T.C.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL VE İDEAL YAKINSAKLIK

Necati UYAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR/2020

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL VE İDEAL YAKINSAKLIK

Necati UYAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞAMAN

Prof. Dr. Yılmaz ALTUN

KIRŞEHİR/2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Necati UYAR

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Lisans Üstü eğitim dönemimin her aşamasında bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalışmamda yüksek katkısı olan ve hiçbir emeğini benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yılmaz ALTUN'a teşekkürlerimi sunarım. Tez inceleme sürecinde benimle birlikte çalışan ve yardımını esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Uğur ULUSU 'ya teşekkürlerimi sunarım. Bu aşamada devamlı destekleriyle bana yardımcı olan Eşim Meral UYAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yine tezimin başından sonuna beni yönlendiren Enstitü Sekreteri Bekir TEKİN'e teşekkür ederim.

Ekim, 2020 Necati UYAR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$*$	Sürekli t - norm
$\Diamond$	Sürekli t - conorm
Γ	İndis Kümesi
$card(\Gamma)$	Γ kümesinin kardinalitesi
(X,d)	Metrik uzay
$\overline{B}(x,r)$	Metrik uzayda kapalı yuvar
$(X,M,*)$	Fuzzy metrik uzay
$(M,*)$	Fuzzy metrik
$B_M(x,r,t)$	Fuzzy metrik uzayda açık yuvar
$\overline{B}_M(x,r,t)$	Fuzzy metrik uzayda kapalı yuvar
T_M	$(M,*)$ fuzzy metriğinin ürettiği topoloji
$(X,M,N,*,\Diamond)$	Sezgisel fuzzy metrik uzay
$(M,N,*,\Diamond)$	Sezgisel fuzzy metrik
$B_{(M,N)}(x,r,t)$	Sezgisel fuzzy metrik uzayda açık yuvar
$T_{(M,N)}$	$(M,N,*,\Diamond)$ sezgisel fuzzy metriğinin ürettiği topoloji
(FM)	Fuzzy metrik
(IFM)	Intuitionistic (sezgisel) fuzzy metrik

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL VE İDEAL YAKINSAKLIK

Necati UYAR

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Fakültesi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ALTUN

Bu tez çalışmasında, sezgisel fuzzy normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramı çalışılmıştır. Daha sonra istatistiksel yakınsak diziler için faydalı bir karakterizasyon verilmiştir. Üstelik, tanımlanan bu yakınsaklık metodunun sezgisel fuzzy normlu uzaylardaki alışılmış yakınsaklıktan daha güçlü olduğu örneklerle verilmiştir. Ayrıca, sezgisel bulanık uzaylarda I-yakınsaklık ve I-Cauchy dizisi kavramları tanıtılmış ve çalışılmıştır. Ayrıca bu kavramlar ile bağlantılı bazı özellikler verilmiştir.

Eylül 2020, 53 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Sezgisel bulanık normlu uzaylar, sezgisel bulanık metrik uzaylar, istatiksel yakınsaklık, ideal yakınsaklık.

ABSTRACT

M. Sc. THESIS

STATISTICAL AND IDEAL PROXIMITY IN INTUITIVE FUZZY NORMAL SPACES

Necati UYAR

Kirsehir Ahi Evran Universty

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ALTUN

The concept of ideal convergence includes the concept of statistical convergence that has been extensively researched in the last two decades.In this article, we describe and study Cauchy sequences in spaces with intuitive fuzzy norms, the ideal analogue of convergence, and reveal some properties related to these concepts.

September 2020, 40 Pages.

Keywords: statistical convergence, ideal convergence, spaces with intuitive fuzzy norms, intuitive fuzzy metric spaces

1. GİRİŞ

1965 te Zadeh fuzzy küme teorisini ilk olarak tanıtmıştır. Daha sonra pek çok araştırmacı bu teoriyi klasik küme teorisindeki bilinen sonuçlara uygulamışlardır. Böylece bu teori yaklaşık kırk yıldır aktif bir araştırma (çalışma) alanı olmuştur. Fuzzy mantık sadece lineer olmayan dinamik sistemlerin çatallanması [17], kaosun kontrolü [13], bilgisayar programlanması [16], popülasyon dinamikleri [4], kuantum fiziği [21], gibi pek çok mühendislik uygulamasında kullanılmakla kalmayıp metrik ve topolojik uzaylar [2,12,15,19], fonksiyonlar teorisi [6,18,28], matris ve lineer sistemler çalışması [5,24], yaklaşım teorisi [3] gibi matematiğin çeşitli dallarında da kullanılmıştır. Özellikle, fuzzy topolojisi alanında pek çok çalışma vardır. Aslında, fuzzy topoloji kuantum parçacık fiziğinde [10,11] çok önemli uygulamalara sahiptir. Son zamanlarda sezgisel fuzzy metrik uzay kavaramı Park [23] (ayrıca bknz [1,25]) tarafından tanıtılmıştır. Dahası, Saadati ve Park [25] sezgisel fuzzy normlu uzay kavramını vermiştir.

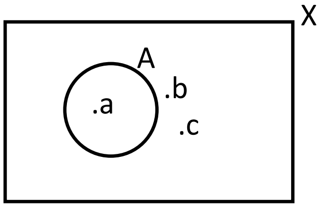
Zadeh [25] tarafından bulanık küme kavramının tanıtılmasından sonra, klasik teorilerin bulanık benzerlerini elde etmek için büyük bir çaba gösterilmiştir. Diğerlerine kıyasla bulanık topoloji alanında büyük bir gelişme kaydedilmiştir. Bulanık topoloji kavramı kuantum parçacık fiziğinde özellikle de Noschie [19] tarafından verilen hem sicim hem de ε^{∞} teorisi ile bağlantılarında çok önemli uygulamalara sahiptir. Atonassov [1,2,3,4] sezgisel bulanık kümeler kavramını tanıtmış, Deschrijer ve Kerre [11] de bu kümelerin bazı özelliklerini tartışmışlardır. Genelleştirilmiş bulanık küme kavramını kullanarak Coker [5,6,7,8,9] sezgisel bulanık topolojik uzaylar kavramını tanıtmıştır. Daha sonra bu uzaylar ve bunların genelleştirmeleri pek çok yazar tarafından çalışılmıştır. Bulanık topolojideki en önemli problemlerden biri uygun bir sezgisel bulanık normlu uzay kavramı elde etmektir. Bu problem Saadati ve Park [20,21] tarafından araştırılmıştır. Aynı zamanda, Saadati ve

Park sezgisel bulanık normlu uzaylarda yakınsaklık ve Cauchy dizi kavramlarını tanıttılar ve sonlu boyutlu tüm sezgisel bulanık normlu uzayların tam olduklarını ispatladılar.

Reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramı birbirinden bağımsız olarak Fast [12] ve Schoenberg [23] tarafından tanıtılmıştır. Daha sonra ise dizi uzayı açısından daha ayrıntılı incelenmiş ve Fridy [13], Salat [22] ve diğer pek çok araştırmacı tarafından toplanabilme teorisi ile ilişkilendirilmiştir. Bu fikir (istatistiksel yakınsaklık kavramı) N pozitif tam sayılar kümesinin alt kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır.

Kostyrko et al. [16] istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan I-yakınsaklık kavramını tanıttı. Bu kavramı tanımlamak için N doğal sayılar kümesinin alt kümelerinden oluşan I ideal kavramını kullandılar. Dems [10] bu çalışmayı devam ettirdi ve bir metrik uzayda I-Cauchy dizi kavramını tanıttı. Ayrıca, bir metrik uzayda bir dizinin I-yakınsak olması için gerek ve yeter şartın o dizinin I-Cauchy dizisi olması gerektiğini ispatladı. Nabiev et al [18] I-Cauchy ve I*-Cauchy dizilerle ilgili bazı özellikleri kanıtladı. Gürgal[14](Gürdal) I-yakınsaklık kavramını 2-normlu uzaylara, Kumar[17] ise bu kavramı çift dizilere taşımıştır.

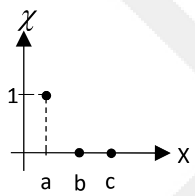
Klasik Küme



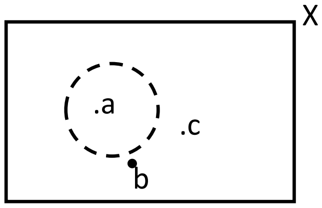
Karakteristik Fonksiyon $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$

$$\chi_A(a) = 1$$
$$\chi_A(b) = 1$$
$$\chi_A(c) = 1$$

A={a, b, c}



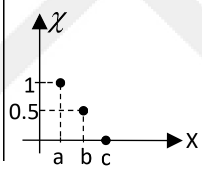
Fuzzy Kümeleri



Üyelik Fonksiyon $U : X \longrightarrow [0,1]$

$$U_A(a) = 1$$
$$U_A(b) = 0.5$$
$$U_A(c) = 0$$

$$A = \left\{\left(x_i, U_A\left(x_i\right)\right)\right\} = \sum \frac{U_A\left(x_i\right)}{x_i} = \int \frac{U_A\left(x_i\right)}{x_i}$$
$$= \left\{(a,1),\ (b,0.5),\ (c,0)\right\}$$
$$= \frac{1}{a} + \frac{0.5}{b} + \frac{0}{c}$$



Fuzzy Küme Örnekleri

1) X={Türkiye'deki bütün şehirler} $\longrightarrow$ Evrensel Küme

A={Nüfusu 5 milyonun üzerindeki şehirler} $\longrightarrow$ Klasik Küme

B={Kalabalık Şehirler} $\longrightarrow$?

$U_B : X \longrightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile $B = \left\{\left(x_i, U_b\left(x_i\right)\right) : x_i \in X\right\}$ fuzzy kümesidir.

$$x \longrightarrow U_b\left(x\right)$$

U_B (İstanbul) = 1

U_B (Ankara) = 0.9

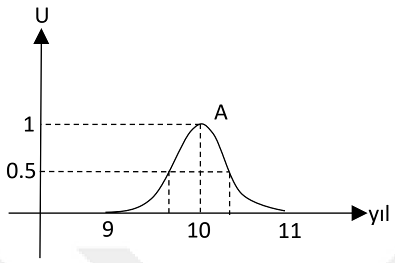
U_B (İzmir) = 0.8

U_B (Malatya) = 0.5

U_B (Bayburt) = 0

B ={(İstanbul , 1),(Ankara , 0.9),(İzmir , 0.8),(Malatya , 0.5),(Bayburt , 0)}

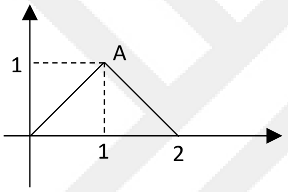
2)



A={10 yaşındakiler}

A={(9,0),(9.5,0.5),(10,1),(10.5,0.5),(11,0)}

3)



A={"1" e yakın reel sayılar}

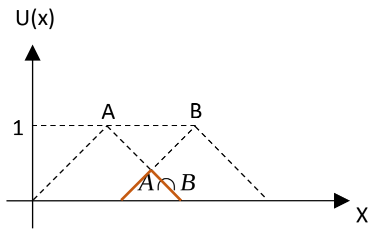
$\forall x \in R$ için

$$U_A(x) = \begin{cases} x \ , & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \\ 0 \ , & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

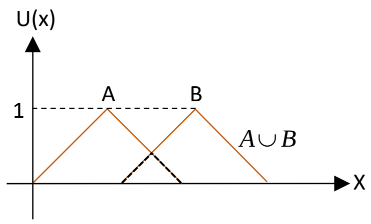
Fuzzy Kümelerinde Kesişim, Birleşim, Komplement

A ve B fuzzy kümeleri

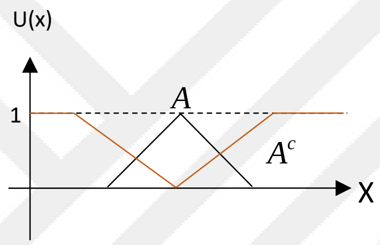
Kesişim : $A \cap B = \{(x, U_{A \cap B}(x))\}$, $U_{A \cap B}(x) = \min\{U_A(x), U_B(x)\}$



Birleşim : $A\cup B=\{(x,U_{A\cup B}(x))\}$, $U_{A\cup B}(x)=\max\{U_A(x),U_B(x)\}$



Komplement : $A^c=\{(x,U_{A^c}(x))$, $U_{A^c}(x)=1-U_A(x)$



$A\cap A^c\neq\varnothing$

$A\cup A^c\neq X$

Zadeh Genişleme Prensibi

$f:X\longrightarrow Y$ A, X'de bir fuzzy kümesi olsun.

$x\longrightarrow y=f(x)$

Genişleme prensibi Y'de bir fuzzy kümesi tanımlar :

$$f(A)=B=\{(y,U_B(y)):y=f(x),\ x\in X\}$$

$$\text{Burada}\quad U_B(y)=\begin{cases}\sup\limits_{f(x)=y}\{U_A(x)\}, & y\in f(x)\\ 0 & ,\ \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

Ör: $A=\{(-1,0.5),(0,0.8),(1,1),(2,0.4)\}$ $f(x)=x^2$, $f(A)=B=?$

$$B=\{(0,U_B(0)),(1,U_B(1)),(4,U_B(4))\}$$

$$U_B(0)=\sup_{f(0)=0}\{U_A(0)\}=\sup\{0.8\}=0.8$$

$$U_B(1)=\sup_{\substack{f(-1)=1\\ f(1)=1}}\{U_A(-1),U_A(1)\}=\sup\{0.5,1\}=1$$

$$U_B(4)=\sup_{f(2)=4}\{U_A(2)\}=\sup\{0.4\}=0.8$$

$$B=\{(0,0.8),(1,1),(4,0.4)\}$$

$f: X_1\times X_2\times\ldots\times X_n \longrightarrow Y$ n'li genişleme

α – Kesit Kümeleri

$A\subset X$ kümesi $U_A: X\longrightarrow[0,1]$ üyelik fonksiyonu ile bir fuzzy kümesidir.

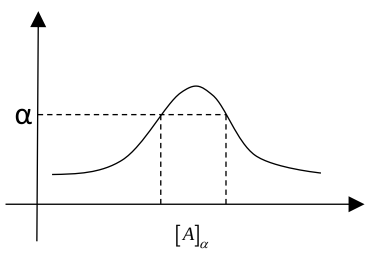
$$A=\{(x,U_A(x)):x\in X\}\subset X\times[0,1]$$

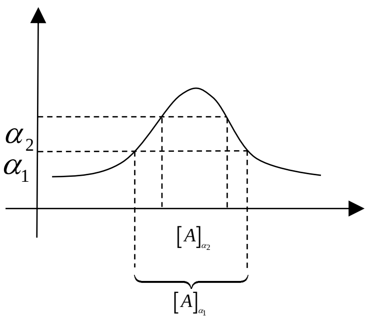
Rastgele bir $\alpha\in[0,1]$ için

$A^\alpha=[A]_\alpha=\{x\in X:U_A(x)\geq\alpha\}$ $\longrightarrow$ A'nın α – kesit kümesi

A kümesine aitlik derecesi α ve üzeri olan

elemanlar kümesi





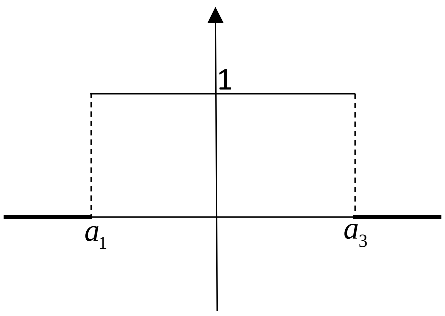
$$\alpha_2 > \alpha_1 \Rightarrow [A]_{\alpha_2} \subset [A]_{\alpha_1}$$

$$\sup A = \overline{\{x \in X : U_A(x) > 0\}}$$

$$[A]_{\alpha'} = A^{+\alpha} = \{x \in X : U_A(x) > \alpha\}$$

Aralık Sayısı

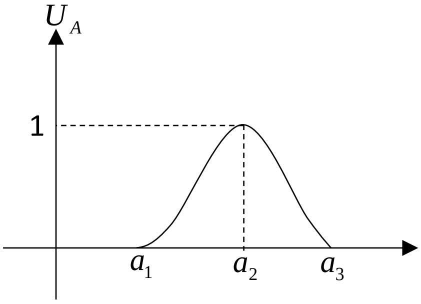
$[a_1, a_3] \in R \;\;,\;\; a_1 < a_3$



$$U_A(x) = \begin{cases} 0 \;,\; x < a_1 \\ 1 \;,\; a_1 \le x \le a_2 \\ 0 \;,\; a_3 < x \end{cases}$$

$a_1 = a_3 \;\Rightarrow [a_1, a_1] \;,\; [2,2] = 2$

Fuzzy Sayısı : Bir fuzzy sayısı belirli bazı özellikleri sağlayan fuzzy kümesidir.



$A=[a_1,a_2,a_3]$

sol tepe sağ

Fuzzy Sayıları

A fuzzy kümesinin bir fuzzy sayısı olması için gerek ve yeter şartlar

i) A normaldir
ii) A fuzzy konvekstir.
iii) U_A üst yarı süreklidir.
iv) $[A]_{0'}$ 'ın kapanışı kompaktır.

Fuzzy Sayıları Kümesi R_F , E' ile gösterilir.

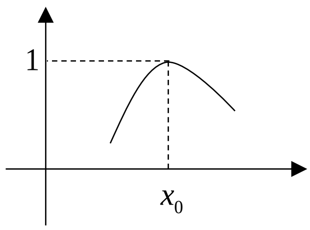
Fuzzy Sayıları

$A \subset X$ **fuzzy kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa fuzzy sayısıdır.**

i) A normaldir.

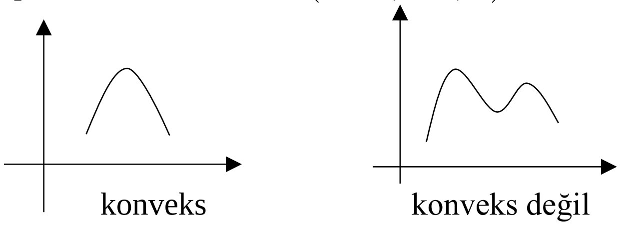
$\exists x_o \in X \rightarrow$ A normaldir.

A normaldir $\Leftrightarrow [A]_1 = \{x \in X : U_A(x) \geq 1\} \neq \emptyset$



ii) A konvekstir.

$\forall \lambda \in [0,1]$ *ve* $\forall x, y \in X$ için $U_A(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \min\{U_A(x), U_A(y)\}$ konvekstir.

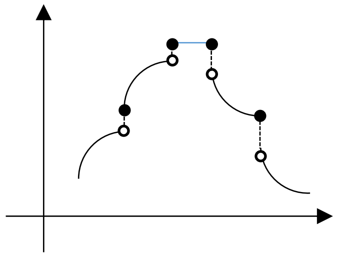


konveks konveks değil

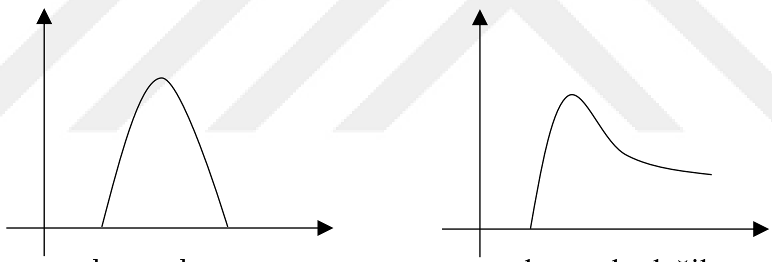
A konvekstir $\Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1]$ için $[A]_\alpha = \{x \in X : U_A(x) \geq \alpha\}$ konvekstir.

iii) U_A üst yarı süreklidir.

$\forall t \in [0,1]$ için $\{x : U_A(x) < t\}$ kümesi açık olmalıdır.



iv) $[A]_{0'} = \{x \in X : U_A(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompaktır.



kompakt kompakt değil

Sonuç :

$A \subset X$ fuzzy sayısıdır $\Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1]$ için $[U]_\alpha$ boştan farklı, kapalı sınırlı bir aralıktır

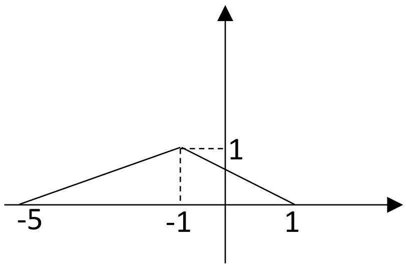
- A fuzzy sayısı olmak üzere

$[A]_\alpha = \left[A_\alpha^- \quad A_\alpha^+ \right]$ gösterimini kullanalım.

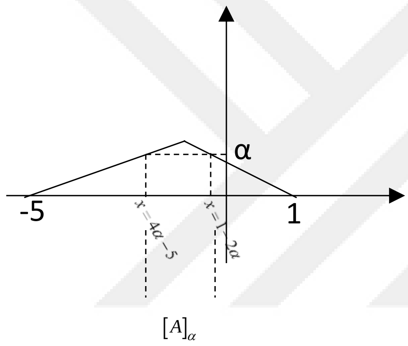
$\forall \alpha \in [0,1]$ için $[A]_\alpha = \left[A_\alpha^- \quad A_\alpha^+ \right]$ kapalı aralıktır.

Fuzzy Sayı Örneği :

$A = [-5, -1, 1]$



$$U_A = \begin{cases} 0 & , \quad x < -5 \\ \dfrac{x+5}{4} & , \quad -5 \le x \le -1 \\ \dfrac{1-x}{2} & , \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \end{cases}$$



$$\frac{x+5}{4} = \alpha \Rightarrow x = 4\alpha - 5 \qquad \frac{1-x}{2} = \alpha \Rightarrow x = 1 - 2\alpha$$

$$[A]_\alpha = [4\alpha - 5 \;\; 1 - 2\alpha]$$

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow [A]_0 = [-5 \; 1]$$

$$\alpha = 0.5 \Rightarrow [A]_{0.5} = [-3 \; 0]$$

$$\alpha = 1 \quad \Rightarrow [A]_1 = [-1 \; -1]$$

Teorem : $\gamma : [0,1] \longrightarrow R$, $B : [0,1] \longrightarrow R$ fonksiyonları

i) γ , $(0,1]$ üzerinde azalmayan sol sürekli ve sınırlı

ii) B , $(0,1]$ üzerinde artmayan sol sürekli ve sınırlı

iii) γ *ve* B , $\alpha = 0$ 'da sağ sürekli

iv) $\gamma(1) \le B(1)$

Şartlarını sağlıyorsa yalnız ve yalnız bir A fuzzy sayısı vardır öyleki

$\forall \alpha \in [0,1]$ için $[A]_\alpha = [\gamma(\alpha), B(\alpha)]$ dir.

A'nın üyelik fonksiyonu $U_A(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] : \gamma(\alpha) < x < B(x)\}$

Fuzzy Sayıları Üzerinde İşlemler

α – Kesit Kümeleri Açısından

A fuzzy sayısı olmak üzere $[A]_\alpha = [A_\alpha^-, A_\alpha^+]$ kapalı aralıktır. Aralıklar üzerindeki işlemleri inceleyelim

$A=[a_1 \;\; a_2] \qquad B=[b_1 \; b_2]$ olmak üzere $(b_1, b_2 \neq 0)$

Toplama : $A(+)B=[a_1+b_1 \quad a_2+b_2]$

Çıkarma : $A(-)B=[a_1-b_2 \quad a_2-b_1]$

Çarpma : $A(\cdot)B=[a_1b_1 \wedge a_1b_2 \wedge a_2b_1 \wedge a_2b_2 \quad a_1b_1 \vee a_1b_2 \vee a_2b_1 \vee a_2b_2\,]$

Bölme : $A(/)B=[a_1/b_1 \wedge a_1/b_2 \wedge a_2/b_1 \wedge a_2/b_2 \quad a_1/b_1 \vee a_1/b_2 \vee a_2/b_1 \vee a_2/b_2\,]$

Tersi : $A^{-1}=\left[\frac{1}{a_1} \wedge \frac{1}{a_3} \quad \frac{1}{a_1} \vee \frac{1}{a_3}\right]$

Örnek : $A=[-3\;5] \quad B=[-2\;7] \qquad A(+)B=[-3-2 \;\; 5+7]=[-5 \;\; 12]$

$$A(-)B=[-3-7 \;\; 5+2]=[-10 \;\; 7]$$

$$A(\cdot)B=[(-3)\cdot(7) \;\; (5)\cdot(7)]=[-21\;35]$$

Üyelik Fonksiyonları Açısından

Toplama : $A+B \quad U_{A+B}(z)=\bigvee_{z=x+y}\left(U_A(x)\wedge U_B(y)\right)$

Çıkarma : $A-B \quad U_{A-B}(z)=\bigvee_{z=x-y}\left(U_A(x)\wedge U_B(y)\right)$

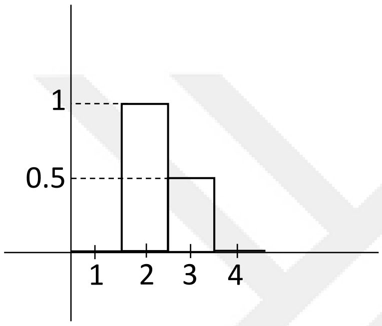
Çarpma : $A\cdot B \quad U_{A\cdot B}(z)=\bigvee_{z=x\cdot y}\left(U_A(x)\wedge U_B(y)\right)$

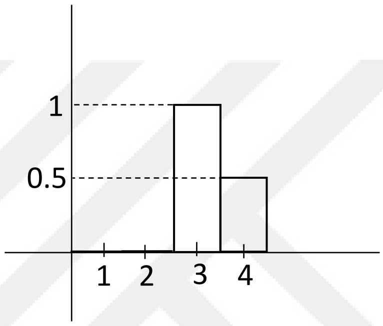
Bölme : $A/B \quad U_{A/B}(z) = \bigvee_{z=x/y} \left(U_A(x) \wedge U_B(y)\right)$

Minimum : $A \wedge B \quad U_{A\wedge B}(z) = \bigvee_{z=x\wedge y} \left(U_A(x) \wedge U_B(y)\right)$

Maximum : $A \vee B \quad U_{A\vee B}(z) = \bigvee_{z=x\vee y} \left(U_A(x) \wedge U_B(y)\right)$

Örnek : $A = \{(2,1),(3,0.5)\} \qquad B = \{(3,1),(4,0.5)\}$





$z:\ \overset{5}{2+3} \qquad \overset{6}{2+4} \quad \overset{7}{3+4} \qquad A+B = \{(5,?),(6,?),(7,?)\}$

$\qquad\qquad 3+3$

$$U_{A+B}(5) = \bigvee_{5=2+3} \left(U_A(2) \wedge U_B(3)\right) = \bigvee(1 \wedge 1) = \bigvee(1) = 1$$

$$\begin{aligned} U_{A+B}(6) &= \bigvee_{\substack{6=2+4 \\ 6=3+3}} \left(U_A(2) \wedge U_B(4)\ ,\ U_A(3) \wedge U_B(3)\right) \\ &= \bigvee\left((1 \wedge 0.5)\ ,\ (0.5 \wedge 1)\right) \\ &= \bigvee(0.5\ ,\ 0.5) = 0.5 \end{aligned}$$

$$U_{A+B}(7) = \bigvee_{7=3+4} \left(U_A(3) \wedge U_B(4)\right) = \bigvee(0.5\ ,\ 0.5) = 0.5$$

$$A+B = \{(5,1)\ ,\ (6,0.5)\ ,\ (7,0.5)\}$$

- A ve B fuzzy sayıları üzerinde sıralama bağıntısı tanımlayalım.

$$A \preceq B \;\Leftrightarrow \max\{A\,,\,B\} = B$$
$$A \preceq B \;\Leftrightarrow \min\{A\,,\,B\} = A$$
$$[a_1\ b_1] \leq [a_2\ b_2] \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \quad ve \quad b_1 \leq b_2$$
$$A \preceq B \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] \text{ için } [A]_\alpha \preceq [B]_\alpha$$
$$[a_\alpha^-\ a_\alpha^+] \preceq [b_\alpha^-\ b_\alpha^+]$$
$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] \text{ için } a_\alpha^- \leq b_\alpha^- \quad ve \quad a_\alpha^+ \leq b_\alpha^+$$

$\preceq$ kısmi sıralamalıdır. İki fuzzy sayısının her zaman kıyaslanabilir olması gerekmez.

- Fuzzy sayılarının toplamaya göre tersi yoktur.

$[A]_\alpha = [a_\alpha^-\ a_\alpha^+]$ fuzy sayısı olmak üzere

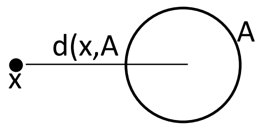
$[a_\alpha^-\ a_\alpha^+] + [-a_\alpha^-\ a_\alpha^+] = [0\ 0]$ olacak şekilde $[-a_\alpha^-\ a_\alpha^+]$ yoktur.

$(R_F\,,+)$ bir grup değildir.

Fuzzy Sayıları Üzerinde Tanımlı Metrikler

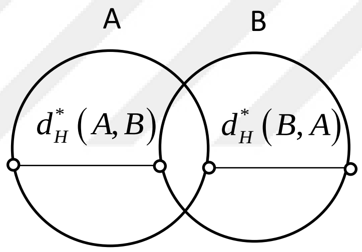
K, R^n nin boş olmayan kompakt, konveks alt kümelerinin sınıfı olsun. $A \in K$ olsun. Bir $x \in R^n$ noktasının A kümesine uzaklığı ;

$$d(x, A) = \inf \{\|x - a\| : a \in A\} = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

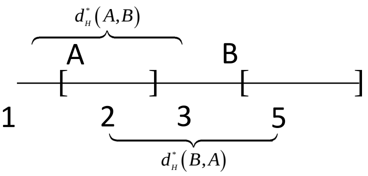


$A, B \in K$ olsun.

$$d_H^*(B, A) = \sup_{b \in B} d(b, A) \qquad d_H^*(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$$



$A = [1, 2] \quad B = [3, 5]$ olsun.



$$d_H^*(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) = |1 - 3| = 2$$

$$d_H^*(B, A) = \sup_{b \in B} d(b, A) = |2 - 5| = 3$$

A ve B kümeleri arasında ki Hausdorff uzaklığı ;

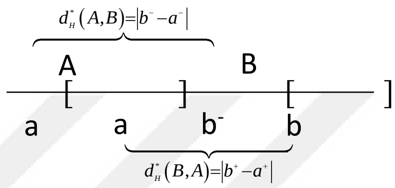
$$d_H(A,B) = \max\left\{d_H^*(A,B), d_H^*(B,A)\right\}$$
$$= \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}$$
$$= \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|b-a\|\right\}$$

*(K,d_H) tam, ayrılabilir metrik uzaydır.

$A=[1,2] \qquad B=[3,5]$

$d_H(A,B) = \max\left\{d_H^*(A,B), d_H^*(B,A)\right\} = \max\{2,3\} = 3$

$A=\left[a^-,a^+\right] \quad B=\left[b^-,b^+\right]$ aralıkları için



$$d_H(A,B) = \max\left\{\left|a^- - b^-\right|, \left|a^+ - b^+\right|\right\} \quad \text{olarak tanımlanır.}$$

Her $\alpha\in[0,1]$ için A fuzzy sayısının $\alpha-$kesit kümesi $[A]_\alpha$ boş olmayan, kompakt konveks (yani R de boş olmayan kapalı bir aralık) olduğundan Hausdorff metriği yardımıyla fuzzy üzerinde metrikler tanımlanabilir.

1) $D_\varpi : R_F \times R_F \longrightarrow R^+ \cup \{0\}$

$$D_\varpi(A,B) = \sup_{\alpha\in[0,1]} d_H\left([A]_\alpha, [B]_\alpha\right)$$
$$= \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\left\{\left|a_\alpha^- - b_\alpha^-\right|, \left|a_\alpha^+ - b_\alpha^+\right|\right\}$$

2) $D_p : R_F \times R_F \longrightarrow R^+ \cup \{0\} \quad (1\le p<\infty)$

$$D_p(A,B) = \left(\int_0^1 \left(d_H\left([A]_\alpha, [B]_\alpha\right)\right)^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\int_0^1 \left(\max\left\{\left|a_\alpha^- - b_\alpha^-\right|, \left|a_\alpha^+ - b_\alpha^+\right|\right\}\right)^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}}$$

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım2.1

$*$: [0,1]x[0,1]→[0,1] ikili işlemine aşağıdaki şartları sağlıyorsa sürekli bir t-norm adı verilir.

i) $*$ ikili işlemi birleşme ve değişme özelliklerini sağlar.

ii) $*$ süreklidir.

iii) Her $a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$ dır.

iv) Her $a, b, c, d \in [0,1]$ için $a \leq c$ ve $b \leq d$ olduğunda $a * b \leq c * d$ dir.

Tanım2.2

$\Diamond : [0,1] x [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemine aşağıdaki şartları sağlıyorsa sürekli bir t-conorm adı verilir.

(i) $\Diamond$ ikili işlemi birleşme ve değişme özelliklerini sağlar.

(ii) $\Diamond$ süreklidir.

(iii) Her $a \in [0,1]$ için $a \Diamond 0 = a$ dır.

(iv) Her $a, b, c, d \in [0,1]$ için $a \leq c$ ve $b \leq d$ olduğunda $a \Diamond b \leq c \Diamond d$ dir.

Örnek olarak her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = ab,\ a * b = \min\{a, b\}, a \Diamond b = \min\{a + b, 1\}$ ve $a \Diamond b = \max\{a, b\}$ işlemleri verilebilir.

Tanım 2.3

V bir vektör uzayı, $*$ sürekli bir t norm, $\Diamond$ sürekli bir t-conorm ve μ, ϑ da $V x (0,\infty)$ üzerinde fuzzy kümeleri olmak üzere her x, y ∈ V ve s, t > 0 için aşağıdaki şartları sağlayan bulanık kümeler ise (V, μ, ϑ, ∗, ◊) sıralı beşlisine sezgisel fuzzy normlu uzay (SFNU) denir.

a) $\mu(x,t) + \vartheta(x,t) \leq 1$,

b) $\mu(x,t) > 0$,

c) $\mu(x,t)=1$ ancak ve ancak x=0,

d) Her α≠0 için $\mu(\alpha x,t) = \mu(x,\frac{t}{|\alpha|})$

e) $\mu(x,t) * \mu(y,s) \leq \mu(x+y,t+s)$

f) $\mu(x,\cdot) : (0,\infty) \rightarrow [0,1]$ sürekli,

g) $\lim_{t\to\infty} \mu(x,t) = 1$ ve $\lim_{t\to 0} \mu(x,t) = 0$

h) $\vartheta(x,t) < 1$

i) $\vartheta(x,t)=0$ ancak ve ancak x=0

j) Her α≠0 için $\vartheta(\alpha x,t) = \vartheta(x,\frac{t}{|\alpha|})$

k) $\vartheta(x,t) \Diamond \vartheta(y,s) \geq \vartheta(x+y,t+s)$

l) $\vartheta(x,\cdot) : (0,\infty) \rightarrow [0,1]$ sürekli,

m) $\lim_{t\to\infty} \vartheta(x,t) = 0$ ve $\lim_{t\to 0} \vartheta(x,t) = 0$

Bu durumda (μ,ϑ) ya sezgisel fuzzy norm denir. Standart bir örnek olarak aşağıdakini verebiliriz:

$(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve her $a,b \in [0,1]$ için $a*b = ab, a\Diamond b = \min\{a+b,1\}$ olsun. Her x∈V ve tüm t > 0 için

$$\mu_O(x,t) = \frac{t}{t+\|x\|} \text{ ve } \vartheta_O(x,t) = \frac{\|x\|}{t+\|x\|}$$

olarak alınırsa $(V,\ \mu,\ \vartheta,*,\Diamond)$ bir sezgisel fuzzy normlu uzaydır.

Tanım2.4

$(V,\ \mu,\ \vartheta,*,\Diamond)$ bir SFNU ve $x=(x_k)$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için her zaman $k \ge k_0$ olduğunda $\mu(x_k - L, t) > 1-\varepsilon$ ve $\vartheta(x_k - L, t) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in N$ doğal sayısı mevcutsa $x=(x_k)$ dizisi (μ,ϑ) sezgisel fuzzy normuna göre $L \in V$ ye yakınsaktır denir.

Tanım2.5

$(V,\ \mu,\ \vartheta,*,\Diamond)$ bir SFNU ve $x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için $k,m \ge k_0$ olduğunda $\mu(x_k - x_m, t) > 1-\varepsilon$ ve $\vartheta(x_k - x_m, t) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in N$ doğal sayısı mevcutsa $x=(x_k)$ dizisine (μ,ϑ) sezgisel fuzzy normuna göre bir Cauchy dizisidir denir.

Tanım2.6

Bir üçgensel norm veya bir t-norm, [0,1] kapalı aralığı üzerinde tanımlı, sürekli, değişmeli, birleşmeli, azalmayan ve 1 birim elemanına sahip olan bir ikili işlemdir. Bir başka deyişle her $a,b,c,d \in [0,1]$ için

$i)\ a*1=a;$
$ii)\ a*b=b*a;$
$iii) c\geq a\ ve\ d\geq b\ iken\ c*d\geq a*b;$
$iv)\ (a*b)*c=a*(b*c)$

özelliklerini sağlayan $*:[0,1]x[0,1]\rightarrow[0,1]$ sürekli dönüşümüne bir t-norm adı verilir.

Tanım2.7

Bir üçgensel konorm veya bir t-konorm, [0,1] kapalı aralığı üzerinde tanımlı, sürekli, değişmeli, birleşmeli, azalmayan ve 0 birim elemanına sahip olan bir ikili işlemdir. Bir başka deyişle her $a,b,c,d\in[0,1]$ için

$i)\ a\Diamond 0=a;$
$ii)\ a\Diamond b=b\Diamond a;$
$iii) c\geq a\ ve\ d\geq b\ iken\ c\Diamond d\geq a\Diamond b;$
$iv)\ (a\Diamond b)\Diamond c=a\Diamond(b\Diamond c)$

özelliklerini sağlayan $\Diamond:[0,1]x[0,1]\rightarrow[0,1]$ sürekli dönüşümüne bir t-konorm adı verilir.

Tanım2.8

X bir vektör uzayı, $*$ sürekli bir t-norm, $\Diamond$ sürekli bir t-konorm ve $\mu,\vartheta; X\times(0,\infty)$

üzerinde bulanık kümeler olmak üzere her $x,y\in X\ ve\ s,t>0$ için aşağıdaki şartları sağlayan beşlisine bir sezgisel bulanık normlu uzay (kısaca SBNU) denir.

$i)\quad \mu(x,t)\ +\ \vartheta(x,t)\ \leq\ 1;$
$ii)\quad \mu(x,t)\ >0;$
$iii)\quad x=0\ ise\ \mu(x,t)=1;$
$iv)\quad Her\ a\neq 0\ için\ \mu(ax,t)=\ \mu(x,\frac{t}{|a|});$
$v)\quad \mu(x,t)*\mu(y,s)\ \leq\ \mu(x+y,t+s);$

vi) $\mu(x,\cdot)\ :\ (0,\infty)\to[0,1]$ *sürekli*;

vii) $\lim_{t\to\infty}\mu(x,t)=1$ *ve* $\lim_{t\to 0}\mu(x,t)=0$;

viii) $\vartheta(x,t)<1$;

ix) $x=0$ *ise* $\vartheta(x,t)=0$;

x) *Her* $a\neq 0$ *için* $\vartheta(ax,t)=\ \vartheta\ (x,\frac{t}{|a|})$;

xi) $\vartheta(x,t)\lozenge\mu(y,s)\ \geq\ \mu(x+y,t+s)$;

xii) $\vartheta\ (x,\cdot)\ :\ (0,\infty)\to[0,1]$ *sürekli*;

xiii) $\lim_{t\to\infty}\vartheta(\mathrm{x},\mathrm{t})=0$ ve $\lim_{t\to 0}\vartheta(\mathrm{x},\mathrm{t})=1$.

Bu durumda (μ,ϑ) ikilisine sezgisel bulanık norm adı verilir.

Örnek 2.1

$(X,\|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve her $a,b\in[0,1]$ *için* $a*b=ab$ ve $a\lozenge b=\min\{a+b,1\}$ olsun. Her $x\in X$ *ve* $t>0$ için

$$\mu(x,t)=\frac{t}{t+\|x\|}\ \text{ve}\ \vartheta(x,t)=\frac{\|x\|}{t+\|x\|}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(X,\mu,\vartheta,*,\lozenge)$ beşlisi bir SBNU dır.

Tanım2.9

$(X,\mu,\vartheta,*,\lozenge)$ bir SBNU ve $x=(x_n)$,terimleri X uzayının elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Eğer her ε > 0 ve t >0 için n ≥ m olduğunda $\mu(x_n-\xi,t)>1-\varepsilon$ ve $\vartheta(x_n-\xi,t)<\varepsilon$ olacak biçimde pozitif bir m tam sayısı varsa $x=(x_n)$ dizisi $\xi\in X$, elemanına (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre yakınsaktır denir. ξ elemanına (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre alışılmış limiti denir ve $(\mu,\vartheta)-\lim x_n=\xi$ ile gösterilir.

Tanım2.10

$(X,\mu,\vartheta,*,\Diamond)$ bir SBNU ve $x=(x_n)$,terimleri X uzayının elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Eğer her ε > 0 ve t >0 için $n,m\geq m_0$ olduğunda $\mu(x_n - x_m, t)$>1-ε ve $\vartheta(x_n - x_m, t)<\varepsilon$ olacak biçimde pozitif bir m_0 sayısı varsa $x=(x_n)$ dizisi (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre Cauchy dizisidir denir.

Tanım2.11

X boştan farklı bir küme olmak üzere $I\subset P(x)$ sınıfı

i) $\varnothing\in I;$
ii) $Her\ A,\ B\in I\ için\ A\cup B\in I;$
iii) $Her\ A\in I\ ve\ B\subset A\ için\ B\in I$

şartlarını sağlıyorsa I sınıfına X üzerinde bir idealdir denir.

Tanım2.12

X boştan farklı bir küme olmak üzere boştan farklı $F\subset P(x)$ sınıfı

i) $\varnothing\notin F;$
ii) $Her\ A,\ B\in F\ için\ A\cap B\in F;$
iii) $Her\ A\in F\ ve\ B\supset A\ için\ B\in F$

şartlarını sağlıyorsa F sınıfına X üzerinde bir süzgeç denir.

Eğer $I\neq\varnothing$ *ve* $X\notin I$ *ise* I idealine aşikar olmayan ideal adı verilir.

X üzerinde aşikar olmayan bir $I\subset P(X)$ ideali tüm tek nokta kümelerini kapsıyorsa yani $\{\{x\}:x\in X\}$ kümelerini kapsıyorsa I idealine uygun ideal adı verilir.

Aşağıdaki önerme ideal ve süzgeç kavramları arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Önerme 2.1

$I \subset P(X)$ aşikar olmayan bir ideal olsun. Bu durumda

$F = F(I) = \{M \subset N : M = X - A, A \in I\}$ sınıfı X üzerinde bir süzgeçtir.

$F = F(I)$ sınıfına I ideali ile bağlantılı süzgeç adı verilir.

Tanım 2.13

$I \subset P(N)$ bir uygun ideal olsun. I idealine ait sayılabilir ve ikişer ikişer ayrık her $\{A_1, A_2, ...\}$ kümeler ailesi için $A_i \Delta B_i \ (i \in N)$ bir sonlu küme ve $B = \left(\overset{\infty}{\underset{i=1}{U}} B_i \right) \in I$ olacak biçimde sayılabilir bir $\{B_1, B_2, ...\}$ kümele ailesi var ise I ideali (AP) şartını sağlıyor denir.

I, N doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin bir uygun idealini temsil edecektir.

3.SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde sezgisel fuzzy normlu uzayda istatiksel yakınsaklık üzerinde durulmuştur. Bunun için ilk olarak istatistiksel yakınsaklık kavramını hatırlayalım.

K, N doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun,

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \le n : k \in N\}\right|$$

limiti mevcut ise bu limite K kümesinin asimptotik yoğunluğu denir. Burada $|B|$, B kümesinin kardinalitesini göstermektedir.

$x = (x_k)$ sayı dizisi olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ için $\delta\{k : |x_k - L| \ge \varepsilon\} = 0$ oluyorsa x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. $st - \lim x = L$ ile gösterilir.

Yakınsak her dizi aynı değere istatistiksel yakınsaktır, fakat bunun tersi doğru değildir. [14,22] de aksi duruma bir örnek bulunabilir.

Tanım3.1

$(V,\ \mu,\ \vartheta, *, \lozenge)$ bir SFNU ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için

$$\delta\left\{k \in \mathrm{N} : \mu\left(x_k - L, t\right) \le 1 - \varepsilon \text{ veya } \vartheta\left(x_k - L, t\right) \ge \varepsilon\right\} = 0 \ldots (1)$$

veya

$$\lim_{n} \frac{1}{n} \left\{ k \leq n : \mu\left(x_k - L, t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta\left(x_k - L, t\right) \geq \varepsilon \right\} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi (μ, ϑ) sezgisel fuzzy normuna göre L ye yakınsaktır denir. $st_{\mu,\vartheta} - \lim x = L$ ile gösterilir ve L ye $st_{\mu,\vartheta} -$limit denir.

(1) denklemi ve yoğunluğun iyi bilinen özellikleri kullanılarak, aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 3.1

$(V, \mu, \vartheta, *, \Diamond)$ bir SFNU olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

i) $st_{\mu,\vartheta} - \lim x = L$

ii) $\delta\left\{ k \in \mathrm{N} : \mu\left(x_k - L, t\right) \leq 1-\varepsilon \right\} = \delta\left\{ k \in \mathrm{N} : \vartheta\left(x_k - L, t\right) \geq \varepsilon \right\} = 0$

iii) $\delta\left\{ k \in \mathrm{N} : \mu\left(x_k - L, t\right) > 1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta\left(x_k - L, t\right) < \varepsilon \right\} = 1$

iv) $\delta\left\{ k \in \mathrm{N} : \mu\left(x_k - L, t\right) > 1-\varepsilon \right\} = \delta\left\{ k \in \mathrm{N} : \vartheta\left(x_k - L, t\right) < \varepsilon \right\} = 1 \text{ve}$

v) $st - \lim \mu\left(x_k - L, t\right) = 1 \textit{ ve } st - \lim \vartheta\left(x_k - L, t\right) = 0$

Teorem 3.1

$(V, \mu, \vartheta, *, \Diamond)$ bir SFNU olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi (μ, ϑ) sezgisel fuzzy normuna göre istatistiksel yakınsak ise bu durumda $st_{\mu,\vartheta} -$limiti tektir.

İspat:

$st_{\mu,\vartheta}-\lim x=L_1$ ve $st_{\mu,\vartheta}-\lim x=L_2$ olduğunu varsayalım Verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için bir $r>0$ sayısını $(1-r)*(1-r)>1-\varepsilon$ ve $r\Diamond r<\varepsilon$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda herhangi bir $t>0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$K_{\mu,1}(r,t)=\{n\in N:\mu(x_n-L_1,t)\le 1-r\},\quad K_{\mu,2}(r,t)=\{n\in N:\mu(x_n-L_2,t)\le 1-r\}$$

$$K_{\vartheta,1}(r,t)=\{n\in N:\vartheta(x_n-L_1,t)\ge r\}\qquad K_{\vartheta,2}(r,t)=\{n\in N:\vartheta(x_n-L_2,t)\ge r\}$$

$st_{\mu,\vartheta}-\lim x=L_1$ olduğundan her $t>0$ için

$$\delta\{K_{\mu,1}(\varepsilon,t)\}=\delta\{K_{\vartheta,1}(\varepsilon,t)\}=0$$

dır. Benzer biçimde $st_{\mu,\vartheta}-\lim x=L_2$ olduğundan her $t>0$ için

$$\delta\{K_{\mu,2}(\varepsilon,t)\}=\delta\{K_{\vartheta,2}(\varepsilon,t)\}=0$$

dır. Şimdi

$$K_{\mu,\vartheta}(\varepsilon,t)=\{K_{\mu,1}(\varepsilon,t)\cup K_{\mu,2}(\varepsilon,t)\}\cap\{K_{\vartheta,1}(\varepsilon,t)\cup K_{\vartheta,2}(\varepsilon,t)\}$$

olsun. Bu durumda $\delta\{N/K_{\mu,\vartheta}(\varepsilon,t)\}=1$ olmasını sağlayan $\delta\{K_{\mu,\vartheta}(\varepsilon,t)\}=0$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. $k\in N/K_{\mu,\vartheta}(\varepsilon,t)$ ise, bu durumda iki durum söz konusu olabilir. Bunlardan ilki $k\in N/\{K_{\mu,1}(\varepsilon,t)\cup K_{\mu,2}(\varepsilon,t)\}$ olması durumu, ikincisi ise

$k\in N/\{K_{\vartheta,1}(\varepsilon,t)\cup K_{\vartheta,2}(\varepsilon,t)\}$ olmasıdır. İlk olarak $k\in N/\{K_{\mu,1}(\varepsilon,t)\cup K_{\mu,2}(\varepsilon,t)\}$ durumunu düşünelim. Bu durumda

$$\mu(L_1-L_2,t)\ge\mu\left(x_k-L_1,\frac{t}{2}\right)*\mu\left(x_k-L_2,\frac{t}{2}\right)>(1-r)*(1-r)$$

yazılabilir. $(1-r)*(1-r)>1-\varepsilon$ olduğundan

$\mu(L_1 - L_2, t) > 1 - \varepsilon ...(2)$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan her $t > 0$ için (2) eşitliğinden $\mu(L_1 - L_2, t) = 1$ elde edilir ki bu $L_1 = L_2$ demektir. Diğer taraftan, $k \in N / \{K_{\vartheta,1}(\varepsilon,t) \cup K_{\vartheta,2}(\varepsilon,t)\}$ ise, bu durumda da

$$\vartheta(L_1 - L_2, t) \leq \vartheta\left(x_k - L_1, \frac{t}{2}\right) \Diamond \vartheta\left(x_k - L_2, \frac{t}{2}\right) < r \Diamond r$$

yazılabilir. $r \Diamond r < \varepsilon$ olduğundan $\vartheta(L_1 - L_2, t) < \varepsilon$ elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan her $t > 0$ için $\vartheta(L_1 - L_2, t) = 0$ elde edilir ki bu da $L_1 = L_2$ demektir. Dolayısıyla $st_{\mu,\vartheta} -$limiti tektir.

Teorem3.2

$(V, \mu, \vartheta, *, \Diamond)$ bir SFNU olsun. $(\mu, \vartheta) - \lim x = L$ ise bu durumda $st_{\mu,\vartheta} - \lim x = L$ dir.

İspat:

$(\mu, \vartheta) - \lim x = 1$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için $k \geq k_0$ olduğundan

$$\mu(x_k - L, t) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \vartheta(x_k - L, t) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $k_0 \in N$ doğal sayısı vardır. Bu ise

$$\{k \in \mathrm{N} : \mu(\mathrm{x}_k - L, \mathrm{t}) \leq 1 - \varepsilon \text{ ve } \vartheta(\mathrm{x}_k - L, \mathrm{t}) \geq \varepsilon\}$$

kümesinin sonlu sayıda elemana sahip olduğunu garanti eder. Doğal sayıların her sonlu alt kümesi sıfır yoğunluğa sahip olduğundan

$$\delta\{k \in \mathrm{N} : \mu(\mathrm{x}_k - L, \mathrm{t}) \leq 1 - \varepsilon \text{ ve } \vartheta(\mathrm{x}_k - L, \mathrm{t}) \geq \varepsilon\} = 0$$

dır. Böylece istenilen sonuç yani $st_{\mu,\vartheta}-\lim x=L$ elde edilir.

Teorem 2.3 ün tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 2.1 $(R,|\cdot|)$ alışılmış norm ile birlikte reel sayı uzayı olmak üzere her $a,b\in[0,1]$, $a*b=ab\ ve\ a\Diamond b=\min\{a+b,1\}$ olsun. Her $x\in R$ ve her $t>0$ için

$$\mu_O(x,t)=\frac{t}{t+|x|}\ ve\ \vartheta_O(x,t)=\frac{|x|}{t+|x|}$$

fonksiyonlarını alalım. Bu durumda $(R,\mu,\vartheta,*,\Diamond)$ bir SFNU dır. $x=(x_k)$ dizisini

$$x_k:=\begin{cases}1\ ,\ k=m^2,\ (m\in N)\\ 0\ ,\ diğer\ durumlar\end{cases}\qquad ...(3)$$

şeklinde tanımlayalım. Daha sonra $0<\varepsilon<1$ ve herhangi bir $t>0$ için

$$K_n(\varepsilon,t):=\{k\le n:\mu_0(x_k,t)\le 1-\varepsilon\ veya\ \vartheta_0(x_k,t)\ge\varepsilon\}$$

kümesini oluşturalım.

$$\begin{aligned}K_n(\varepsilon,t)&:=\left\{k\le n:\frac{t}{t+|x_k|}\le 1-\varepsilon\ veya\ \frac{|x_k|}{t+|x_k|}\ge\varepsilon\right\}=\left\{k\le n:|x_k|\ge\frac{\varepsilon.t}{1-\varepsilon}>0\right\}\\&=\{k\le n:x_k=1\}=\{k\le n:k=m^2\ ve\ m\in N\}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{1}{n}|K_n(\varepsilon,t)|=\frac{1}{n}\left|\{k\le n:k=m^2\ ve\ m\in N\}\right|\le\frac{\sqrt{n}}{n}$$

yani $\lim_{n}\frac{1}{n}\left|K_n(\varepsilon,t)\right|=0$ dır. Tanım 2.1 gereğince $st_{(\mu_0,\vartheta_0)}-\lim x=0$ elde edilir. Ancak, $x=(x_k)$ dizisi Lemma 4.10, [25] gereğince $(R,|\cdot|)$ normlu uzayında yakınsak değildir. Böylece x dizisi (μ_0,ϑ_0) sezgisel fuzzy normlarına göre yakınsak değildir.

Teorem3.3

$(V,\ \mu,\ \vartheta,*,\Diamond)$ bir SFNU olsun. $st_{\mu,\vartheta}-\lim x=L$ ancak ve ancak $\delta\{K\}=1$ ve $(\mu,\vartheta)-\lim_{n\in K}x_n=L$ yani $(\mu,\vartheta)-\lim_{n}x_{k_n}=L$ olacak biçimde doğal sayıların bir $K=\{k_n\}_{n\in N}$ artan indis dizisinin mevcut olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow:)st_{\mu,\vartheta}-\lim x=L$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir $t>0$ *ve* $j\in N$ için

$$K_{\mu,\vartheta}(j,t):=\left\{n\in N:\mu(x_n-L,t)>1-\frac{1}{j}\ ve\ \vartheta(x_n-L,t)<\frac{1}{j}\right\}$$

kümesini alalım. Bu durumda, $t>0$ *ve* $j\in N$ için

$$K_{\mu,\vartheta}(j+1,t)\subset K_{\mu,\vartheta}(j,t)...(4)$$

dir. $st_{\mu,\vartheta}-\lim x=L$ olduğundan $\delta\{K_{\mu,\vartheta}(j,t)\}=1...(5)$ dir. Şimdi $p_1,K_{\mu,\vartheta}(1,t)$ kümesinin keyfi bir sayısı olsun. Bu durumda (5) eşitliği gereğince her $n\geq p_2$ için

$$\frac{1}{n}\left\{k\leq n:\mu(x_k-L,t)>1-\frac{1}{2}\ ve\ \vartheta(x_k-L,t)<\frac{1}{2}\right\}>\frac{1}{2}$$

olacak biçimde bir $p_2\in K_{\mu,\vartheta}(2,t),(p_2>p_1)$ sayısı vardır. Üstelik, yine (5) eşitliğinden her $n\geq p_3$ için

$$\frac{1}{n}\left\{k \le n : \mu\left(x_k - L, t\right) > 1 - \frac{1}{3} \; ve \; \vartheta\left(x_k - L, t\right) < \frac{1}{3}\right\} > \frac{2}{3}$$

olacak biçimde bir $p_3 \in K_{\mu,\vartheta}(3,t), (p_3 > p_2)$ sayısı vardır. Bu şekilde devam ettirildiğinde $p_j \in K_{\mu,\vartheta}(j,t)$ ve her $n \ge p_j$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \mu\left(x_k - L, t\right) > 1 - \frac{1}{j} \; ve \; \vartheta\left(x_k - L, t\right) < \frac{1}{j}\right\}\right| > \frac{j-1}{j} \ldots (6)$$

eşitsizliğini sağlayan doğal sayıların bir $\{p_j\}_{j\in N}$ artan indeks dizisi oluşturulabilir. Şimdi K artan indis dizisini

$$K := \{n \in N : 1 < n < p_1\} \cup \left[\bigcup_{j\in N} n \in K_{\mu,\vartheta}(j,t) : p_j \le n < p_{j+1}\right] \ldots (7)$$

şeklinde oluşturalım. Bu durumda (4), (6) ve (7) eşitlikleri beraber düşünüldüğünde her n ($p_j \le n < p_{j+1}$) için

$$\frac{1}{n}\left|\{k \le n : k \in K\}\right| \ge \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \mu\left(x_k - L, t\right) > 1 - \frac{1}{j} \; ve \; \vartheta\left(x_k - L, t\right) < \frac{1}{j}\right\}\right| > \frac{j-1}{j}$$

sonucuna ulaşılabilir. Dolayısıyla $\delta\{K\} = 1$ dir. $\varepsilon > 0$ *olsun.* $\frac{1}{j} < \varepsilon$ olacak biçimde $j \in N$ sayısı seçelim. Ayrıca $n \ge \vartheta_j$ *ve* $n \in K$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, K kümesinin tanımı gereğince, $\vartheta_m \le n \le \vartheta_{m+1}$ *ve* $n \in K_{\mu,\vartheta}(j,t)$ olacak biçimde bir $m \ge j$ sayısı vardır. Dolayısıyla, her $\varepsilon > 0, n \ge \vartheta_j$ *ve* $n \in K$ için

$$\mu\left(x_n - L, t\right) > 1 - \frac{1}{j} > 1 - \varepsilon \; ve \; \vartheta\left(x_n - L, t\right) < \frac{1}{j} < \varepsilon$$

dir. Bu ise $(\mu, \vartheta) - \lim_{n\in K} x_n = L$ olduğunu gösterir.

($\Leftarrow$:) $\delta\{K\}=1$ ve $(\mu,\vartheta)-\lim_{n\in K} x_n = L$ olacak biçimde doğal sayıların artan bir indeks dizisinin $K=\{k_n\}_{n\in N}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $\varepsilon>0$ ve $n\geq n_0$ olduğunda $\mu(x_n-L,t)>1-\varepsilon$ ve $\vartheta(x_n-L,t)<\varepsilon$ eşitsizlikleri sağlanacak biçimde bir n_0 sayısı vardır. Şimdi

$$M_{\mu,\vartheta}(\varepsilon,t):=\{n\in \mathrm{N}:\mu(\mathrm{x}_n-L,\mathrm{t})\leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta(\mathrm{x}_n-L,\mathrm{t})\geq\varepsilon\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda

$$M_{\mu,\vartheta}(\varepsilon,t)\subset N-\{k_{n_0},k_{n_0+1},k_{n_0+2},...\}$$

dir. $\delta\{K\}=1$olduğundan

$$\delta\{N-\{k_{n_0},k_{n_0+1},k_{n_0+2},...\}\}=0\Rightarrow\delta\{M_{\mu,\vartheta}(\varepsilon,t)\}=0$$

dır. Böylece $st_{\mu,\vartheta}-\lim x=L$ elde edilir.

Son olarak, sezgisel fuzzy normlu uzaylarda istatistiksel Cauchy dizi kavramı tanıtılmış ve bir karakterizasyon verilmiştir.

Tanım3.2

$(V,\ \mu,\ \vartheta,*,\Diamond)$ bir SFNU ve $x=(x_k)$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için

$$\delta\{k\in \mathrm{N}:\mu(\mathrm{x}_n-x_m,\mathrm{t})\leq 1-\varepsilon \text{ veya } \vartheta(\mathrm{x}_n-x\ ,\mathrm{t})\geq\varepsilon\}=0$$

olacak biçimde bir $m\in N$ sayısı mevcut ise $x=(x_k)$ dizisine (μ,ϑ) sezgisel fuzzy normuna göre bir istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.3 ün ispat tekniğine benzer bir metot kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Teorem3.4

$(V,\ \mu,\ \vartheta,*,\Diamond)$ bir SFNU ve $x=(x_k)$ da terimleri V vektör uzayına ait olan bir dizi olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

a)x, (μ,ϑ) sezgisel fuzzy normuna göre bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

b) $\delta\{K\}=1$ ve $\{x_{k_n}\}_{n\in N}$ alt dizisi (μ,ϑ) sezgisel fuzzy normuna göre bir Cauchy dizisi olacak biçimde doğal sayıların artan bir $K=\{k_n\}_{n\in N}$ indis dizisi mevcuttur.

4.SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYDALARDA İDEAL YAKINSAKLIK

Bu bölümde SBNU I-Yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve bu kavramın bazı özellikleri çalışılmıştır.

Tanım4.1

$I \subset P(N)$ aşikar olmayan bir ideal, (X, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU ve $x=(x_n)$ terimleri X uzayının elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Eğer ε > 0 ve t >0 için

$$\left\{n \in N : \mu(x_n-\xi,t) \leq 1-\varepsilon \ veya \ \vartheta(x_n-\xi,t) \geq \varepsilon\right\}$$

kümesi I idealine ait ise $x=(x_n)$ dizisi $\xi \in X$ e (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre I-yakınsaktır denir. Bu durumda ξ elemanına, (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre I-limiti denir ve $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim x_n = \xi$ ile gösterilir.

Örnek 4.1

(i) I ailesi I={A⊂ *N: A sonlu bir küme*} olarak alınırsa bu durumda I, N üzerinde bir uygun ideal ve karşılık gelen I-yakınsaklığının, (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre yakınsaklık ile çakışır.

(ii) I ailesi I={A$\subset N$: $\delta(A)=0$} olarak alınırsa bu durumda I, N üzerinde bir uygun ideal ve karşılık gelen I-yakınsaklık, SBNU da istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

Teorem 3.1 yardımıyla aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.1

(X, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU ve $x=(x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Bu durumda her bir ε > 0 ve t >0 için aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

i) $I_{(\mu,\vartheta)}-\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$;

ii) $\{n\in N:\mu(x_n-\xi,t)\le 1-\varepsilon\}\in I$ ve $\{n\in N:\vartheta(\mathrm{x_n}-\xi,\mathrm{t})\ge\varepsilon\}\in I$;

iii) $\{n\in N:\mu(x_n-\xi,t)>1-\varepsilon \text{ ve } \vartheta(x_n-\xi,t)<\varepsilon\}\in F(I)$;

iv) $\{n\in N:\mu(x_n-\xi,t)>1-\varepsilon\}\in F(I)$ ve $\{n\in N:\vartheta(\mathrm{x_n}-\xi,\mathrm{t})<\varepsilon\}\in F(I)$;

v) $I-\lim\limits_{n\to\infty}\mu(x_n-\xi,t)=1$ ve $I-\lim\limits_{n\to\infty}\vartheta(x_n-\xi,t)=0$.

İspat:

(i), (ii), (iii), (iv)ifadelerinin denkliğini ispat etmek kolaydır. Bu sebeple, sadece (ii) ve (v) ifadelerinin denkliğini ispat edeceğiz. (ii) nin sağlandığını kabul edelim.

Her ε > 0 ve t >0 için

$$\{n\in N:|\mu(x_n-\xi,t)-1|\ge\varepsilon\}=\{n\in N:\mu(\mathrm{x_n}-\xi,\mathrm{t})\ge 1+\varepsilon\}\cup\{n\in N:\mu(\mathrm{x_n}-\xi,\mathrm{t})\le 1-\varepsilon\}$$

ve $\varepsilon>0$ için

$$\{n\in N:\mu(\mathrm{x_n}-\xi,\mathrm{t})\ge 1+\varepsilon\}=\varnothing\in I$$

olduğundan (ii) ifadesi de göz önüne alındığında

$$\{n\in N:|\mu(x_n-\xi,t)-1|\ge\varepsilon\}\in I$$

elde edilir. Dolayısıyla $I-\lim_{n\to\infty}\mu(x_n-\xi,t)=1$ bulunur.

Benzer olarak, her ε > 0 ve t >0 için

$$\{n\in N:|\vartheta(x_n-\xi,t)-0|\ge\varepsilon\}=\{n\in N:\vartheta(\mathrm{x_n}-\xi,\mathrm{t})\ge\varepsilon\}\cup\{n\in N:\vartheta(\mathrm{x_n}-\xi,\mathrm{t})\le-\varepsilon\}$$

ve

$$\{n\in N:\vartheta(\mathrm{x_n}-\xi,\mathrm{t})\le-\varepsilon\}=\varnothing\in I$$

olduğundan $I-\lim_{n\to\infty}\vartheta(x_n-\xi,t)=0$ elde edilir. Ayrıca $(v)\Rightarrow(ii)$ önermesinin sağlandığı da açıktır.

Teorem 4.2

(X, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU ve $x=(x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre I- yakınsak ise bu durumda (x_n) dizisinin $I_{(\mu,\vartheta)}$-limiti tektir.

İspat:

(x_n) dizisinin $I_{(\mu,\vartheta)}-\lim_n x_n=\xi$ ve $I_{(\mu,\vartheta)}-\lim_n x_n=\eta$ olacak biçimde farklı iki $I_{(\mu,\vartheta)}$-limiti olduğunu varsayalım. $\varepsilon>0$ olsun. $r>0$ sayısını

$$(1-r)*(1-r)>1-\varepsilon \ ve\ r\Diamond r<\varepsilon \ldots(1)$$

olacak biçimde seçelim. t > 0 için

$$K_1=\{n\in N:\mu(x_n-\xi,t)\le1-r\},K_2=\{n\in N:\vartheta(x_n-\xi,t)\ge r\}$$

$$K_3=\{n\in N:\mu(x_n-\eta,t)\le 1-r\},\ K_4=\{n\in N:\vartheta(x_n-\eta,t)\ge r\}$$

ve

$$K=(K_1\cup K_3)\cap(K_2\cup K_4)$$

kümelerini tanımlayalım. $I_{(\mu,\vartheta)}-\lim_n x_n=\xi$ ve $I_{(\mu,\vartheta)}-\lim_n x_n=\eta$ olduğundan K_1,K_2,K_3,K_4 ve K kümelerinin hepsi, I idealine aittirler. Böylece K^C nin F(I) üzerinde boştan farklı bir kümedir. $m\in K^C$ olsun. Bu durumda

$$m\in K_2^C\cap K_4^C \text{ veya } m\in K_1^C\cap K_3^C$$

dir.

Durum (i). $m\in K_1^C\cap K_3^C$ olsun. Bu durumda $\mu\left(x_m-\xi,\frac{t}{2}\right)>1-r$, $\mu\left(x_m-\eta,\frac{t}{2}\right)>1-r$ olup, böylece (1) gereğince

$$\mu(\xi-\eta,t)\ge\mu\left(x_m-\xi,\frac{t}{2}\right)*\mu\left(x_m-\eta,\frac{t}{2}\right)>(1-r)*(1-r)>1-\varepsilon$$

elde edilir.

$\varepsilon>0$ keyfi seçildiğinden için, her $t>0$ için $\mu(\xi-\eta,t)=1$ bulunur. SBNU tanımı göz önüne alındığında

$$\xi-\eta=0\Rightarrow\xi=\eta$$

bulunur.

Durum (ii). $m\in K_2^C\cap K_4^C$ olsun. Bu durumda $\vartheta\left(x_m-\xi,\frac{t}{2}\right)<r$, $\vartheta\left(x_m-\eta,\frac{t}{2}\right)<r$ olup, (1) gereğince

$$\vartheta(\xi-\eta,t)<\vartheta\left(x_m-\xi,\frac{t}{2}\right)\Diamond\vartheta\left(x_m-\eta,\frac{t}{2}\right)<r\Diamond r<\varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi seçildiğinden her t > 0 için $\vartheta(\xi - \eta, t) = 0$ bulunur. SBNU tanımı göz önüne alındığında

$$\xi - \eta = 0 \Rightarrow \xi = \eta$$

bulunur.

Her iki durumdan da $\xi = \eta$ elde edildiğinden bir (x_n) dizisinin $I_{(\mu,\vartheta)}$-limitinin tek olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.3

(X, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU ve $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ de X uzayında iki dizi olsun.

i) $(\mu, \vartheta) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ ise bu durumda, $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ dir.

ii) $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ ve $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$ ise bu durumda $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = (\xi + \eta)$ dir.

iii) $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ ve α herhangi bir reel sayı ise bu durumda $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha.\xi$ dir.

İspat:

(i). $(\mu, \vartheta) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ olsun. Bu durumda her ε > 0 ve t >0 için $n \geq m$ olduğunda $\mu(x_n - \xi, t) > 1 - \varepsilon$ ve $\vartheta(x_n - \xi, t) < \varepsilon$ olacak biçimde pozitif bir m tam sayısı vardır. $A = \{n \in N : \mu(x_n - \xi, t) \leq 1 - \varepsilon \ veya \ \vartheta(x_n - \xi, t) \geq \varepsilon\}$ $\{1, 2, 3, ..., m-1\}$ kümesi tarafından kapsandığından ve I ideali bir uygun ideal olduğundan $A \in I$ dır. Böylece $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ elde edilir.

(ii). $\varepsilon > 0$ olsun. Bir $r > 0$ sayısını

$$(1-r)*(1-r) > 1-\varepsilon \ ve \ r\Diamond r < \varepsilon$$

olacak biçimde seçelim. $t > 0$ için

$$K_1 = \{n \in N : \mu(x_n - \xi, t) \leq 1-r\}, K_2 = \{n \in N : \vartheta(x_n - \xi, t) \geq r\}$$

$$K_3 = \{n \in N : \mu(x_n - \eta, t) \leq 1-r\}, K_4 = \{n \in N : \vartheta(x_n - \eta, t) \geq r\}$$

ve

$$K = (K_1 \cup K_3) \cup (K_2 \cup K_4)$$

kümelerini tanımlayalım.

$I_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ ve $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} y_n = \eta$ olduğundan $t > 0$ için K_1, K_2, K_3, K_4 ve K kümelerini hepsi I idealine aittirler. Böylece K^C kümesi F(I) üzerinde boştan farklı bir kümedir.

$$K^C \subset \{n \in N : \mu((x_n + y_n) - (\xi + \eta), t) > 1-\varepsilon \ ve \ \vartheta((x_n + y_n) - (\xi + \eta), t) < \varepsilon\}$$

olduğunu göstermeliyiz. .Bunun için $m \in K^C$ olsun.

Bu durumda

$$\mu\left(x_m - \xi, \frac{t}{2}\right) > 1-r, \mu\left(y_m - \eta, \frac{t}{2}\right) > 1-r, \vartheta\left(x_m - \xi, \frac{t}{2}\right) < r \text{ ve } \vartheta\left(y_m - \eta, \frac{t}{2}\right) < r$$

dir. Böylece

$$\mu((x_m + y_m) - (\xi + \eta), t) \geq \mu\left(x_m - \xi, \frac{t}{2}\right) * \mu\left(y_m - \eta, \frac{t}{2}\right) > (1-r)*(1-r) > 1-\varepsilon$$

ve

$$\vartheta((x_m + y_m) - (\xi + \eta), t) \leq \vartheta\left(x_m - \xi, \frac{t}{2}\right) \Diamond \mu\left(y_m - \eta, \frac{t}{2}\right) < r \Diamond r < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise

$$K^C \subset \{n \in N : \mu((x_n + y_n) - (\xi + \eta), t) > 1 - \varepsilon \ ve \ \vartheta((x_n + y_n) - (\xi + \eta), t) < \varepsilon\}$$

olduğunu gösterir. $K^C \in F(I)$ olduğundan

$$\{n \in N : \mu((x_n + y_n) - (\xi + \eta), t) > 1 - \varepsilon \ ve \ \vartheta((x_n + y_n) - (\xi + \eta), t) < \varepsilon\}$$

kümesi de F(I) ya aittir. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = (\xi + \eta)$ bulunur.

(iii). Durum -(i). Eğer $\alpha = 0$ ise bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için

$\mu(0x_n - 0\xi, t) = \mu(0, t) = 1 > 1 - \varepsilon$ ve $\vartheta(0x_n - 0\xi, t) = \vartheta(0, t) = 0 < \varepsilon$

dır. Bu ise $(\mu, \vartheta) - \lim_{n\to\infty} 0x_n = \theta$ olduğunu gösterir. Böylece (i) şıkkı gereğince $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} 0x_n = \theta$ elde edilir.

Durum (ii) $\alpha \neq 0$ olsun. $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$

$$A = \{n \in N : \mu(x_n - \xi, t) > 1 - \varepsilon \ \ ve \ \vartheta(x_n - \xi, t) < \varepsilon\} \in F(I) \ldots(2)$$

dır. İspat için, $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için

$$A \subset \{n \in N : \mu(x_n - \xi, t) > 1 - \varepsilon \ \ ve \ \vartheta(x_n - \xi, t) < \varepsilon\}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için $m \in A$ olsun. Bu durumda

$$\mu(x_n - \xi, t) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \vartheta(x_n - \xi, t) < \varepsilon$$

dur. Şimdi

$$\begin{aligned} \mu(\alpha x_n - \alpha\xi, t) = \mu\left((x_m - \xi), \frac{t}{|\alpha|}\right) &\geq \mu((x_m - \xi), t) * \mu\left(0, \frac{t}{|\alpha|} - t\right) \\ &= \mu((x_m - \xi), t) * 1 \\ &= \mu((x_m - \xi), t) > 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

ve

$$\vartheta(\alpha x_n - \alpha\xi, t) = \vartheta\left((x_m - \xi), \frac{t}{|\alpha|}\right) \le \vartheta((x_m - \xi), t) \Diamond \vartheta\left(0, \frac{t}{|\alpha|} - t\right)$$
$$= \vartheta((x_m - \xi), t) \Diamond 0$$
$$= \vartheta((x_m - \xi), t) < \varepsilon$$

Dur. Dolayısıyla $A \subset \{n \in N : \mu(\alpha x_n - \alpha\xi, t) > 1 - \varepsilon \ \ ve \ \vartheta(x_n - \xi, t) < \varepsilon\}$ bulunur (2) ifadesi ve süzgeç tanımı göz önüne alındığında $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim_n \alpha x_n = \alpha\xi$ elde edilir.

Sıradaki teoremi vermeden önce aşağıdakileri hatırlatalım. (X, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU olsun. X merkezli ve $0 < \varepsilon < 1$ yarı çaplı bir $B(x, \varepsilon, t)$ açık yuvarı $t > 0$ için

$$B(x, \varepsilon, t) = \{y \in X : \mu(x - y, t) > 1 - \varepsilon \ \ ve \ \vartheta(x - y, t) < \varepsilon\}$$

biçimdedir.

A, X in bir alt kümesi olmak üzere her $x \in A$ için $\mu(x, t) > 1 - \varepsilon \ ve \ \vartheta(x, t) < \varepsilon$ olacak biçimde $t > 0$ ve $0 < \varepsilon < 1$ sayıları var ise A ya IF-sınırlı adı verilir.

(X, μ, ϑ, ∗, ◊)bir SBNU olmak üzere tüm IF-sınırlı dizilerin uzayı $\ell^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$ ile, tüm IF-sınırlı ve I-yakınsak dizilerin uzayı ise $I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$ ile gösterilir.

Teorem 4.4

(X, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU olsun. Bu durumda $I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$, $\ell^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$ uzayının kapalı bir lineer uzayıdır.

İspat:

Teorem 3.3'ten gereğince $I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$ uzayının $\ell^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$ in bir alt uzayı olduğu açıktır. Bu taktirde teoremin ispatını tamamlamak için $I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$ uzayının kapalı olduğunu göstermeliyiz. $I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$ in kapanışı $\overline{I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)}$ olmak üzere $I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X) \subset \overline{I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)}$ olduğundan $\overline{I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)} \subset I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$ olduğunu ispatlamalıyız. Bunun için $x \in \overline{I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)}$ olsun. Bu durumda x merkezli her $B(x,r,t)$ açık yuvarı için $B(x,r,t) \cap I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X) \neq \emptyset$ dir. $y \in B(x,r,t) \cap I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$ olsun. $t > 0$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun.

Bir $r \in (0,1)$ sayısını

$$(1-r)*(1-r) > 1-\varepsilon \ ve \ r \Diamond r < \varepsilon$$

olacak biçimde seçelim. $y \in B(x,r,t) \cap I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$ olduğundan $K \in F(I)$ ve her $n \in K$ için $\mu\left(x_n - y_n, \frac{t}{2}\right) > 1-r$, $\vartheta\left(x_n - y_n, \frac{t}{2}\right) < r$, $\mu\left(y_n, \frac{t}{2}\right) > 1-r$ ve $\vartheta\left(y_n, \frac{t}{2}\right) < r$ olacak biçimde doğal sayıların bir K alt kümesi mevcuttur.

Bu durumda her $n \in K$ için

$$\mu(x_n,t) = \mu(x_n - y_n + y_n, t) \geq \mu\left(x_n - y_n, \frac{t}{2}\right) * \mu\left(y_n, \frac{t}{2}\right) > (1-r)*(1-r) > 1-\varepsilon$$

ve

$$\vartheta(x_n,t) = \vartheta(x_n - y_n + y_n, t) \leq \vartheta\left(x_n - y_n, \frac{t}{2}\right) \Diamond \mu\left(y_n, \frac{t}{2}\right) < r \Diamond r < \varepsilon$$

dir. Böylece

$$K \subset \{n \in N : \mu(x_n,t) > 1-\varepsilon \ \ ve \ \vartheta(x_n,t) < \varepsilon\}$$

bulunur. $K \in F(I)$ olduğundan $\{n \in N : \mu(x_n,t) > 1-\varepsilon \ \ ve \ \vartheta(x_n,t) < \varepsilon\} \in F(I)$ dır.

Dolayısıyla $x \in I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(X)$ elde edilir.

4.1.Sezgisel Bulanık Normlu Uzayda I^*-Yakınsaklık

Bu bölümde, (X, μ, ϑ, $*,\lozenge$) sezgisel bulanık normlu uzayında I^* yakınsaklık kavramı tanıtılmıştır.

Tanım 4.1.1

(X, μ, ϑ, $*,\lozenge$) bir SBNU ve $x=(x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $K \in F(I)$ ve $(\mu,\vartheta)-\lim_{n\to\infty} x_{k_n}=\xi$ olacak biçimde doğal sayıların bir $K=\{k_1,k_2,...: k_1<k_2<...\}$ alt kümesi var ise $x=(x_n)$ dizisine $\xi \in X$ 'e (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre I^*-yakınsaktır denir. ξ elemanına, (x_n) dizisinin (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre I^*-limiti denir ve $I^*_{(\mu,\vartheta)}-\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.1

(X, μ, ϑ, $*,\lozenge$) bir SBNU ve $x=(x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. $I^*_{(\mu,\vartheta)}-\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$ ise bu durumda $I_{(\mu,\vartheta)}-\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$ dir.

İspat:

$I^{*}_{(\mu,\vartheta)}-\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$ olsun. Bu durumda $K\in F(I)$ ve $(\mu,\vartheta)-\lim_{n\to\infty} x_{k_n}=\xi$ olacak biçimde bir bir $K=\{k_1,k_2,...:k_1<k_2<...\}\subset N$ alt kümesi vardır. Bu durumda her $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için

$n\geq m$ olduğunda $\mu\left(x_{k_n}-\xi,t\right)>1-\varepsilon$ *ve* $\vartheta\left(x_{k_n}-\xi,t\right)<\varepsilon$ olacak biçimde pozitif bir m tam sayısı vardır.

$$\left\{k_n\in K:\mu\left(x_{k_n}-\xi,t\right)\leq 1-\varepsilon\ \ ve\ \vartheta\left(x_{k_n}-\xi,t\right)\geq\varepsilon\right\}\subset\{k_1,k_2,...,k_{m-1}\}$$

ve I deali uygun ideal olduğundan

$$\left\{k_n\in K:\mu\left(x_{k_n}-\xi,t\right)\leq 1-\varepsilon\ \ veya\ \vartheta\left(x_{k_n}-\xi,t\right)\geq\varepsilon\right\}\in I$$

dır. Aynı zamanda $K\in F(I)$ olduğundan $F(I)$ süzgecinin tanımı gereğince $K=N-H$ olacak biçimde $H\in I$ kümesi vardır. Dolayısıyla

$$\left\{n\in N:\mu\left(x_n-\xi,t\right)\leq 1-\varepsilon\ \ veya\ \vartheta\left(x_n-\xi,t\right)\geq\varepsilon\right\}\subset H\cup\{k_1,k_2,...,k_{m-1}\}$$

bulunur. Sağ taraftaki küme I idealine ait olduğundan

$$\left\{n\in N:\mu\left(x_n-\xi,t\right)\leq 1-\varepsilon\ \ veya\ \vartheta\left(x_n-\xi,t\right)\geq\varepsilon\right\}.$$

kümeisde I idealine aittir. Bu durum her $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için sağlandığından $I_{(\mu,\vartheta)}-\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$ bulunur.

Teorem 4.1'in tersinin genelde doğru olmadığını bir örnek ilegösterelim.

Örnek 4.1.1

$\left(R,|\cdot|\right)$ alışılmış normu ile birlikte reel sayılar uzayı olmak üzere her $a,b\in[0,1]$ için $a*b=ab$, $a\Diamond b=\min\{a+b,1\}$ olsun. $x\in R$ *ve her* $t>0$ için

$$\mu_0(x,t)=\frac{t}{t+|x|} \; ve \; \vartheta_0(x,t)=\frac{|x|}{t+|x|}$$

olarak alalım. Bu durumda (R, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU dır.

Her bir i indisi için N_i sonsuz bir küme ve $i\neq j$ *için* $N_i\cap N_j=\varnothing$ olacak biçimde N doğal sayılar kümesinin bir ayrışımı $N=\bigcup_{\infty}^{u} i=1$ olsun.

$$I=\left\{A\subset N : A\subset\bigcup_{i=1}^{p}N_i, \text{bazı sonlu p pozitif tam sayısı için}\right\}$$

olarak alınırsa bu durumda I sınıfı N üzerinde bir aşikar olmayan uygun idealdir. Şimdi bir $x=(x_n)$ dizisini $n\in N$ için

$$x_n=\frac{1}{i},\; i=1,2,3,...$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda Şimdi bir $n\to\infty$ *için* $\mu_0(x,t)=\frac{t}{t+|x|}\to 1$ ve $\vartheta_0(x,t)=\frac{|x|}{t+|x|}\to 0$ dır. Dolayısıyla Teorem 4.1 den $I_{(\mu_0,\vartheta_0)}-\lim_{n\to\infty}x_n=0$ dır.

Şimdi $I^*_{(\mu,\vartheta)}-\lim_{n\to\infty}x_n=0$ eşitliğinin sağlanmadığını gösterelim. Bunun için $I^*_{(\mu,\vartheta)}-\lim_{n\to\infty}x_n=0$ olduğunu varsayalım . I^* yakınsaklık tanımı gereğince $K\in F(I)$ ve

$(\mu_0,\vartheta_0)-\lim_{n\to\infty}x_{k_n}=0$ olacak biçimde bir $K=\{k_1,k_2,...: k_1<k_2<...\}\subset N$ alt kümesi vardır. $K\in F(I)$ olduğundan F(I) süzgecinin tanımı gereğince $K=N-H$ olacak biçimde bir $H\in I$ kümesi vardır.

Bu durumda $H \subset \bigcup_{p}^{u} i = 1$ olacak biçimde bir pozitif p tam sayısı vardır. Böylece $N_{p+1} \subset K$ ve sonsuz çoklukta $k_i \in K$ elemanları için $x_{k_i} = \dfrac{1}{p+1}$ dir. Bu ise $(\mu_0, \vartheta_0) - \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $I^*_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ sağlanmaz.

Teorem 4.1.2

(X, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU ve I ideali (AP) şartını sağlasın. $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olmak üzere $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ ise $I^*_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ dir.

İspat:

$I_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için

$\{n \in N : \mu(x_n - \xi, t) \le 1 - \varepsilon \ \ veya \ \ \vartheta(x_n - \xi, t) \ge \varepsilon\} \in I$

dir. $k \in N \ ve \ t > 0$ için

$$A_k = \left\{ n \in N : 1 - \frac{1}{k} \le \mu(x_n - \xi, t) < 1 - \frac{1}{k+1} \ veya \ t.\frac{1}{k+1} < \vartheta(x_n - \xi, t) \le \frac{1}{k} \right\}$$

kümesini tanımlayalım. $\{A_1, A_2, ...\}$ ailesinin I idealine ait sayılabilir ve ikişer ikişer ayrık ailesi olduğu açıktır. Böylece (AP) şartı gereğince, her $i \in N$ için $A_i \Delta B_i$ bir sonlu küme ve $B = U_{\infty}^{U} i = 1$ olacak biçimde I idealine ait sayılabilir bir $\{B_1, B_2, ...\}$ kümeler ailesi vardır. $B \in I$ olduğundan F(I) süzgecinin tamamından $K = N - B$ olacak biçimde F(I) sınıfında bir K kümesi vardır. Teoremi ispatlamak için $(x_n)_{n\in K}$ alt dizisinin ξ ye (μ, ϑ) sezgisel bulanık normuna göre yakınsak olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için $\eta > 0$ ve $t > 0$ olsun. Pozitif bir q tam sayısını $\frac{1}{q} < \eta$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda

$$\{n \in N : \mu(x_n - \xi, t) \leq 1 - \eta \ \ veya \ \vartheta(x_n - \xi, t) \geq \eta\}$$

$$\subset \left\{n \in N : \mu(x_n - \xi, t) \leq 1 - \frac{1}{q} \ veya \ \vartheta(x_n - \xi, t) \geq \frac{1}{q}\right\}$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^{q+1} A_i$$

dir. Her $i = 1, 2, 3, ..., q+1$ için $A_i \Delta B_i$ sonlu küme olduğundan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{q+1} B_i\right) \cap \{n \in N : n \geq n_0\} = \left(\bigcup_{i=1}^{q+1} A_i\right) \cap \{n \in N : n \geq n_0\}$$

olacak biçimde pozitif bir n_0 tam sayısı vardır. $n > n_0$ ve $n \in K$ ise $n \notin B$ dir. Böylece $n \notin \bigcup_{i=1}^{q+1} B_i$ ve dolayısıyla $n \notin U_{i=1}^{q+1} A_i$ dir. Buradan her $n \geq n_0$ ve $n \in K$ için, $\mu(x_n - \xi, t) > 1 - \eta$ ve $\vartheta(x_n - \xi, t) < \eta$ elde edilir. Bu durum her $\eta > 0$ ve $t > 0$ için $I^*_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ bulunur.

Teorem 4.1.3

(X, μ, ϑ, $*, \Diamond$) bir SBNU olsun. Bu durumda X uzayının herhangi bir $x = (x_n)$ dizisi için aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) $I^*_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$

ii) $\theta, X'in$ sıfır(birim) elemanı olmak üzere X uzayında $x = y + z$, $(\mu, \vartheta) - \lim_{n\to\infty} x = \xi$ ve $\{n \in N : z_n \neq \theta\} \in I$ olacak biçimde $y = (y_n)$ ve $z = (z_n)$ dizileri vardır.

İspat:

(i) şıkkının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$K \in F(I)$ ve $t(\mu,\vartheta)-\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \xi \ldots(3)$

olacak biçimde doğal sayıların $K=\{k_1,k_2,...:k_1<k_2<...\}$ alt kümesi vardır. $y=(y_n)$ ve $z=(z_n)$ dizilerini

$$y_n = \begin{cases} x_n & ; n \in K \\ \xi & ; n \in K^C \end{cases}$$

ve her $n \in N$ için $z_n=(x_n)-(y_n)$ biçiminde tanımlayalım. $n \in K^C$ ve her $\varepsilon>0, t>0$ için $\mu(y_n-\xi,t)=1\geq 1-\varepsilon$ ve $\vartheta(y_n-\xi,t)=0<\varepsilon$ dur. Bu ise (3) ifadesi ile birlikte $(\mu,\vartheta)-\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\xi$ olduğunu gösterir. $\{n\in N: z_n \neq \theta\} \subset K^C$ olduğundan $\{n\in N: z_n\neq\theta\}\in I$ dır.

(ii) şıkkının sağlandığını kabul edelim. $K=\{n\in N: z_n=\theta\}$ olsun. Açıkça $K\in F(I)$ ve dolayısıyla sınırsız kümedir. (aksi durumda I idealine ait olurdu). $K=\{k_1,k_2,...:k_1<k_2<...\}$ olsun. $x_{k_n}=y_{k_n}$ ve $(\mu,\vartheta)-\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\xi$ olduğundan $(\mu,\vartheta)-\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}=\xi$ dır. Bu ise $I^*_{(\mu,\vartheta)}-\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.4

(X, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU olsun. $I^{*,\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x)$, tüm sınırlı ve I^*-yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere $\overline{I^{*,\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x)}=I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x)$ dir.

İspat:

$I^{*,\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x) \subset I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x)$ ve Teorem 4.4 gereğince $I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x)$, $\ell^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x)$ uzayının kapalı bir alt uzayı olduğundan $\overline{I^{*,\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x)} \subset I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x)$ dir. Şimdi $I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x) \subset \overline{I^{*,\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x)}$ olduğunu ispatlamalıyız. Bunu ispat etmek için, her $y \in I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x)$ ve $0<\varepsilon<1$ için $I^{*,\infty}_{(\mu,\vartheta)} \cap B(y,\varepsilon,t) \neq \varnothing$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. $y \in I^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x)$ olduğundan $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} y_n = \xi$ olsun. $r \in (0,\varepsilon)$ keyfi seçilsin. $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} y_n = \xi$ olduğundan

$$A = \{ n \in N : \mu(y_n - \xi, t) \le 1 - r \ \ ve \ \ \vartheta(y_n - \xi, t) \ge r \} \in I$$

ve

$$A^C = \{ n \in N : \mu(y_n - \xi, t) > 1 - r \ \ ve \ \ \vartheta(y_n - \xi, t) < r \} \in F(I)$$

dır. Bir $x = (x_n)$ dizisini

$$x_n = \begin{cases} \xi & , n \in A^C \\ y_n & , n \in A \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım.

Bu durumda $x \in \ell^{\infty}_{(\mu,\vartheta)}(x), I^{*}_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ ve $x \in B(y,\varepsilon,t)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $I^{*,\infty}_{(\mu,\vartheta)} \cap B(y,\varepsilon,t) \neq \varnothing$ elde edilir.

4.2.Sezgisel Bulanık Normlu Uzayda I Ve I^*-Cauchy Dizileri

Bu bölümde, (X, μ, ϑ, $*,\Diamond$) sezgisel bulanık normlu uzayında I-Cauchy ve I^*-Cauchy kavramları tanıtılmış ve çalışılmıştır.

Tanım 4.2.1

(X, μ, ϑ, $*,\Diamond$) bir SBNU ve $x=(x_n)$ de terimleri X uzayının elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için

$$\{n\in N:\mu(x_n-x_m,t)\le 1-\varepsilon \;\; ve \;\; \vartheta(x_n-x_m,t)\ge\varepsilon\}\in I$$

olacak biçimde pozitif bir m sayısı varsa $x=(x_n)$ dizisine (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre I-Cauchy veya $I_{(\mu,\vartheta)}$-Cauchy dizisi denir.

Tanım 4.2.2

(X, μ, ϑ, $*,\Diamond$) bir SBNU ve $x=(x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $K\in F(I)$ ve (x_{k_n}) alt dizisi (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre bir Cauchy dizisi olacak biçimde bir $K=\{k_1,k_2,...:k_1<k_2<...\}\subset N$ alt kümesi varsa $x=(x_n)$ dizisine (μ,ϑ) sezgisel bulanık normuna göre I^*-Cauchy veya $I^*_{(\mu,\vartheta)}$- Cauchy dizisidir.

Teorem 4.2.2

(X, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisi $I^*_{(\mu,\vartheta)}$-Cauchy dizisi ise aynı zamanda $I_{(\mu,\vartheta)}$-Cauchy dizisidir.

Teorem 4.2.3

(X, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU ve I ideali (AP) koşulunu sağlasın. Eğer $x = (x_n)$ dizisi X uzayında bir $I_{(\mu,\vartheta)}$-Cauchy dizisi ise bu durumda $I^*_{(\mu,\vartheta)}$-Cauchy dizisidir.

(X, μ, ϑ, ∗, ◊) sezgisel bulanık normlu bir uzayında, $I_{(\mu,\vartheta)}$-yakınsak dizilerin $I_{(\mu,\vartheta)}$-Cauchy dizisi oldukları aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.2.4

(X, μ, ϑ, ∗, ◊) bir SBNU olsun. $x = (x_n)$ dizisi X uzayında $I_{(\mu,\vartheta)}$-yakınsak bir dizi ise bu durumda (x_n) dizisi $I_{(\mu,\vartheta)}$-Cauchy dizisidir.

İspat:

$x = (x_n)$ dizisinin $I_{(\mu,\vartheta)}$-yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ olacak biçimde $\xi \in X$ vardır. $\varepsilon > 0$ olsun. Bir $r > 0$ sayısını

$$(1-r)*(1-r) > 1-\varepsilon \text{ ve } r \Diamond r < \varepsilon$$

olacak biçimde seçelim. $I_{(\mu,\vartheta)} - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ olduğundan her $t > 0$ için

$$A=\left\{n\in N:\mu\left(x_n-\xi,t\right)\leq 1-r \;\; ve \;\; \vartheta\left(x_n-\xi,t\right)\geq r\right\}\in I$$

dır. Bu ise

$$\varnothing\neq A^C=\left\{n\in N:\mu\left(x_n-\xi,t\right)>1-r \;\; ve \;\; \vartheta\left(x_n-\xi,t\right)<r\right\}\in F\left(I\right)$$

olmasını gerektirir. $m\in A^C$ olsun. O zaman her $t>0$ için $\mu\left(x_n-\xi,t\right)>1-r$ ve $\vartheta\left(x_n-\xi,t\right)<r$ dir.

$t\geq 0$ için

$$B=\left\{n\in N:\mu\left(x_n-x_m,t\right)\leq 1-\varepsilon \;\; ya\ da \;\; \vartheta\left(x_n-x_m,t\right)\geq \varepsilon\right\}$$

olarak alınırsa teoremi ispatlamak için B kümesini A kümesi tarafından kapsandığını ispat etmek yeterli olacaktır. $n\in B$ olsun. Bu durumda her $t\geq 0$ için $\mu\left(x_n-x_m,t\right)\leq 1-\varepsilon$ veya $\vartheta\left(x_n-x_m,t\right)\geq\varepsilon$ dur.

Durum (i). Eğer $\mu\left(x_n-x_m,t\right)\leq 1-\varepsilon$ ise bu durumda $\mu\left(x_n-\xi,\frac{t}{2}\right)\leq -r+1$ ve dolayısıyla $n\in A$ dır.

Aksi durumda, yani ; $\mu\left(x_n-\xi,\frac{t}{2}\right)>1-r$ olduğunda

$$1-\varepsilon>\mu\left(x_n-x_m,t\right)\geq\mu\left(x_n-\xi,\frac{t}{2}\right)*\mu\left(x_m-\xi,\frac{t}{2}\right)>\left(1-r\right)*\left(1-r\right)>1-\varepsilon$$

elde edilir ki bu mümkün değildir. Böylece $B\subset A$ dır.

Durum (ii). Eğer $\vartheta\left(x_n-x_m,t\right)\geq\varepsilon$ ise bu durumda $\vartheta\left(x_n-\xi,\frac{t}{2}\right)\geq r$ ve dolaysıyla $n\in A$ dır.

Aksi durumda, yani; Eğer $\vartheta\left(x_n-\xi,\frac{t}{2}\right)<r$ olduğunda

$$\varepsilon\leq\vartheta\left(x_n-x_m,t\right)\leq\vartheta\left(x_n-\xi,\frac{t}{2}\right)\Diamond\vartheta\left(x_m-\xi,\frac{t}{2}\right)<r\Diamond r<\varepsilon$$

elde edilir ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla $B \subset A$ elde edilir.

Böylece tüm durumlar $B \subset A$ bulunur. (4) gereğince $B \in I$ dır. Bu (x_n) dizisinin $I_{(\mu,\vartheta)}$ -Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.5

(X, μ, ϑ, $*, \Diamond$) bir SBNU ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi $I^*_{(\mu,\vartheta)}$ -yakınsak bir dizi ise bu durumda (x_n) dizisi $I^*_{(\mu,\vartheta)}$ -Cauchy dizisidir.

Kaynaklar

[1]. Atanassov, K. T., 1983, Intuitionistic fuzzy sets, VII ITKR Session, Sofia (deposed in Central Science – Technical Library of Bulgarian Academy of Science, 1697/84) (in Bulgarian).

[2]. Atanassov, K. T., 1986, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy sets and systems, 20 (-, No 1, 87-96.

[3]. Atanassov, K. T., 1989, More on Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy sets and systems,33, No 1, 37-45.

[4]. Atanassov, K. T., 1999, Intuitionistic fuzzy sets: Theory and Applications, Studies in fuzziness and soft computing, Vol. 35, Heildelberg, New York, Physica – Verl., .

[5]. Coker, D., 1997,An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, 88 , No 1, 81-89.

[6]. Coker, D. and Demirci, M., 1995, On intuitionistic fuzzy points, Notes IFS, 1 , No. 2, 79-84.

[7]. Coker, D. and Demirci, M., 1996,An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces in Sostaks sense, BUSEFAL, 67, 67-76.

[8]. Coker, D. and Demirci, M., 1996,On fuzzy inclusion in the intuitionistic sense, J. Fuzzy Math., 4, No. 3, 701-714.

[9]. Coker, D. and Es, A. H., 1995, On fuzzy compactness in intuitionistic fuzzy topological spaces, J. Fuzzy Math., 3 , No. 4, 899-909.10.

[10]. Dems, K., 2004/2005, On I – Cauchy sequences, Real Analysis Exchange, Vol. 30(1), 123-128

[11]. Deschrijver, G. and Kerre, E., 2003, On the cartesian product on intuitionistic fuzzy sets, J. Fuzzy Math., 11 , No. 3, 537-547.

[12]. Fast, H., 1951, Surla convergence statistique, colloq. Math., 2 , 241-244.

[13]. Fridy, J. A., 1985, On statistical convergence, Analysis, 5, No. 4, 301-313.

[14]. Gürgal, M., 2006, On ideal convergent sequences in 2-normed spaces, Thai journal of Mathematics, Vol. 4, No. 1, 85-91.

[15]. Karakus, S., Feb 2008, Demirci K., Duman O., Statistical convergence on Intuitionistic fuzzy normed spaces, Chaos Solitons and Fractals, Vol. 35, Issue 4, 763-769.

[16]. Kostyrko, P., Salat, T. and Wilczynski, W., 2000/2001, I-convergence, Real Analysis Exchange, Vol. 26, 669-686.

[17]. Kumar, V., 2007, On – convergence of double sequences, Mathematical Communications, 12, 171-181.

[18]. Nabiev, A., Pehlivan, S. and Gürgal, M., 2007, On I – Cauchy sequences, Taiwanese journal of mathematics, Vol. 11, No. 2, 569-576.

[19]. El Naschie, M. S., 2006, On the verifications of heterotic strings theory and theory, Chaos, Solitons and Fractal, 22 , 397-407.

[20]. Saadati, R. and Park, J. H., 2006, Intuitionistic fuzzy topological spaces sets, Chaos Solitons and Fractal, 22, 331-344.

[21]. Saadati, R. and J. Park, H., 2006, Intuitionistic Fuzzy Euclidian Normed Spaces, Communications Mathematical Analysis, Vol. 1, No. 2 (2006), 85-90.

[22]. Salat, T., 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 30 , 139-150.

[23]. Schoenberg, I. J., 1959, The integrability of certain function and related summability mthods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.

[24]. Schweizer, B., Sklar, A., 1960, Statistical metric spaces, Pacific Journal of Mathematics, 10 , 314-344.

[25]. Zadeh, L. A., Fuzzy sets, 1965, Iformation control, 10, 338-353.