun. Böylece bu ifade

$$xx = -xx$$

haline dönüşür, buradan da

$$\begin{aligned} x^2 &= -x^2 \\ 2x^2 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda eğer F cisminin karakteristiği 2 ise x^2 sıfırdan farklı değerler de alabilir ve A cebiri anti-komütatif olmaz. Fakat F cisminin karakteristiği 2 den farklı ise $x^2 = 0$ sağlanır ve A, anti-komütatif bir cebir olur. Sonuç olarak, bir anti-komütatif cebirde herhangi iki eleman $xy = -yx$ özelliğini sağlar, ancak bu özelliğin sağlandığı bir cebirin anti-komütatif olup olmaması cismin karakteristiğine bağlıdır.

Tanım 2.6. A, F cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer her $x, y, z \in A$ için

$$J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0 \qquad \text{(Jacobi özdeşliği)}$$

ise, A cebirine Jacobi özdeşliğini sağlar denir.

Eğer A cebiri anti-komütatif ise, Jacobi özdeşliği aşağıdaki şekilde de

$$\begin{aligned} (xy)z + (yz)x + (zx)y &= 0 \\ 0 &= -(xy)z - (yz)x - (zx)y \\ 0 &= z(xy) + x(yz) + y(zx) \end{aligned}$$

ifade edilebilir.

Tanım 2.7. A ve B, F cismi üzerinde iki cebir olsun.

$$\theta : A \to B$$

lineer dönüşümü, her $x, y \in A$ için

$$\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$$

önermesini sağlıyorsa, θ dönüşümüne bir cebir homomorfizması denir.

2.2. Lie Cebiri

Tanım 2.8. L, F cismi üzerinde cebir olsun. Eğer aşağıdaki koşullar

(L1) her $x \in L$ için $x^2 = xx = 0$ (anti-komütatif),

(L2) her $x, y, z \in L$ için $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ (Jacobi özdeşliği)

sağlanıyorsa, L ye bir Lie cebiri denir.

L, bir Lie cebiri ve her $x, y, z \in L$ olsun. Jacobi özdeşliğinden

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} (xy)z &= -(yz)x - (zx)y \\ &= x(yz) + y(zx) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$(xy)z \neq x(yz)$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla bir Lie cebirinin birleşmeli olmayan bir cebir olduğu elde edilir.

A, herhangi bir birleşmeli cebir olsun. A üzerinde

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] : A \times A &\to A \\ (x, y) &\mapsto [x, y] := xy - yx \end{aligned}$$

şeklinde yeni bir çarpım tanımlansın. Bu çarpıma Lie çarpımı veya x ile y nin braket çarpımı denir. $(A, [\ ,\ ])$, Lie çarpımı ile bir cebirdir.

Lemma 2.9. A, F cismi üzerinde bir birleşmeli cebir olsun. O zaman $(A, [\ ,\ ])$ cebiri bir Lie cebirdir.

İspat$(A, [\ ,\ ])$ cebirinin Tanım 2.8. de verilen (L1) ve (L2) koşullarını sağladığı gösterilecektir. O halde her $x \in (A, [\ ,\ ])$ için,

$$[x, x] = xx - xx = 0$$

elde edilir. Böylece (L1) koşulu sağlanmış olur. Her $x, y, z \in (A, [\ ,\ ])$ için

$$\begin{aligned}
[[x, y], z] &= [xy - yx, z] = (xy)z - (yx)z - z(xy) + z(yx) \\
[[y, z], x] &= [yz - zy, x] = (yz)x - (zy)x - x(yz) + x(zy) \\
[[z, x], y] &= [zx - xz, y] = (zx)y - (xz)y - y(zx) + y(xz)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir ve bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

Jacobi özdeşliği (L2) gerçekleşmiş olur. Dolayısıyla $(A, [\ ,\ ])$ cebiri bir Lie cebirdir. ■

Bu tez boyunca, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ olmak üzere Lie braketlerini sol taraflı Lie çarpımları kullanarak,

$$[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$$

şeklinde ifade edilecektir.

Tanım 2.10. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve U ile V, L nin alt uzayları olsun. Her $u \in U, v \in V$ olmak üzere $[U, V]$ alt uzayı, $[u, v]$ formundaki elemanlar tarafından gerilen bir alt uzaydır. Yani,

$$[U, V] = \text{Span}\{[u, v] | u \in U, v \in V\}$$

dir. Bu alt uzaya U ile V nin Lie çarpım uzayı denir.

Tanım 2.11. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve K, L nin alt uzayı olsun. Her $x, y \in K$ için $[x, y] \in K$ ise, K ya L nin bir Lie alt cebiri denir ve $K \leq L$ ile gösterilir.

Tanım 2.12. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve I, L nin bir alt uzayı olsun. Eğer her $x \in L, y \in I$ için $[x, y] \in I$ oluyorsa, I ya L nin bir ideali denir.
Bir Lie cebirinin her ideali bir alt cebirdir, fakat her alt cebiri bir ideal değildir.

Tanım 2.13. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve I, L nin bir ideali olsun. $x \in L$ için $x + I = \{x + a | a \in I\}$ koseti olmak üzere tüm kosetlerin kümesi $L/I = \{x + I | x \in L\}$, L nin alt vektör uzayıdır ve L/I ya bir bölüm cebiri denir. Her $x, y \in L$ için L/I nın cebirsel yapısı

$$\begin{aligned} [x + I, y + I] &= [x, y] + [x, I] + [I, y] + [I, I] \\ &= [x, y] + I \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir ve her $x + I \in L/I$ için

$$\begin{aligned} [x + I, x + I] &= [x, x] + I \\ &= 0 + I \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla L/I anti-komütatiftir.
Şimdi her $x + I, y + I, z + I \in L/I$ için

$$\begin{aligned} J(x + I, y + I, z + I) &= J(x, y, z) + I \\ &= 0 + I \end{aligned}$$

olduğundan L/I cebiri Jacobi özdeşliğini sağlar. Böylece, L/I Lie cebiridir.

Tanım 2.14. L_1 ve L_2, F cismi üzerinde iki Lie cebiri olsun. Eğer $\varphi : L_1 \to L_2$ lineer dönüşümü her $x, y \in L_1$ için

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

oluyorsa, φ ye bir Lie cebir homomorfizması denir.

2.3. Serbest Lie Cebirleri

Tanım 2.15. L, F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve X, L nin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere $i : X \to L$ bir fonksiyon olsun. Her B Lie cebiri ve her $\varphi : X \to B$ fonksiyonu için $\varphi = \beta i$ olacak şekilde bir tek $\beta : L \to B$ Lie homomorfizması varsa, (L, i) ikilisine X üzerinde bir serbest Lie cebiri denir.

Boştan farklı X kümesi üzerinde bir serbest Lie cebiri inşa edilsin. Her n pozitif tamsayısı için X_n kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} X_1 &= X, \\ X_2 &= X \times X, \\ &\vdots \\ X_n &= \bigcup_{p=1}^{n-1} (X_p \times X_{n-p}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

ve

$$M(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \tag{2.3}$$

olsun. Her $a, b \in M(X)$ için, $a \in X_p$, $b \in X_q$ ve $(a,b) \in X_p \times X_q$ olacak şekilde p, q tamsayıları vardır. $n = p + q$ olsun. O zaman $(a,b) \in X_p \times X_{n-p}$ elemanı (2.2) deki X_n bileşenlerinden birisidir. $X_p \times X_{n-p}$ den X_n ye içine doğal birebir fonksiyonu altında (a,b) nin görüntüsü ab ile gösterilsin. Böylece, her $a, b \in M(X)$ için ab elemanı tanımlanır. $a \in X_p$ olacak şekilde p tamsayısına a nın uzunluğu (derecesi) denir ve $l(a)$ ile gösterilir. Yani

$$l(a) = p$$

dir. Uzunluğu 1 olan elemanlar, X in elemanlarıdır. Uzunluğu 2 veya 2 den büyük olan elemanlar $c = ab$ şeklindeki elemanlardır. Bu durumda

$$l(c) = l(ab) = l(a) + l(b)$$

olur.

F üzerinde, bazı $M(X)$ olan bir vektör uzayı ele alınsın. $M(X)$ deki çarpım bu vektör uzayına genişletilsin. Böylece birleşmeli olmayan bir cebir elde edilmiş olur. Bu cebir $N(X)$ olarak adlandırılsın. I, $N(X)$ in aşağıdaki formda

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b$$

ve

$$(aa)$$

olan elemanları tarafından üretilen ideali olsun. O zaman

$$N(X)/I = L(X)$$

bölüm cebiri X kümesi üzerinde bir serbest Lie cebiridir. Burada X kümesine, $L(X)$ Lie cebirinin serbest üreteç kümesi denir. Bir serbest Lie cebirinin üreteç kümesinin kardinalitesine cebirin rankı denir.

2.3.1. Serbest Lie Cebirlerinde Hall Bazları

(2.3) ifadesinde tanımlanan $M(X)$ kümesi, birleşmeli olmayan $N(X)$ serbest cebiri için bir bazdır ve dolayısıyla $M(X)$ kümesindeki elemanlar lineer bağımsızdır. Fakat $M(X)$ kümesi, $L(X)$ in bir bazı olamaz. Örneğin; $x, y \in M(X)$ için xy ve yx formundaki elemanlar $xy = -yx$ olduğu için $L(X)$ de lineer bağımlıdır. Böylece $M(X)$ kümesi, $L(X)$ de lineer bağımlıdır.

Şimdi $L(X)$ serbest Lie cebiri için bir baz kümesi kurulacaktır.

Tanım 2.16. H, (2.3) de tanımlanan $M(X)$ in bir alt kümesi olsun ve $M^n(X)$, $M(X)$ de uzunluğu n olan elemanlardan oluşan bir küme olsun. Bir X kümesi verildiğinde aşağıdaki sıralama esas alınacaktır:

(i) $X \subseteq H$ ve X e tam sıralama verilir.

(ii) $H \cap M^2(X)$ kümesi $x, y \in X$ iken $x > y$ olmak üzere xy formundaki elemanlardan meydana gelir.

(iii) $m = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ için $H \cap M^m(X)$ kümesi tanımlanmış ve uzunluğu korunmuş bir sıralama verilmiş olsun. Yani $u, v \in M(X)$ ve $l(u) < l(v)$ ise $u < v$ yazılır ve aynı uzunluktaki elemanlar keyfi olarak sıralanır. O zaman $n \geq 3$ için $H \cap M^m(X)$, $(xy)z$ şeklindeki elemanlardan oluşur. Burada $x > y, y \leq z, (xy) > z$ ve $x, y, z, xy \in H = \bigcup_{k=1}^{n-1}(H \cap M^k(X))$ dir. Şimdi

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty}(H \cap M^n(X))$$

olsun. Böylece

$$H_n = H \cap M^n(X)$$

olarak ifade edilirse, o zaman

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

olur. Genel olarak verilen bir X kümesi üzerinde farklı H kümeleri tanımlanabilir. Bunların her biri X e verilen sıralama ile belirlidir. Bu H kümesine Hall bazı ve H_n kümelerine Hall kümeleri denir.

Örnek 2.17. $X = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde serbest Lie cebirinin Hall bazını bulunuz. $x > y > z$ olsun.

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \{x, y, z\} = X, \\
H_2 &= \{xy, xz, yz\}, \\
H_3 &= \{(xy)x, (xy)y, (xz)z, (xz)y, (xz)x, (yz)z, (yz)y, (yz)x\}, \\
H_4 &= \{(xy)xx, (xy)yx, (xy)yy, (xy)yx, (xz)xx, (xz)yy, (xz)yx, (xz)zz, \\
&\quad (xz)zy, (xz)zx, (yz)xx, (yz)yy, (yz)yx, (yz)zz, (yz)zy, (yz)zx, \\
&\quad (xy)(xz), (xy)(yz), (xz)(yz)\}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olur. Buna göre

$$H = H_1 \cup H_2 \cup \dots$$

kümesi bir Hall bazıdır.

2.3.2. Serbest Lie Cebirlerinin Homojen Bileşenleri

$L(X)$, X üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun.

Tanım 2.18. $L_n(X)$, $L(X)$ in derecesi n olan Lie çarpımları tarafından gerilen n dereceli homojen bileşenidir. $L_n(X)$ deki her bir eleman, n dereceli homojen elemanların lineer birleşimi şeklinde ifade edilir. Örneğin, $X = \{x, y, z\}$ bir küme ve $L(X)$, rankı 3 olan bir serbest Lie cebiri olsun. $u = [x, y] + [y, z]$ elemanı ikinci dereceden homojen elemanların lineer birleşimi formundadır.

Serbest Lie cebirleri mertebelidir. Yani

$$L = L(X) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n(X)$$

dir.

Tanım 2.19. $p_1, p_2, \ldots, p_m$ birbirinden farklı asal sayılar ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$ bir pozitif tamsayı olsun.

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^m, & \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mu : \mathbb{Z}^+ \to \{-1, 0, 1\}$ fonksiyonuna Möbius μ-fonksiyonu denir.

L nin n dereceli homojen bileşeni L_n sonlu boyutludur. boyL_n ile L_n nin boyutu gösterilirse, L_n nin boyutu Witt formülü [4]

$$\text{boy} L_n = f(n, r) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) r^{\frac{n}{d}} \tag{2.4}$$

ile hesaplanır.

2.3.3. Serbest Lie Cebirlerinde Bazı Temel Teoremler

Bu bölümde serbest Lie cebirlerinde homojen bileşenlerin çarpımı ve bu çarpımın boyutunu bulmak için kullanılacak olan [4] ve [5] deki bazı temel teoremler verilmiştir.

Teorem 2.20. [[3], Shirshov-Witt Teoremi] Her serbest Lie cebirinin alt cebiri de serbesttir.

Tanım 2.21. L, X üzerinde bir serbest Lie cebiri ve S, L de homojen elemanların kümesi olsun. Eğer S nin hiçbir elemanı S nin diğer elemanları tarafından üretilen L nin bir alt cebirinde bulunmuyorsa, S kümesine indirgenmiş küme denir.

Lemma 2.22. [[3], Shirshov'un Lemması] L, bir serbest Lie cebiri olsun. S, L deki homojen elemanların bir indirgenmiş kümesi ise o zaman S, $L(S)$ alt cebiri için bir serbest üreteç kümesidir.

Teorem 2.23. [[9], Eleme Teoremi] $x \in X$ olsun. F cismi üzerindeki $L(X)$ vektör uzayı Fx ve

$$[y, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{n}], n \geq 0, y \in X \setminus \{x\}$$

formundaki elemanlar tarafından serbest üretilen bir Lie alt cebirinin direkt toplamıdır.

Teorem 2.23 deki cebir $X \setminus \{x\}$ tarafından üretilen bir Lie idealidir.

Sonuç 2.24. [8] $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ bir küme ve L, X üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. $n \geq 1$ olmak üzere, L nin $L^n = L_n \oplus L_{n+1} \oplus \ldots$ Lie alt cebiri için Eleme Teoremi uygulanarak serbest üretilen bir küme elde edilir.

İspat Sürekli Eleme Teoremi uygulanarak ilk önce derecesi 1 olan Lie elemanları elenir. $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \ldots$ kümeleri sırasıyla $L_2, L_3, \ldots$ homojen bileşenlerinin alt kümeleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} L(X) &= \underbrace{\langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x_r \rangle}_{L_1 = \langle \mathcal{M}_1 \rangle} \oplus L(\underbrace{[x_2, x_1], [x_3, x_1], \ldots,}_{\mathcal{M}_2} \\ &\quad \underbrace{[x_2, x_1, x_1], [x_3, x_1, x_1, x_1], \ldots,}_{\mathcal{M}_3} \ldots) \\ L(X) &= L_1 \oplus L(\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4 \cup \ldots) \end{aligned}$$

olur. Daha sonra derecesi 2 olan Lie elemanlarını eleyerek

$$\begin{aligned} L(X) &= L_1 \oplus \underbrace{\langle [x_2, x_1] \rangle \oplus \langle [x_3, x_1] \rangle \oplus \ldots \oplus \langle [x_r, x_{r-1}] \rangle}_{L_2 = \langle \mathcal{M}_2 \rangle} \\ &\quad \oplus L(\mathcal{M}'_3 \cup \mathcal{M}'_4 \cup \ldots) \\ L(X) &= L_1 \oplus L_2 \oplus L(\mathcal{M}'_3 \cup \mathcal{M}'_4 \cup \ldots) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\mathcal{M}'_3, \mathcal{M}'_4, \mathcal{M}'_5, \ldots$ kümeleri sırasıyla $L_3, L_4, L_5, \ldots$ homojen bileşenlerinin alt kümeleri olmak üzere

$$L(\mathcal{M}'_3 \cup \mathcal{M}'_4 \cup \ldots) = L_3 \oplus L_4 \oplus L_5 \oplus \ldots$$

olur. Burada $\mathcal{M}'_3 \cup \mathcal{M}'_4 \cup \ldots$ bir Lie alt cebiri için serbest üreteç kümesidir. Bu işleme $L_n \oplus L_{n+1} \oplus \ldots$ kümesi için istenen serbest üreteç kümesi elde edilene kadar devam edilir.
$(n-1)$ dereceli Lie elemanları sırayla eleme yapılarak $M''_n, \mathcal{M}''_{n+1}, \mathcal{M}''_{n+2}, \ldots$ kümeleri sırasıyla $L_n, L_{n+1}, \ldots$ homojen bileşenlerinin alt kümeleri olmak üzere,

$$L(X) = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_{n-1} \oplus L(\mathcal{M}''_n \cup \mathcal{M}''_{n+1} \cup \ldots)$$

elde edilir. Buradan

$$L(\mathcal{M}''_n \cup \mathcal{M}''_{n+1} \cup \ldots) = L_n \oplus L_{n+1} \oplus \ldots.$$

olur. Burada $\mathcal{M}''_n \cup \mathcal{M}''_{n+1} \cup \ldots$ Lie alt cebiri için bir serbest üreteç kümesidir. Böylece

$$L_n = \langle \mathcal{M}_n \rangle$$

olur. ■

3. $[L_m, L_n]$ NİN BOYUTU

L, F cismi üzerinde rankı r olan bir serbest Lie cebiri olsun. Her m, n pozitif tamsayıları için L_m ve L_n, L nin serbest üreteçlerinde sırasıyla m ve n dereceli Lie çarpımları tarafından gerilen L nin homojen bileşenleri olsun. Bu bölümde R. Stöhr ve M. Vaughan-Lee'nin [7] makalesi incelenip iki homojen bileşenin çarpımı $[L_m, L_n]$ nin boyutunu hesaplayan formül verilmiştir. İlk olarak [9] da yer alan aşağıdaki teorem ile L nin iki homojen alt uzayının çarpımının boyutunu hesaplayan formül verilmiştir.

Teorem 3.1. [[9], Teorem 2.1] $m \geq n \geq 1$ olmak üzere $U \subseteq L_m$ ve $V \subseteq L_n$ olacak şekilde U ile V, L nin alt uzayları olsun. O zaman

$$\text{boy}[U, V] = \text{boy}[U \cap L(V), V] + (\text{boy}U - \text{boy}(U \cap L(V)))\text{boy}V \tag{3.1}$$

dir.

İspat A, V vektör uzayının bir bazı olsun. O zaman A bir indirgenmiş kümedir. Çünkü eğer $a \in A$ elemanı, A daki diğer elemanların bir lineer kombinasyonu ise, A nın diğer elemanları tarafından üretilen alt cebirinin de elemanı olacaktır. Böylece Lemma 2.22. den, A, V ile üretilen $L(V)$ alt cebiri için bir serbest üreteç kümesidir. Şimdi U alt uzayı ele alınsın. U', $U \cap L(V)$ nin tümleyeni, yani $U = U \cap L(V) \oplus U'$ ve B, U' vektör uzayının bir bazı olsun. $A \cup B$ nin indirgenmiş bir küme olduğu gösterilecektir.

Eğer $m > n$ ise o zaman B deki elemanların derecesi A daki elemanların derecesinden daha büyüktür, bundan dolayı eğer a elemanı, $A \cup B$ nin diğer elemanları tarafından üretilen alt cebirde olsaydı A daki diğer elemanların bir lineer kombinasyonu olurdu. Ayrıca a, $A \cup B$ nin diğer elemanlarının bir lineer kombinasyonu şeklinde ifade ediliyorsa a, n den daha büyük dereceye sahip olmalıydı. a nın derecesi n ve B deki elemanların derecesi m olduğundan a, A daki diğer elemanların lineer kombinasyonu şeklinde yazılır. Fakat A lineer bağımsız olduğu için bu mümkün değildir. Diğer bir deyişle $b \in B$, $A \cup B$ nin diğer elemanları tarafından üretilen alt cebirde olsaydı $p \in U \cap L(V)$ ve $\alpha \in F$ olmak üzere

$$b = p + \sum_{b \neq b_i \in B} \alpha_i b_i$$

şeklinde ifade edilirdi. Fakat bu mümkün değildir, çünkü B, U' nin bazı olduğu için lineer bağımsızdır.

Eğer $m = n$ ve $c \in A \cup B$ elemanı $A \cup B$ deki diğer elemanlar tarafından üretilen alt cebirin elemanı ise

$$c = p + \sum_{c \neq c_i \in A \cup B} \alpha_i c_i$$

olarak ifade edilirdi. Fakat bu mümkün değildir. Çünkü A ile B baz olduğundan lineer bağımsızdır. Bu nedenle $A \cup B$ kümesi bir indirgenmiş kümedir. Böylece $\{[b,a] | a \in A, b \in B\}$ kümesi lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $[U', V]$, $\{[b,a] | a \in A, b \in B\}$ bazı ile bir alt uzaydır ve boyutu

$$\text{boy}[U', V] = (\text{boy}U - \text{boy}(U \cap L(V)))\text{boy}V$$

dir. $[U, V]$ ise

$$[U, V] = [(U \cap L(V)) \oplus U', V] = [U \cap L(V), V] \oplus [U', V]$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\text{boy}[U, V] &= \text{boy}[(U \cap L(V)) \oplus U', V] \\
&= \text{boy}([U \cap L(V), V] \oplus [U', V]) \\
&= \text{boy}[U \cap L(V), V] + \text{boy}[U', V] \\
&= \text{boy}[U \cap L(V), V] + (\text{boy}U - \text{boy}(U \cap L(V)))\text{boy}V
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. ■

Lemma 3.2. L, bir serbest Lie cebiri ve m, n pozitif tamsayıları için L_m ile L_n, L nin iki homojen bileşeni olsun.

(i) Eğer $m = sn$ olacak şekilde s pozitif tamsayısı var ise

$$L_m \cap L(L_n) = L_s(L_n) \tag{3.2}$$

dir.

(ii) Eğer $n \nmid m$ ise

$$L_m \cap L(L_n) = \{0\} \tag{3.3}$$

dır.

Şimdi bu bölümün ana teoremi verilecektir.

Teorem 3.3. [[7], Teorem 1] L, bir serbest Lie cebiri ve m, n pozitif tamsayılar olmak üzere L_m, L_n, L nin homojen bileşenleri olsun.

(i) Eğer $m > n$ ve $n \nmid m$ ise

$$\text{boy}[L_m, L_n] = \text{boy}L_m\text{boy}L_n$$

dir.

(ii) Eğer $m = sn, s \geq 1$ ise

$$\text{boy}[L_m, L_n] = (\text{boy}L_m - f(s, \text{boy}L_n))\text{boy}L_n + f(s+1, \text{boy}L_n) \tag{3.4}$$

dir.

İspat (i) Teorem 3.1. de $U = L_m$ ve $V = L_n$ olduğu kabul edilsin. Böylece

$$\text{boy}[L_m, L_n] = \text{boy}[L_m \cap L(L_n), L_n] + (\text{boy}L_m - \text{boy}(L_m \cap L(L_n)))\text{boy}L_n$$

elde edilir. (3.3) den dolayı

$$\text{boy}[L_m, L_n] = \text{boy}L_m\text{boy}L_n$$

dir.

(ii) Şimdi $m = sn$ durumu incelenecektir. Teorem 3.1. de $U = L_m, V = L_n$ alındığında

$$\text{boy}[L_m, L_n] = \text{boy}[L_m \cap L(L_n), L_n] + (\text{boy}L_m - \text{boy}(L_m \cap L(L_n)))\text{boy}L_n$$

elde edilir. (3.2) den dolayı

$$\text{boy}[L_m, L_n] = \text{boy}[L_s(L_n), L_n] + (\text{boy}L_m - \text{boy}(L_s(L_n)))\text{boy}L_n$$

olur ve böylece

$$\text{boy}[L_m, L_n] = f(s+1, \text{boy}L_n) + (\text{boy}L_m - f(s, \text{boy}L_n))\text{boy}L_n$$

elde edilir. ■

$[L_m, L_n]$ çarpımında $m = sn$ olduğu durumlarda genellikle

$$\text{boy}[L_m, L_n] < \text{boy}L_m \text{boy}L_n \tag{3.5}$$

dir ancak (3.5) eşitsizliğinin sağlanmadığı durumlar vardır.

1. Durum L, F cismi üzerinde rankı iki olan bir serbest Lie cebiri olmak üzere boy$[L_2, L_1]$ incelensin. Witt formülü ile

$$f(1,2) = \text{boy}L_1 = \frac{1}{1}\sum_{d|1}\mu(d)2^{\frac{1}{d}} = 2$$

ve

$$f(2,2) = \text{boy}L_2 = \frac{1}{2}\sum_{d|2}\mu(d)2^{\frac{2}{d}} = 1$$

dir. Şimdi (3.4) de $m = 2, n = 1, s = 2$ alarak

$$\begin{aligned} \text{boy}[L_2, L_1] &= (\text{boy}L_2 - f(2, \text{boy}L_1))\text{boy}L_1 + f(2+1, \text{boy}L_1) \\ &= (1 - f(2,2))2 + f(3,2) \end{aligned}$$

elde edilir. Witt formülü ile

$$f(3,2) = \frac{1}{3}\sum_{d|3}\mu(d)2^{\frac{3}{d}} = 2$$

dir. Böylece (3.4) den yararlanarak

$$\text{boy}[L_2, L_1] = 2$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda (3.5) eşitsizliğine göre

$$\text{boy}[L_2, L_1] < \text{boy}L_2\text{boy}L_1$$

olmalıydı fakat $2 < 2$ ifadesi doğru olmadığı için (3.5) in sağlanmadığı görülür.

2. Durum L, F cismi üzerinde rankı 2 olan bir serbest Lie cebir olsun. Witt formülü ile

$$\text{boy}L_6 = \frac{1}{6}\sum_{d|6}\mu(d)2^{\frac{6}{d}} = 9$$

dur ve boy$L_3 = f(3,2) = 2$ olduğu biliniyor. Şimdi (3.4) uygulanırsa

$$\begin{aligned} \text{boy}[L_6, L_3] &= (\text{boy}L_6 - f(2, \text{boy}L_3))\text{boy}L_3 + f(2+1, \text{boy}L_3) \\ &= (9 - f(2,2))2 + f(3,2) \end{aligned}$$

elde edilir. $f(2,2) = 1$ ve $f(3,2) = 2$ olduğundan, (3.4) den

$$\text{boy}[L_6, L_3] = 18$$

elde edilir. Bu durumda (3.5) e göre

$$\text{boy}[L_6, L_3] < \text{boy}L_6\text{boy}L_3$$

olmalıydı. Fakat $18 < 18$ ifadesi doğru olmadığı için (3.5) in sağlanmadığı görülür.

4. $[L_m, L_n, L_k]$ NİN BOYUTU

L, F cismi üzerinde rankı r olan bir serbest Lie cebiri olsun. Her m, n, k pozitif tamsayıları için L_m, L_n ve L_k, L cebirinin serbest üreteçlerinde sırasıyla m, n ve k dereceli Lie çarpımları tarafından gerilen L nin homojen bileşenleri olsun. Bu bölümde üç homojen bileşenin çarpımı $[L_m, L_n, L_k]$ ile ilgili çalışmalar incelenip, N. Mansuroğlu ile R. Stöhr [8] ve N. Mansuroğlu [9] tarafından elde edilen formüller verilmiştir.

Lemma 4.1. [[9], Lemma 3.1] L, bir serbest Lie cebiri ve m, n, k pozitif tamsayılar olmak üzere L_m, L_n ve L_k, L nin üç homojen bileşeni olsun.

(i) Eğer $m = s_1 k$ ve $n = s_2 k$ olacak şekilde s_1 ve s_2 pozitif tamsayıları varsa

$$[L_m, L_n] \cap L(L_k) = [L_{s_1}(L_k), L_{s_2}(L_k)] \tag{4.1}$$

dır.

(ii) Eğer $k \nmid m$ veya $k \nmid n$ ise

$$[L_m, L_n] \cap L(L_k) = \{0\} \tag{4.2}$$

dır.

İspat (i) İlk önce $M = L_k \oplus L_{k+1} \oplus L_{k+2} \oplus \ldots$ alt cebiri ele alınsın. $L_k, L_{k+1}, \ldots$ homojen bileşenlerinin alt kümeleri sırasıyla $\mathcal{M}_k, \mathcal{M}_{k+1}, \ldots$ olmak üzere, M için bir $\mathcal{M} = \mathcal{M}_k \cup \mathcal{M}_{k+1} \cup \mathcal{M}_{k+2} \cup \ldots$ homojen serbest üreteç kümesi vardır. Bu durumda

$$L(L_k) = L(\mathcal{M}_k)$$

ve

$$L_k = \langle \mathcal{M}_k \rangle$$

dır. Böylece

$$[L_{s_1}(L_k), L_{s_2}(L_k)] \subseteq [L_{s_1k}, L_{s_2k}] \cap L(L_k) \tag{4.3}$$

olduğu açıkça görülür.

Şimdi $([L_{s_1k}, L_{s_2k}] \cap L(L_k)) \subseteq [L_{s_1}(L_k), L_{s_2}(L_k)]$ olduğu gösterilecektir.
$[u,v] \in [L_{s_1}(L_k), L_{s_2}(L_k)] \cap L(L_k)$ olsun. Böylece $u \in L_{s_1}(L_k), v \in L_{s_2}(L_k)$ ve $[u,v] \in L(L_k)$ olur. Her $\alpha \in \mathcal{M}_k$ için $\alpha \mapsto \alpha$ ve her $\alpha \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{M}_k$ için $\alpha \mapsto 0$ ile verilen $\pi : \mathcal{M} \to L(\mathcal{M}_k)$ doğal projeksiyonu ele alınsın. $[u,v] \in L(L_k)$ olduğundan

$$\pi([u,v]) = [u,v]$$

dir. Ayrıca π bir Lie cebir homomorfizması olduğu için

$$[u,v] = \pi([u,v]) = [\pi(u), \pi(v)]$$

olur. $\pi(u) \in L_{s_1}(L_k)$ ve $\pi(v) \in L_{s_2}(L_k)$ olduğundan

$$[u,v] = [\pi(u), \pi(v)] \in [L_{s_1}(\mathcal{M}_k), L_{s_2}(\mathcal{M}_k)]$$

dir ve böylece

$$([L_{s_1k}, L_{s_2k}] \cap L(L_k)) \subseteq [L_{s_1}(\mathcal{M}_k), L_{s_2}(\mathcal{M})] \tag{4.4}$$

dir. (4.3) ve (4.4) den

$$([L_{s_1k}, L_{s_2k}] \cap L(L_k)) = [L_{s_1}(L_k), L_{s_2}(L_k)]$$

elde edilir. Dolayısıyla lemmanın ilk kısmının ispatı tamamlanır.

(ii) Kabul edilsin ki $k \nmid m$ veya $k \nmid n$ olsun. $[u,v] \in ([L_m, L_n] \cap L(L_k))$ alınsın. Böylece $u \in L_m$, $v \in L_n$ ve $[u,v] \in L(L_k)$ olur. π dönüşümünden yararlanarak $i = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere $L(L_k)$, derecesi ik olan elemanların lineer kombinasyonlarının tümüyle oluştuğu için π

nin çekirdeği $k \nmid j$ ve $j \geq k$ olacak şekilde tüm L_j homojen bileşenleri içerir. $k \nmid m$ veya $k \nmid n$ olduğu için $\pi(u)$ ve $\pi(v)$ nin en az biri sıfırdır. Dolayısıyla

$$\pi([u, v]) = [\pi(u), \pi(v)] = 0$$

olur. Böylece

$$[L_m, L_n] \cap L(L_k) = \{0\}$$

sonucuna ulaşılır ve lemmanın ikinci kısmının ispatı tamamlanmış olur. ■

Şimdi bu bölümün ana sonucu verilecektir.

Teorem 4.2. [[7], Teorem 3.1] L, bir serbest Lie cebiri ve m, n, k pozitif tamsayıları için, $m \geq n$ olmak üzere L_m, L_n ve L_k, L nin üç homojen bileşenleri olsun. O halde

(i) eğer $(n + m) > k$ olmak üzere $k \nmid m$ veya $k \nmid n$ ise

$$\text{boy}[L_m, L_n, L_k] = \text{boy}[L_m, L_n]\text{boy}L_k,$$

(ii) eğer $(n + m) > k$ olmak üzere $m = s_1 k$ ve $n = s_2 k$ olacak şekilde s_1, s_2 pozitif tamsayıları varsa

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k] &= \text{boy}[L_{s_1 k}(L_k), L_{s_2 k}(L_k), L_k] \\ &\quad + (\text{boy}[L_m, L_n] - \text{boy}[L_{s_1 k}(L_k), L_{s_2 k}(L_k)])\text{boy}L_k,\end{aligned}$$

(iii) eğer $k \geq (m + n)$ ve $k = s(m + n)$ olacak şekilde s pozitif tamsayısı varsa

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k] &= \text{boy}L_{s+1}([L_m, L_n]) \\ &\quad + (\text{boy}L_k - \text{boy}(L_s([L_m, L_n])))\text{boy}[L_m, L_n],\end{aligned}$$

(iv) eğer $k \geq (m+n)$ ve $(m+n) \nmid k$ ise

$$\text{boy}[L_m, L_n, L_k] = \text{boy}[L_m, L_n]\text{boy}L_k$$

dir.

İspat (i) $k \mid (n+m)$, fakat $k \nmid m$ veya $k \nmid n$ olsun. O zaman Teorem 3.1. de $U = [L_m, L_n]$ ve $V = L_k$ alınırsa

$$\begin{aligned}\text{boy}[[L_m, L_n], L_k] &= \text{boy}[[L_m, L_n] \cap L(L_k), L_k] + \\ &\quad (\text{boy}[L_m, L_n] - \text{boy}([L_m, L_n] \cap L(L_k)))\text{boy}L_k\end{aligned}$$

elde edilir ve (4.2) den

$$[L_m, L_n] \cap L(L_k) = \{0\}$$

elde edilir. Böylece

$$\text{boy}[L_m, L_n, L_k] = \text{boy}[L_m, L_n]\text{boy}L_k$$

olur.

(ii) Eğer $k \mid m$ ve $k \mid n$ ise, o zaman $m = s_1k$ ve $n = s_2k$ olacak şekilde s_1, s_2 pozitif tamsayıları vardır. Böylece $L_m = L_{s_1k}, L_n = L_{s_2k}$ şeklinde ifade edilebilir. Teorem 3.1. de $U = [L_m, L_n] = [L_{s_1k}, L_{s_2k}]$ ve $V = L_k$ alınarak

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k] &= \text{boy}[[L_m, L_n] \cap L(L_k), L_k] \\ &\quad + (\text{boy}[L_m, L_n] - \text{boy}([L_m, L_n] \cap L(L_k)))\text{boy}L_k\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir ve (4.1) den

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k] &= \text{boy}[[L_{s_1k}, L_{s_2k}] \cap L(L_k), L_k] \\ &\quad + (\text{boy}[L_{s_1k}, L_{s_2k}] - \text{boy}([L_{s_1k}, L_{s_2k}] \cap L(L_k)))\text{boy}L_k\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

(iii) $k = s(m+n)$ olacak şekilde s pozitif tamsayısı olduğundan dolayı

$$L_k \cap L([L_m, L_n]) = L_{s(m+n)} \cap L([L_m, L_n]) = L_s([L_m, L_n])$$

dir. $U = L_k$ ve $V = [L_m, L_n]$ olacak şekilde Teorem 3.1. uygulanacaktır. O halde

$$\begin{aligned} \text{boy}[L_m, L_n, L_k] &= \text{boy}[L_k \cap L([L_m, L_n]), [L_m, L_n]] \\ &\quad + (\text{boy}L_k - \text{boy}(L_k \cap L([L_m, L_n])))\text{boy}[L_m, L_n] \\ &= \text{boy}L_{s+1}([L_m, L_n]) \\ &\quad + (\text{boy}L_k - \text{boy}L_s([L_m, L_n]))\text{boy}[L_m, L_n] \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) Teorem 3.1. de $U = L_k$ ve $V = [L_m, L_n]$ alınarak uygulandığında

$$\begin{aligned} \text{boy}[L_m, L_n, L_k] &= \text{boy}[L_k \cap L([L_m, L_n]), [L_m, L_n]] \\ &\quad + (\text{boy}L_k - \text{boy}(L_k \cap L([L_m, L_n])))\text{boy}[L_m, L_n] \end{aligned}$$

elde edilir ve (4.2) den

$$\text{boy}[L_m, L_n, L_k] = \text{boy}L_k\text{boy}[L_m, L_n]$$

dir. ■

5. [L_m, L_n, L_k, L_p] NİN BOYUTU

L, F cismi üzerinde rankı r olan bir serbest Lie cebiri olsun. Her m, n, k, p pozitif tamsayıları için L_m, L_n, L_k ve L_p, L nin serbest üreteçlerinde sırasıyla m, n, k ve p dereceli Lie çarpımları tarafından gerilen L nin homojen bileşenleri olsun. Bu bölümde, [7] ile [8] makaleleri ve N. Mansuroğlu'nun yüksek lisans tezi [9] incelenip bu incelemeler sonucunda çalışmamızın asıl amacı olan $[L_m, L_n, L_k, L_p]$ çarpımının boyutunu hesaplayan formülleri üretmek için araştırmalar yapılmış ve elde edilen sonuçlar verilmiştir. İlk olarak temel sonuçların ispatlarında sürekli kullanılacak olan aşağıdaki teknik lemma ile başlanacaktır.

Lemma 5.1. L, F cismi üzerinde bir serbest Lie cebiri ve m, n, k, p pozitif tamsayılar olmak üzere L_m, L_n, L_k ve L_p, L nin dört homojen bileşenleri olsun.

(i) Eğer $m = s_1 p$, $n = s_2 p$ ve $k = s_3 p$ olacak şekilde s_1, s_2, s_3 pozitif tamsayıları var ise

$$[L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p) = [L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p)] \tag{5.1}$$

dir.

(ii) Eğer $p \nmid m$ veya $p \nmid n$ veya $p \nmid k$ ise

$$[L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p) = \{0\} \tag{5.2}$$

dır.

İspat (i)

$$[L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p)] \subseteq [L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p) \tag{5.3}$$

olduğu açıktır. O halde

$$[L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p) \subseteq [L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p)]$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur.

$$L^p = L_p \oplus L_{p+1} \oplus L_{p+2} \oplus \dots$$

alt cebiri, L nin p inci dereceden alt merkezi serisidir ve L_p nin $\mathcal{M}_i \subset L_i$ $(i = p, p+1, \dots)$ olacak şekilde $\mathcal{M} = \mathcal{M}_p \cup \mathcal{M}_{p+1} \cup \mathcal{M}_{p+2} \cup \dots$ formunda bir homojen serbest üreteç kümesi vardır ve bu kümeyi elde etmek amacıyla ilk olarak $\mathcal{M}_p$ için L^p nin bir F-bazı, daha sonra $i > p$ için $\mathcal{M}_i$ bir küme olacak şekilde $L_i \cap L(\mathcal{M}_i \cup \dots \cup \mathcal{M}_{i-1})$ vektör uzayının tümleyeninin bir bazı alınacaktır. O halde

$$L_p = \langle \mathcal{M}_p \rangle$$

dir. Şimdi her $a \in \mathcal{M}_p$ için $\pi(a) = a$ ve her $a \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{M}_p$ için $\pi(a) = 0$ ile tanımlanan $\pi : L^p \to L(L^p)$ doğal projeksiyon dönüşümü olacak şekilde, $[L_m, L_n, L_k]$ dan seçilen herhangi bir $\mathcal{B}$ elemanı, $u_j \in L_m, v_j \in L_n, w_j \in L_k$ ve $\alpha_j \in F$ olmak üzere

$$\mathcal{B} = \sum \alpha_j [u_j, v_j, w_j]$$

formunda ifade edilebilir. Ayrıca $\pi(u_j) \in L_{s_1}(L_p), \pi(v_j) \in L_{s_2}(L_p)$ ve $\pi(w_j) \in L_{s_3}(L_p)$ dir ve şimdi $\mathcal{B}$ elemanının $L(L_p)$ de olduğu kabul edilsin. O halde π bir Lie cebir homomorfizması olduğundan

$$\mathcal{B} = \pi(\mathcal{B}) = \sum \alpha_j [\pi(u_j), \pi(v_j), \pi(w_j)] \in [L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p)]$$

elde edilir. Böylece

$$([L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p)) \subseteq [L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p)] \tag{5.4}$$

olduğu ispatlanmış olur. Dolayısıyla (5.3) ve (5.4) den

$$([L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p)) = [L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p)]$$

dir.

(ii) $p \nmid m$ veya $p \nmid n$ veya $p \nmid k$ olduğu kabul edilsin. O halde $u_j \in L_m, v_j \in L_n, w_j \in L_k$ ve $\alpha_j \in F$ olacak şekilde

$$\mathcal{B} = \sum \alpha_j [u_j, v_j, w_j] \in L(L_p)$$

elemanı vardır. (i) de tanımlanan π projeksiyon dönüşümü kullanılarak ispat tamamlanacaktır. $i = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere $L(L_p)$, derecesi ip olan elemanların tümüyle oluştuğundan π nin çekirdeği $p \nmid j$ ve $j \geq p$ olacak şekilde tüm L_j homojen bileşenleri içerir ve eğer $p \nmid m$ veya $p \nmid n$ veya $p \nmid k$ ise $\pi(u_j), \pi(v_j)$ ve $\pi(w_j)$ nin en az biri sıfır olmalıdır. Dolayısıyla

$$\pi([u_j, v_j, w_j]) = [\pi(u_j), \pi(v_j), \pi(w_j)] = 0$$

olur. Böylece

$$([L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p)) = \{0\}$$

elde edilir. ■

Teorem 5.2. L, bir serbest Lie cebiri ve m, n, k, p pozitif tamsayılar olmak üzere L_m, L_n, L_k ve L_p, L nin dört homojen bileşeni olsun. O zaman

(i) eğer $(m + n + k) > p$ ve $p \nmid m$ veya $p \nmid n$ veya $p \nmid k$ ise

$$\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] = \text{boy}[L_m, L_n, L_k]\text{boy}L_p,$$

(ii) eğer $(m + n + k) > p$ ve $m = s_1 p$, $n = s_2 p$, $k = s_3 p$ olacak şekilde s_1, s_2, s_3 pozitif tamsayıları varsa

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] &= \text{boy}[L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p), L_p] \\ &\quad + (\text{boy}[L_m, L_n, L_k] - \text{boy}[L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p), L_p])\text{boy}L_p,\end{aligned}$$

(iii) eğer $p \geq (m+n+k)$ ve $(m+n+k) \nmid p$ ise

$$\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] = \text{boy}[L_m, L_n, L_k]\text{boy}L_p,$$

(iv) eğer $p \geq (m+n+k)$ ve $p = s(m+n+k)$ olacak şekilde $s \geq 1$ tamsayısı var ise

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] &= \text{boy}L_{s+1}([L_m, L_n, L_k]) \\ &\quad + (\text{boy}L_p - \text{boy}L_s([L_m, L_n, L_k]))\text{boy}[L_m, L_n, L_k]\end{aligned}$$

dır.

İspat (i) Teorem 3.1. de $U = [L_m, L_n, L_k]$ ve $V = L_p$ olduğunu kabul ederek

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] &= \text{boy}[[L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p), L_p] \\ &\quad + (\text{boy}[L_m, L_n, L_k] - \text{boy}([L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p)))\text{boy}L_p\end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. (5.2) den dolayı $[L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p) = \{0\}$ dır. Bundan dolayı (5.5) ifadesi

$$\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] = \text{boy}[L_m, L_n, L_k]\text{boy}L_p$$

haline dönüşür.

(ii) Teorem 3.1. de $U = [L_m, L_n, L_k]$ ve $V = L_p$ alınarak uygulandığında

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] &= \text{boy}[[L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p), L_p] \\ &\quad + (\text{boy}[L_m, L_n, L_k] - \text{boy}([L_m, L_n, L_k] \cap L(L_p)))\text{boy}L_p\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $m = s_1 p, n = s_2 p$ ve $k = s_3 p$ olduğundan

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] &= \text{boy}[[L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p)] \cap L(L_p), L_p] \\ &\quad + (\text{boy}[[L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p)] \cap L(L_p)])\text{boy}L_p\end{aligned}$$

olur. (5.1) den dolayı

$$[L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p)] \cap L(L_p) = [L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p)]$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] &= \text{boy}[L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p), L_p] \\ &\quad + (\text{boy}[L_m, L_n, L_k] - \text{boy}[L_{s_1}(L_p), L_{s_2}(L_p), L_{s_3}(L_p), L_p])\text{boy}L_p\end{aligned}$$

olur.

(iii) $[L_m, L_n, L_k, L_p] = [L_p, [L_m, L_n, L_k]]$ dir. Teorem 3.1. de $U = L_p$ ve $V = [L_m, L_n, L_k]$ alınarak

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_p, [L_m, L_n, L_k]] &= \text{boy}[L_p \cap L([L_m, L_n, L_k]), [L_m, L_n, L_k]] \\ &\quad + (\text{boy}L_p - (\text{boy}L_p \cap L([L_m, L_n, L_k])))\text{boy}[L_m, L_n, L_k]\end{aligned}$$

bulunur. Burada $(m + n + k) \nmid p$ olduğundan dolayı

$$\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] = \text{boy}L_p\text{boy}[L_m, L_n, L_k]$$

dir.

(iv) Teorem 3.1. de $U = L_p$ ve $V = [L_m, L_n, L_k]$ olduğunu kabul ederek

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] &= \text{boy}[L_p, [L_m, L_n, L_k]] \\ &= \text{boy}[L_p \cap L([L_m, L_n, L_k]), [L_m, L_n, L_k]] \\ &\quad + (\text{boy}L_p - \text{boy}(L_p \cap L([L_m, L_n, L_k])))\text{boy}[L_m, L_n, L_k]\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $p = s(m + n + k)$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] &= \text{boy}[L_s([L_m, L_n, L_k]), [L_m, L_n, L_k]] \\ &\quad + (\text{boy}L_p - \text{boy}L_s([L_m, L_n, L_k]))\text{boy}[L_m, L_n, L_k]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{boy}[L_m, L_n, L_k, L_p] &= \text{boy}L_{s+1}([L_m, L_n, L_k]) \\ &\quad + (\text{boy}L_p - \text{boy}L_s([L_m, L_n, L_k]))\text{boy}[L_m, L_n, L_k]\end{aligned}$$

sonucuna ulaşarak ispat tamamlanmış olur. ■

5.1. $[[L_m, L_n], [L_k, L_p]]$ nin Boyutu

L, F cismi üzerinde rankı r olan bir serbest Lie cebiri olsun. Her m, n, k, p pozitif tamsayıları için L_m, L_n, L_k ve L_p, L nin serbest üreteçlerinde sırasıyla m, n, k, p dereceli Lie çarpımları tarafından gerilen L nin homojen bileşenleri olsun. Bu alt bölümde $[[L_m, L_n], [L_k, L_p]]$ çarpımı üzerinde çalışılmış ve bu çarpımın boyutunu hesaplayabilmek için belirli koşullara bağlı olarak formüller elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların ispatında aşağıda verilen teknik lemma kullanılacaktır.

Lemma 5.3. L, bir serbest Lie cebiri ve m, n, k, p pozitif tamsayılar olmak üzere L_m, L_n, L_k, L_p, L nin homojen bileşenleri olsun.

(i) Eğer $m = s_1(p + k)$ ve $n = s_2(p + k)$ olacak şekilde s_1, s_2 pozitif tamsayıları var ise

$$[L_m, L_n] \cap L([L_k, L_p]) = [L_{s_1}([L_k, L_p]), L_{s_2}([L_k, L_p])] \tag{5.6}$$

dir.

(ii) Eğer $(k + p) \nmid m$ veya $(k + p) \nmid n$ ise

$$[L_m, L_n] \cap L([L_k, L_p]) = \{0\} \tag{5.7}$$

dır.

İspat (i) İlk önce $M = L_p \oplus L_{p+1} \oplus L_{p+2} \oplus \ldots$ alt cebiri ele alınsın. Sırasıyla $L_p, L_{p+1}, \ldots$ nin alt kümeleri $\mathcal{M}_p, \mathcal{M}_{p+1}, \ldots$ olmak üzere, M için bir $\mathcal{M} = \mathcal{M}_p \cup \mathcal{M}_{p+1} \cup \mathcal{M}_{p+2} \cup \ldots$ homojen serbest üreteç kümesi vardır. O zaman $[L_k, L_p] \leq L_{k+p}$ olduğu için

$$[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] \leq [[L_m, L_n], L_{k+p}]$$

ifadesi açıktır ve

$$[L_{s_1}(L_{k+p}), L_{s_2}(L_{k+p})] \subseteq ([L_m, L_n] \cap L(L_{k+p})) \tag{5.8}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla ispatın tamamlanması için

$$([L_m, L_n] \cap L(L_{k+p})) \subseteq [L_{s_1}(L_{k+p}), L_{s_2}(L_{k+p})]$$

ifadesinin doğruluğunu göstermek yeterlidir. Şimdi L nin $(k+p)$ inci alt merkezi serisi

$$L^{k+p} = L_{k+p} \oplus L_{k+p+1} \oplus L_{k+p+2} \oplus \ldots$$

alt cebiri olsun. $\mathcal{M}_i \subseteq L_i$ $(i = k+p, k+p+1, \ldots)$ olacak şekilde L^{k+p} nin

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{k+p} \cup \mathcal{M}_{k+p+1} \cup \mathcal{M}_{k+p+2} \cup \ldots$$

şeklinde bir homojen serbest üreteç kümesi vardır. L^{k+p} nin bu üreteç kümesini bulmak amacıyla $\mathcal{M}_{k+p}$ için L_{k+p} nin bir F-bazı alınsın ve $i > k+p$ için $\mathcal{M}_i$ bir küme olacak şekilde $L_i \cap L(\mathcal{M}_{k+p} \cup \ldots \cup \mathcal{M}_{i-1})$ vektör uzayının tümleyeninin bir bazı olsun. Böylece

$$L_{k+p} = \langle \mathcal{M}_{k+p} \rangle$$

dir. O halde $\alpha \in \mathcal{M}_{k+p}$ için $\pi(\alpha) = \alpha$ ve $\alpha \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{M}_{k+p}$ için $\pi(\alpha) = 0$ ile tanımlanan $\pi : L^{k+p} \to L(L^{k+p})$ doğal projeksiyon dönüşümü ele alınsın. O halde $u_j \in L_m, v_j \in L_n$ ve $\alpha_j \in F$ olacak şekilde, $[L_m, L_n]$ deki herhangi bir eleman

$$w = \sum \alpha_j [u_j, v_j]$$

formunun bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Ayrıca $\pi(u_j) \in L_{s_1}(L_{k+p})$ ve $\pi(v_j) \in L_{s_2}(L_{k+p})$ olur. Şimdi $w \in L(L_{k+p})$ olduğu kabul edilsin ve π bir Lie cebir homomorfizması olduğu için

$$w = \pi(w) = \sum \alpha_j[\pi(u_j), \pi(v_j)] \in [L_{s_1}(L_{k+p}), L_{s_2}(L_{k+p})]$$

dir. Buradan

$$([L_m, L_n] \cap L(L_{k+p})) \subseteq [L_{s_1}(L_{k+p}), L_{s_2}(L_{k+p})] \tag{5.9}$$

olduğu görülür. O halde (5.8) ile (5.9) dan dolayı

$$([L_m, L_n] \cap L(L_{k+p})) = [L_{s_1}(L_{k+p}), L_{s_2}(L_{k+p})]$$

elde edilir ve $[L_k, L_p] \leq L_{k+p}$ olduğundan

$$([L_m, L_n] \cap L(L_{k+p})) = [L_{s_1}[L_k, L_p], L_{s_2}[L_k, L_p]]$$

dir. Böylece lemmanın ilk kısmının ispatı tamamlanmış olur.

(ii) $(k+p) \nmid m$ veya $(k+p) \nmid n$ olduğu kabul edilsin. Öyleyse $u_j \in L_m$, $v_j \in L_n$ ve $\alpha_j \in F$ olacak şekilde

$$w = \sum \alpha_j[u_j, v_j] \in L(L_{k+p})$$

olsun. π dönüşümü ile $i = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere $L(L_{k+p})$ derecesi $i(k+p)$ olan elemanların tümüyle meydana geldiğinden π nin çekirdeğinde $(k+p) \nmid i$ ve $i \geq k+p$ olacak şekilde L_i homojen bileşenleri bulunur ve $(k+p) \nmid m$ veya $(k+p) \nmid n$ olduğu kabul edildiği için $\pi(u_j)$ ve $\pi(v_j)$ nin en az biri sıfırdır. Böylece

$$\pi([u_j, v_j]) = [\pi(u_j), \pi(v_j)] = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$[L_m, L_n] \cap L(L_{k+p}) = \{0\}$$

dır ve $[L_k, L_p] \leq L_{k+p}$ olduğundan

$$[L_m, L_n] \cap L([L_k, L_p]) = \{0\}$$

elde edilir. Böylece lemmanın ikinci kısmının ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.4. L, bir serbest Lie cebiri ve m, n, k, p pozitif tamsayılar olmak üzere L_m, L_n, L_k, L_p L nin homojen bileşenleri olsun. O zaman

(i) eğer $m + n > k + p$ ve $(k + p) \nmid m$ veya $(k + p) \nmid n$ ise

$$\text{boy}[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] = \text{boy}[L_m, L_n]\text{boy}[L_k, L_p],$$

(ii) eğer $m + n > k + p$ ve $m = s_1(k + p)$, $n = s_2(k + p)$ olacak şekilde pozitif s_1, s_2 tamsayıları var ise

$$\begin{aligned}\text{boy}[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] &= \text{boy}[L_{s_1}([L_k, L_p]), L_{s_2}([L_k, L_p]), [L_k, L_p]] \\ &\quad + (\text{boy}[L_m, L_n] - \text{boy}[L_{s_1}([L_k, L_p]), L_{s_2}([L_k, L_p])])\text{boy}[L_k, L_p],\end{aligned}$$

(iii) eğer $k + p \geq m + n$ ve $(m + n) \nmid k$ veya $(m + n) \nmid p$ ise

$$\text{boy}[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] = \text{boy}[L_k, L_p]\text{boy}[L_m, L_n],$$

(iv) eğer $k + p \geq m + n$ ve $k = s_1(m + n)$, $p = s_2(m + n)$ olacak şekilde pozitif s_1, s_2

tamsayıları var ise

$$\begin{aligned}\text{boy}[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] &= \text{boy}[L_{s_1}([L_m, L_n]), L_{s_2}([L_m, L_n]), [L_m, L_n]] \\ &+ (\text{boy}[L_k, L_p] - \text{boy}[L_{s_1}([L_m, L_n]), L_{s_2}([L_m, L_n])])\text{boy}[L_m, L_n]\end{aligned}$$

dir.

İspat (i) Teorem 3.1. de $U = [L_m, L_n]$ ve $V = [L_k, L_p]$ alınırsa

$$\begin{aligned}\text{boy}[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] &= \text{boy}[[L_m, L_n] \cap L([L_k, L_p]), [L_k, L_p]] \\ &+ (\text{boy}[L_m, L_n] - \text{boy}([L_m, L_n] \cap L([L_k, L_p])))\text{boy}[L_k, L_p]\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (5.7) ile

$$\text{boy}[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] = \text{boy}[L_m, L_n]\text{boy}[L_k, L_p]$$

dir.

(ii) Teorem 3.1. de $U = [L_m, L_n]$ ve $V = [L_k, L_p]$ alınarak

$$\begin{aligned}\text{boy}[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] &= \text{boy}[[L_m, L_n] \cap L([L_k, L_p]), [L_k, L_p]] \\ &+ (\text{boy}[L_m, L_n] - \text{boy}([L_m, L_n] \cap L([L_k, L_p])))\text{boy}[L_k, L_p]\end{aligned}$$

elde edilir. (5.6) dan

$$\begin{aligned}\text{boy}[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] &= \text{boy}[L_{s_1}([L_k, L_p]), L_{s_2}([L_k, L_p]), [L_k, L_p]] \\ &+ (\text{boy}[L_m, L_n] - \text{boy}[L_{s_1}([L_k, L_p]), L_{s_2}([L_k, L_p])])\text{boy}[L_k, L_p]\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $\text{boy}[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] = \text{boy}[[L_k, L_p], [L_m, L_n]]$ olduğundan Teorem 3.1. de $U = [L_k, L_p]$ ve $V = [L_m, L_n]$ alınarak

$$\text{boy}[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] = \text{boy}[L_k, L_p]\text{boy}[L_m, L_n]$$

sonucuna ulaşılır.

(iv) Teorem 3.1. de U=$[L_k, L_p]$ ve V= $[L_m, L_n]$ olduğunu kabul ederek

$$\begin{aligned}\text{boy}[[L_k, L_p], [L_m, L_n]] &= \text{boy}[[L_k, L_p] \cap L([L_m, L_n]), [L_m, L_n]] \\ &+ (\text{boy}[L_k, L_p] - \text{boy}([L_k, L_p] \cap L([L_m, L_n])))\text{boy}[L_m, L_n]\end{aligned}$$

elde edilir ve (5.6) dan

$$\begin{aligned}\text{boy}[[L_m, L_n], [L_k, L_p]] &= \text{boy}[L_{s_1}([L_m, L_n]), L_{s_2}([L_m, L_n]), [L_m, L_n]] \\ &+(\text{boy}[L_k, L_p] - \text{boy}[L_{s_1}([L_m, L_n]), L_{s_2}([L_m, L_n])]) \\ &\text{boy}[L_m, L_n]\end{aligned}$$

elde edilir. ■

KAYNAKLAR

[1]. Yakup, O., *Serbest Lie Cebirlerinde Bazı Formdaki Denklemler ve Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi-Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 10s, 2010.

[2]. M. Hall Jr. *Proc. Amer. Math. Soc* **1950**, 1, 575-581.

[3]. Shirshov, A.I. *Mat. Sbornik* **1953**, 33, 441-452.

[4]. Witt, *J. Reine Angew. Math.* **1937** 177, 152-160.

[5]. Witt, *Math. Z.* **1956** 64, 195-216.

[6]. Bryant, R.M. ; Kovacs, L.G. ; Stöhr, R. *Bull. Austral. Math.Soc.***2005** 72, 147-156.

[7]. Stöhr, R. ; Vaughan-Lee, M. *Internat. J. Algebra Comput.* **2009** 5, 699-703.

[8]. Mansuroğlu, N. ; Stöhr, R. *Internat. J. Algebra Comput*. **2013** 23, 205-213.

[9]. Mansuroğlu, N. *Products of homogeneous subspaces in free Lie algebras*, MSc thesis, The University of Manchester, 2010.

[10]. Erdmann, K. ; Wildon, M.J. *Introduction to Lie algebras*, Springer Publications, 2006.

[11]. Jacobson, N. *Lie algebras*, *Dover Publications*, 1963.

[12]. Magnus, W. ; Karrass A. ; Solitar, D. *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*, Dover Publications, 1976.

[13]. Sundaram, S. *J. Algebra* **1993** 154, 507-558.

[14]. Nielsen, J. *Math. Scand* **1955** 31-43.

[15]. Schreier, O. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universitat* **1927** 5 161-183.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Derya Karataş
Doğum Yeri	İzmir
Doğum Tarihi	10.12.1993
Uyruğu	TC
Telefon	05301861283
E-Posta Adresi	deryakaratas3@outlook.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölüm	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	2015

Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	2018

Makale ve Bildiriler
Young Researches Algebra Conference, *Dimension of four homogenous compenents on free Lie Algebra*, Naples, Italy, 2017.
30.Ulusal Matematik Sempozyumu, *Serbest Lie cebirlerinde dört homojen bileşenin çarpımının boyutu*, Ankara, 2017.
4th International Conference on Analysis and Its Applications, *Dimension of four homogeneous components in free Lie algebra*, Kırşehir, 2018.