T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLANDIRILMIŞ ESNEK KÜMELER VE BİJEKTİF ESNEK KARAR SİSTEMİ

Hakan AYKUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2020

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLANDIRILMIŞ ESNEK KÜMELER VE BİJEKTİF ESNEK KARAR SİSTEMİ

Hakan AYKUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

KIRŞEHİR / 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hakan AYKUT

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-nin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında, araştırılmasında ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım ve bu bilgilendirmeleriyle bana her zaman yol gösteren sayın hocam Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans eğitimime başladığım günden itibaren bana desteklerini esirgemeyen Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik Bölümü tüm öğretim üyelerine teşekkür ederim. Hayatımın her noktasında maddi ve manevi anlamda yanımda olan ve bugüne kadar hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan çok değerli aileme ve sevdiklerime, sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz, 2020 Hakan AYKUT

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

(F,A), F_A	: Esnek küme
$[F,A]$	: Esnek matris
$\wedge$	: Ve çarpım işlemi
$\vee$	: Veya çarpım işlemi
$\widetilde{\cup}$	: Esnek birleşim işlemi
$\cup_R$	: Kısıtlanmış esnek birleşim işlemi
$\widetilde{\cap}$	: Esnek kesişim işlemi
$\sqcap_\varepsilon$	: Genişletilmiş esnek kesişim işlemi
$\sim_R$	: Esnek kısıtlanmış fark işlemi
$(F,A)^c$, (F^c,A)	: Esnek kümenin tümleyeni
Φ_A	: Esnek boş küme
$\widetilde{\subseteq}$	: Esnek alt küme
$S(U)$	: U başlangıç evrensel kümesi üzerindeki bütün esnek kümeler
$BS(U)$	: U başlangıç evrensel kümesi üzerindeki bütün bijektif esnek kümeler
$SM(U)$	: U başlangıç evrensel kümesi üzerindeki bütün esnek matrisler
$BSM(U)$	: U başlangıç evrensel kümesi üzerindeki bütün bijektif esnek matrisler
$\curlywedge$	: Genelleştirilmiş Ve-Çarpımı
$\curlyvee$	: Genelleştirilmiş Veya-Çarpımı
$\bar{\curlywedge}$	: Genelleştirilmiş Ve-Değil-Çarpımı
$\underline{\curlyvee}$	: Genelleştirilmiş Veya-Değil-Çarpımı
$v_i([a_{ij}])$	: $[a_{ij}]$ matrisinin i.satırındaki değerlerin toplamı
$\|a_{ij}\|_q$	: $[a_{ij}]$ matrisinin q.sütunu
$\underline{\curlywedge}$	: Kısıtlandırılmış-Ve Çarpımı
$\widetilde{\curlywedge}$	: Relax-Ve Çarpımı
M_r	: Max-satır fonksiyonu
d_f	: Yoğunluk ölçüm fonksiyonu
f_L	: Dilsel değerli fonksiyon
$\Re$	: Çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi yoğunluğu
η_r	: r. sütun için karar bileşeninin negatif etki oranı
σ_r	: r. sütun için karar bileşeninin pozitif etki oranı
P_r	: r.sütununun belirleyici etki oranı
$(F,A)^{\supseteq\alpha}$	: (F,A)'nın *üst* α- *içeren* kümesi
$(F,A)^{\subseteq\alpha}$	: (F,A)'nın *alt* α- *içeren* kümesi
$(F,A)^{\cap\alpha}$	: (F,A)'nın α-*kesişim* kümesi
$(F,A)^{\cup\alpha}$	: (F,A)'nın α-*birleşim* kümesi
$[a_{ij}]^{\cap\alpha}$	: $[a_{ij}]$'nin α-*kesişim esnek matris*i
e_G	: G grubunun birim elemanı
$<\alpha>_\cap \widetilde{\leqq} G$	: G'nin α- tarafından üretilen esnek kesişim alt grubu

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SINIRLANDIRILMIŞ ESNEK KÜMELER VE BİJEKTİF ESNEK KARAR SİSTEMİ

Hakan AYKUT

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, esnek küme hakkında literatürde yapılmış olan çalışmalar verilmiştir. İkinci bölümde, ileriki bölümlerde gerekli olan temel tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, esnek kümelerin sınırlandırılmasını sağlayan dört farklı α-*kümeler* ve özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, esnek kesişim grubu üzerinde α-*kesişimin* bir uygulaması yapılmıştır. α tarafından üretilen bir grubun esnek kesişim-altgrubu tanıtılmış, özellikleri incelenmiş ve örneklendirilmiştir. Esnek kesişim alt grupların üreteçleri ile ilgili bazı özellikler irdelenmiştir. Beşinci bölümde, esnek kümelerin özel bir hali olan bijektif esnek kümeler ve işlemleri ele alınmıştır. Altıncı bölümde, bijektif esnek matrisler yardımıyla elde edilmiş bir karar verme metodu tanıtılmıştır. Yedinci bölümde, dilsel küme ve dilsel değerli fonksiyon kavramları tanıtılarak çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi inşa edilmiştir. Son bölümde, bu karar sisteminin bir uygulaması yapılmıştır.

Temmuz 2020, 77 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Esnek Küme, Esnek Matris, Bijektif Esnek Matris, Karar Verme Problemleri, Sınırlandırılmış Esnek Kümeler, α-kümeler, Esnek Kesişim Grubu, Bir Grubun Üreteçleri

ABSTRACT

MSc THESIS

RESTRICTED SOFT SETS AND BIJECTIVE SOFT DECISION SYSTEM

Hakan AYKUT

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

This thesis consists of eight chapters. In first chapter, the studies about the soft sets in the literature are given. In the second chapter, the basic definitions in the following chapters are mentioned. In third chapter, four different restrictions, obtained by using a non-empty subset α of U are examined, in detail. An application of $\alpha - intersection$ sets over a soft intersection groups is given in the fourth. Here, the novel concept of the soft int-subgroup generated by $\alpha \subseteq U$ of a group is introduced and some properties are studied. Some related properties about generators of soft int-subgroups are investigated and illustrated by several examples. In fifth chapter, the bijective soft sets and its operations, a special form of soft sets, is introduced. In sixth chapter, a decision making method obtained using bijective soft operations and bijective soft matrices are given. In seven chapter, the notions of linguistic set and linguistic-valued function are given. Also, multi-bijective linguistic soft decision system is built. An application of this decision system is given in the last chapter.

July 2020, 77 Pages.

Keywords: Soft Set, Soft Matrix, Bijective Soft Matrix, Decision System, Restricted Soft Sets, α-sets, Soft Int-Group, Generator of a Group

1. GİRİŞ

Güncel hayatta karşımıza çıkan problemler birçok belirsizlik içerdiğinden bunların klasik matematik teorileriyle çözülmesi zordur. Her ne kadar Olasılık Teorisi, Bulanık Küme Teorisi, Kaba Küme Teorisi, Muğlak Küme Teorisi ve Aralık Matematiği bu problemlerin çözümlenmesinde kullanışlı yaklaşımlar olsalar da bu teorilerin kendi içerisinde zorlukları vardır. 1999 yılında Molodtsov [1] tarafından ortaya atılan esnek küme teorisi, belirsizliklerin modellenmesinde kullanışlı bir matematiksel yöntemdir. Bu teori:

$\longrightarrow$ Bilgi sistemleri

$\longrightarrow$ Karar verme problemleri

$\longrightarrow$ Optimizasyon teorisi

gibi belirsizlik içeren birçok alana uygulanmıştır.

Esnek küme teorisinde nesnelerin tanımlanması için herhangi bir sınırlandırma yoktur. Dolayısıyla araştırmacılar parametreleri ihtiyaç duydukları formda seçebilirler. Bu ise karar vermeyi oldukça kolaylaştırır.

Esnek küme teorisi üzerine çalısmalar yoğun bir şekilde devam etmektedir. Aktaş ve Çağman [2, 3] makalesinde esnek küme teorisinde bazı temel yapıları verdi ve esnek grup kavramını tanımladılar. [4-8] makalelerinde yazarlar, esnek kümeler üzerinde birçok yeni işlemler tanımlayarak, esnek kümelerin cebirsel özelliklerini incelediler. Aktaş ve Çağman 'ın [2] makalesindeki çalışmalardan sonra birçok yazar esnek cebirsel yapılar ve esnek işlemler üzerinde çalışmıştır [5, 9-16]. Atagün ve Sezgin Sezer [17] esnek küme teorisini kullanarak halka, cisim ve modül cebirsel yapılarının esnek alt yapılarını tanımlamışlardır. Atagün [18] de halkaların alt kümeleri tarafından üretilen esnek alt halka kavramını tanıtmıştır.

Çağman and Enginoğlu [19], esnek kümeleri ifade etmenin etkin ve kullanışlı bir yolu olan esnek matris teorisini ortaya attılar. Daha sonra belirsizlik içeren problemleri çözebilmek için bir esnek maks-min karar verme yöntemi inşa ettiler. Esnek küme ve esnek matris teorileri birçok karar verme problemine başarıyla uygulanmıştır [5, 19-32].

Gong ve diğ. [33], alternatiflerin bağımsız parametreler kullanılarak elde edildiği problem tiplerini bijektif esnek kümeler yardımıyla ifade etmiştir. Kamacı ve diğ. [34], bu konuyla ilgili çalışmalar yapmış ve bir karar verme yöntemi oluşturmuşlardır. Bu tip problemleri çözerken, probleme uygun sınırlandırmalar yapmak çözüm sürecini kısalttığı gibi daha doğru çözüme ulaşmak için verileri netleştirir. Bu tezde (Atagün ve Kamacı, [35]) makalesindeki

α-kümeler yardımıyla verilen probleme uygun olarak esnek kümeler üzerinde sınırlandırmalar yapılmış ve (Kamacı ve diğ., [34]) makalesinde verilen yöntem geliştirilerek yeni bir karar verme yöntemi oluşturulmuştur. Bu sayede, elde edilen yeni yötemle hem litaratüre katkı sağlanması hem de tezde çözülecek karar verme yöntemi finans, sağlık, çevre, şehircilik, üretim vb. alanlara uyarlanabilir olduğundan ülkemiz menfaatlerine katkı sağlayacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlar, sonraki bölümlerde yapılan çalışmaların daha iyi anlaşılması için verilmiştir. Esnek küme kavramı Molodtsov [1] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

U bir başlangıç evrensel küme, E parametrelerin kümesi, $P(U)$ U'nun kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olsun.

Tanım 2.1. (Molodtsov, [1]) U üzerinde bir (F, A) esnek kümesi,

$$F : A \longrightarrow P(U)$$

$x \notin A$ ise $F(x) = \emptyset$ fonksiyonuyla tanımlanır. Dolayısıyla (F, A) sıralı ikililerin

$$(F, A) = \{(e_j, F(e_j)) \mid e_j \in E, F(e_j) \in P(U)\}$$

kümesi formunda da ifade edilebilir.

Gösterim 2.2. $S(U)$, U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesini belirtir.

Tanım 2.3. (Çağman ve Enginoğlu, [36]) (F, A) ve (F, B), U üzerinde esnek kümeler ve $A, B \subseteq E$ parametreler kümesi olsun. Eğer $\forall x \in E$ için $F_A(x) \subseteq F_B(x)$ ise (F, A), (F, B)'nin esnek alt kümesidir denir ve $(F, A) \tilde{\subseteq} (F, B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. (Çağman ve Enginoğlu, [36]) (F, A) ve (F, B), U üzerinde esnek kümeler ve $A, B \subseteq E$ parametreler kümesi olsun. Eğer $\forall x \in E$ için $F_A(x) = F_B(x)$ ise (F, A) ile (F, B) eşit esnek kümelerdir ve $(F, A) \tilde{=} (F, B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5. (Maji ve diğ., [6]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler olsun. "(F, A) VE (G, B)" esnek kümesi, $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B) \ni \forall (x, y) \in A \times B$ için $H(x, y) = F(x) \cap G(y)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.6. (Maji ve diğ., [6]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler olsun. "(F, A) VEYA (G, B)" esnek kümesi, $(F, A) \vee (G, B) = (H, A \times B) \ni \forall (x, y) \in A \times B$ için $H(x, y) = F(x) \cup G(y)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.7. (Maji ve diğ., [6]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler olsun. $C = A \cup B$ olmak üzere (F, A) ve (G, B)'nin esnek birleşimi (H, C), $\forall x \in C$ için

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & , x \in A \setminus B \\ G(x) & , x \in B \setminus A \\ F(x) \cup G(x) & , x \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $(F, A)\widetilde{\cup}(G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. (Ali ve diğ., [4]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. (F, A) ve (G, B)'nin kısıtlanmış birleşimi (H, C) olmak üzere $\forall x \in C = A \cap B$ için $H(x) = F(x) \cup G(x)$ şeklinde tanımlanır ve $(F, A) \cup_R (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.9. (Pei ve Miao, [7]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler olsun. (F, A) ve (G, B)'nin esnek kesişimi (H, C) olmak üzere $\forall x \in C = A \cap B$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ şeklinde tanımlanır ve $(F, A)\widetilde{\cap}(G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.10. (Ali ve diğ., [4]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler olsun. $C = A \cup B$ olmak üzere (F, A) ve (G, B)'nin genişletilmiş kesişimi (H, C), $\forall x \in C$ için ,

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & , x \in A \setminus B \\ G(x) & , x \in B \setminus A \\ F(x) \cap G(x) & , x \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $(F, A) \sqcap_\varepsilon (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.11. (Ali ve diğ., [4]) (F, A) ve (G, B), U üzerinde esnek kümeler ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. (F, A) ve (G, B)'nın kısıtlanmış farkı (H, C) olmak üzere $\forall x \in C = A \cap B$ için $H(x) = F(x) \setminus G(x)$ şeklinde tanımlanır ve $(F, A) \sim_R (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.12. (Ali ve diğ., [4]) (F, A), U üzerinde esnek küme olsun. (F, A) esnek kümesinin tümleyeni $\forall x \in A$ için $F^c(x) = U \setminus F(x)$ şeklinde tanımlanır ve $(F, A)^c = (F^c, A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.13. (Maji ve diğ., [6]) (F, A), U üzerinde esnek bir küme olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x) = \emptyset$ ise (F, A) esnek kümesine boş esnek küme denir ve Φ_A ile gösterilir.

Tanım 2.14. (Maji ve diğ., [6]) (F, A), U üzerinde esnek bir küme olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x) = U$ ise (F, A) esnek kümesine mutlak esnek küme denir.

Tanım 2.15. (Çağman ve Enginoğlu, [19]) $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $A \subseteq E$ ve (F, A), U üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ , u_i \in F(e_j) \\ 0 \ , u_i \notin F(e_j) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmak üzere;

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

matrisine U üzerinde tanımlı (F, A) esnek kümesine karşılık gelen esnek matris denir. Buna göre, bir esnek küme ile buna karşılık gelen esnek matris, karşılıklı olarak ifade edilir.

Gösterim 2.16. $SM(U)$, $S(U)$ kümesinin elemanlarına karşılık gelen tüm esnek matrislerin kümesini belirtir.

Örnek 2.17. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerin kümesi olsun. $A = \{e_1, e_3, e_5\}$ ve $F : A \longrightarrow P(U)$, $F(e_1) = \{u_1, u_3, u_4, u_6\}$, $F(e_3) = \{u_3\}$,$F(e_5) = \emptyset$ ise bu esnek küme

$$(F, A) = \{(e_1, \{u_1, u_3, u_4, u_6\}), (e_3, \{u_3\}), (e_5, \emptyset)\}$$

şeklinde yazılır. Daha sonra (F, A) esnek kümesine karşılık gelen $[a_{ij}] \in SM_{6\times5}$ esnek matrisi ise

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.18. (Çağman ve Enginoğlu, [19]) $[a_{ij}]$,$[b_{ij}] \in SM_{n\times m}$ olsun.

1. $\forall$ i,j için $a_{ij} = 0$ ise $[a_{ij}]$ matrisine sıfır esnek matris denir ve $[0]$ ile gösterilir.
2. $\forall$ i,j için $a_{ij} = 1$ ise $[a_{ij}]$ matrisine evrensel esnek matris denir ve $[1]$ ile gösterilir.
3. $\forall$ i,j için $a_{ij} \leq b_{ij}$ ise $[a_{ij}]$ matrisine $[b_{ij}]$ matrisinin esnek alt matrisi denir ve $[a_{ij}]\widetilde{\subseteq}[b_{ij}]$ ile gösterilir.
4. $\forall$ i,j için $a_{ij} = b_{ij}$ ise $[a_{ij}]$ ile $[b_{ij}]$ matrislerine esnek eşit matrisler denir ve $[a_{ij}]\widetilde{=}[b_{ij}]$ ile gösterilir.
5. $\forall$ i,j için c_{ij} =maks$\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ise $[c_{ij}]$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ esnek matrislerinin birleşimi denir ve $[c_{ij}]$=$[a_{ij}]$ $\widetilde{\cup}$ $[b_{ij}]$ ile gösterilir.
6. $\forall$ i,j için $c_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ise $[c_{ij}]$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ esnek matrislerinin kesişimi denir ve $[c_{ij}] = [a_{ij}]\widetilde{\cap}[b_{ij}]$ ile gösterilir.
7. $\forall$ i,j için $c_{ij} = 1 - a_{ij}$ ise $[c_{ij}]$ esnek matrisine $[a_{ij}]$ esnek matrisinin tümleyeni denir ve $[c_{ij}]$=$[a_{ij}]^c$ ile gösterilir.

Tanım 2.19. (Atagün ve diğ., [20]) $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $A \subseteq E$ ve A'nın kardinalitesi $|A| = m_1$ olsun. Eğer

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ , } e_j \in A \text{ ve } u_i \in F(e_j) \\ 0 \text{ , } e_j \in \text{A ve } u_i \notin F(e_j) \end{cases}$$

olacak şekildeki $[a_{ij}]$ matrisine U üzerinde (F, A) esnek kümesinin indirgenmiş esnek matrisi denir. Burada $1 \leq m_1 \leq m$ dir.
Diğer bir deyişle (F, A) esnek kümesinde $e_j \notin A$ ise $F(e_j) = \emptyset$ olduğundan, $E - A$ kümesinin parametrelerini eleyerek, (F, A) esnek kümesine karşılık gelen indirgenmiş esnek matris bulunabilir ve bu esnek matrisin tipi $n \times m_1$ olacaktır.
Eğer $A = E$ ise (F, A)'ya karşılık gelen indirgenmiş esnek matris ile (F, A)'nın esnek matrisi eşittir. Bu kısımdan itibaren esnek matrisler ile indirgenmiş esnek matrisler için farklı bir gösterim kullanılmayacaktır.

Örnek 2.20.

$$(F,A) = \{(e_1, \{u_1, u_3, u_4, u_6\}), (e_3, \{u_3\}), (e_5, \emptyset)\}$$

esnek kümesinin

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix}$$

esnek matrisini göz önüne alalım. (F,A)'nın indirgenmiş esnek matrisi $[a_{ij}] \in SM_{6\times 3}$ ve

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $|U| = n$ ve tüm esnek matrisler yerine indirgenmiş esnek matrisler alınacaktır. Ayrıca (F,A),$(F,B) \in S(U)$ olmak üzere (F,A) ve (F,B) esnek kümelerinin indirgenmiş esnek matrisleri sırasıyla $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.21. (Atagün ve diğ., [20]) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$'nın Genelleştirilmiş Ve-Çarpımı $\curlywedge$ ile gösterilir ve

$$\curlywedge : SM_{n\times m_1} \times SM_{n\times m_2} \longrightarrow SM_{n\times m_1 m_2}$$

$$([a_{ij}], [b_{ik}]) \longrightarrow [a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}] = [c_{ip}]$$

$c_{ip} = min\{a_{ij}, b_{ik}\}$ öyle ki $j = \alpha$, $p = (\alpha - 1)m_2 + k$, burada α, $p \leq \alpha m_2$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.22. (Atagün ve diğ., [20]) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$'nın Genelleştirilmiş Veya-Çarpımı $\curlyvee$ ile gösterilir ve

$$\curlyvee : SM_{n\times m_1} \times SM_{n\times m_2} \longrightarrow SM_{n\times m_1 m_2}$$

$$([a_{ij}], [b_{ik}]) \longrightarrow [a_{ij}] \curlyvee [b_{ik}] = [c_{ip}]$$

$c_{ip} = max\{a_{ij}, b_{ik}\}$ öyle ki $j = \alpha$, $p = (\alpha - 1)m_2 + k$, burada α, $p \leq \alpha m_2$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.23. (Atagün ve diğ., [20]) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$'nın Genelleştirilmiş Ve-Değil-Çarpımı $\bar{\curlywedge}$ ile gösterilir ve

$$\bar{\curlywedge} : SM_{n\times m_1} \times SM_{n\times m_2} \longrightarrow SM_{n\times m_1 m_2}$$

$$([a_{ij}], [b_{ik}]) \longrightarrow [a_{ij}]\bar{\curlywedge}[b_{ik}] = [c_{ip}]$$

$c_{ip} = min\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ öyle ki $j = \alpha, p = (\alpha - 1)m_2 + k$, burada $\alpha, p \leq \alpha m_2$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.24. (Atagün ve diğ., [20]) $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$'nın Genelleştirilmiş Veya-Değil-Çarpımı $\underline{\curlyvee}$ ile gösterilir ve

$$\underline{\curlyvee} : SM_{n\times m_1} \times SM_{n\times m_2} \longrightarrow SM_{nxm_1 m_2}$$

$$([a_{ij}], [b_{ik}]) \longrightarrow [a_{ij}]\underline{\curlyvee}[b_{ik}] = [c_{ip}]$$

$c_{ip} = max\{a_{ij}, 1 - b_{ik}\}$ öyle ki $j = \alpha, p = (\alpha - 1)m_2 + k$, burada $\alpha, p \leq \alpha m_2$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Örnek 2.25. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ ve $B = \{e_1, e_2, e_4\}$ olsun. Daha sonra,
$(F, A) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2, u_3\}), (e_3, U), (e_5, \{u_1\})\}$ ve
$(F, B) = \{(e_1, \{u_3\}), (e_2, \{u_4\}), (e_4, \{u_1, u_2, u_3\})\}$ esnek kümelerini alalım. Aşağıdaki $[a_{ij}]\in SM_{4\times 4}$ ve $[b_{ik}]\in SM_{4\times 3}$ sırasıyla (F, A) ve (F, B) esnek kümelerinin esnek matrisleridir.

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [b_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Buna göre $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin Genelleştirilmiş Ve-Çarpımı

$$[a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}] = [c_{ip}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve $[c_{ip}]$ 4×12 tipinde esnek matristir.

Teorem 2.26. (Atagün ve diğ., [20]) Genelleştirilmiş Ve-Çarpım birleşme özelliğine sahiptir. Yani, $[a_{ij}] \in SM_{n\times m_1}$, $[b_{ik}] \in SM_{n\times m_2}$ ve $[c_{il}] \in SM_{n\times m_3}$ ise

$$([a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}]) \curlywedge [c_{il}] = [a_{ij}] \curlywedge ([b_{ik}] \curlywedge [c_{il}])$$

dir.

Teorem 2.27. (Atagün ve diğ., [20]) Genelleştirilmiş Veya-Çarpım birleşme özelliğine sahiptir. Yani, $[a_{ij}] \in SM_{n\times m_1}$, $[b_{ik}] \in SM_{n\times m_2}$ ve $[c_{il}] \in SM_{n\times m_3}$ ise

$$([a_{ij}] \curlyvee [b_{ik}]) \curlyvee [c_{il}] = [a_{ij}] \curlyvee ([b_{ik}] \curlyvee [c_{il}])$$

dir.

Lemma 2.28. (Kamacı ve diğ., [34]) $[a_{ij}] \in SM_{n\times m_1}$, $[b_{ik}] \in SM_{n\times m_2}$ olsun. Bu durumda $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $min\{a_{ij}, b_{ik}\} = a_{ij}b_{ik}$ dir.

İspat. $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ esnek matrislerinin bileşenleri 0 ve 1 den ibaret olduğu için ispat görülür. ■

Gösterim 2.29. $[a_{ij}] \in SM_{n\times m}$ olsun. $[a_{ij}]$'nin i.satırındaki değerlerin toplamı $v_i([a_{ij}])$ ile gösterilir.

Teorem 2.30. (Kamacı ve diğ., [34]) $[a_{ij}] \in SM_{n\times m_1}$ ve $[b_{ik}] \in SM_{n\times m_2}$ olsun. Eğer $[a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}] = [c_{ip}]$ ise $v_i[a_{ij}]v_i[b_{ik}]$=$v_i[c_{ip}]$ dir.

İspat. $[a_{ij}] \in SM_{n\times m_1}$, $[b_{ik}] \in SM_{n\times m_2}$ ve $[c_{ip}]$=$[a_{ij}]$ $\curlywedge$ $[b_{ik}]$ olsun. $[c_{ip}] \in SM_{n\times m_1 m_2}$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
v_1([c_{ip}]) \sum_{p=1}^{m_1 m_2} c_{1p} =& c_{11} + c_{12} + \cdots + c_{1(m_1 m_2)} \\
&= \min\{a_{11}, b_{11}\} + \min\{a_{11}, b_{12}\} + \cdots + \min\{a_{11}, b_{1m_2}\} \\
&\quad + \min\{a_{12}, b_{11}\} + \min\{a_{12}, b_{12}\} + \ldots + \min\{a_{12}, b_{1m_2}\} \\
&\quad + \ldots + \min\{a_{1m_1}, b_{11}\} + \min\{a_{1m_1}, b_{12}\} + \ldots + \min\{a_{1m_1}, b_{1m_2}\} \\
&= a_{11}b_{11} + a_{11}b_{12} + \ldots + a_{11}b_{1m_2} + a_{12}b_{11} + a_{12}b_{12} \\
&\quad + \ldots + a_{12}b_{1m_2} + \ldots + a_{1m_1}b_{11} + a_{1m_1}b_{12} + \ldots + a_{1m_1}b_{1m_2} \\
&= a_{11}(b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1m_2}) + a_{12}(b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1m_2}) \\
&\quad + \ldots + a_{1m_1}(b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1m_2}) \\
&= (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1m_1}) + (b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{1m_2}) \\
&= \sum_{j=1}^{m_1} a_{1j} + \sum_{k=1}^{m_2} b_{1k} = v_1([a_{ij}])v_1([b_{ik}])
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde $i = 2, \ldots, n$ için $v_i([a_{ij}])v_i$($[b_{ik}]$)=v_i($[c_{ip}]$) olduğu görülür. ■

3. SINIRLANDIRILMIŞ ESNEK KÜMELER

Bu bölümde U evrensel kümesinin alt kümeleri kullanılarak, U üzerinde bir esnek kümenin dört farklı sınırlandırılması incelenmiştir. Bu sınırlandırılmış kümeler cebirsel uygulamalarda ve karar verme sürecinde etkin rol oynarlar. Bu bölümde sınırlandırılmış kümelerin özellikleri incelenmiş ve 4. bölümde de bunların cebirsel uygulamalarıyla ilgili olarak α-*kesişim* kümesinin grup teorisindeki uygulaması verilmiştir.

Tanım 3.1. (Atagün ve Kamacı, [35]) (F, A), U üzerinde esnek küme ve $\emptyset \neq \alpha \subseteq U$ olsun.

a) (F, A)'nın α-*kesişim* kümesi, A'nın

$$(F, A)^{\cap\alpha} = \{x \in A \mid f_A(x) \cap \alpha \neq \emptyset\}$$

alt kümesidir.

b) (F, A)'nın α-*birleşim* kümesi, A'nın

$$(F, A)^{\cup\alpha} = \{x \in A \mid f_A(x) \cup \alpha = U\}$$

alt kümesidir.

Tanım 3.2. (F, A), U üzerinde esnek küme ve $\alpha \subseteq U$ olsun.

a) (F, A)'nın *üst* α- *içeren* kümesi, A'nın

$$(F, A)^{\supseteq\alpha} = \{x \in A \mid f_A(x) \supseteq \alpha\}$$

alt kümesidir (Çağman ve diğ., [37]).

b) (F, A)'nın *alt* α- *içeren* kümesi, A'nın

$$(F, A)^{\subseteq\alpha} = \{x \in A \mid f_A(x) \subseteq \alpha\}$$

alt kümesidir (Sezgin ve diğ., [38]).

Sınırlandırılmış kümelerin esnek alt küme işlemine göre bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.3. $F_A, F_B \in SU$, $\emptyset \neq \alpha \subseteq U$ olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $F_A \widetilde{\subseteq} F_B$ ise $F_A^{\cap\alpha} \subseteq F_B^{\cap\alpha}$ dir.

b) $F_A \widetilde{\subseteq} F_B$ olsun. Eğer,

i) $\forall y \in B \setminus A : F_B(y) \nsubseteq \alpha$ ise $F_B^{\subseteq\alpha} \subseteq F_A^{\subseteq\alpha}$ dir.

ii) $\forall x \in A$ için $F_A(x) \subseteq \alpha$ ve $\forall x \in B$ için $F_B(x) \subseteq \alpha$ ise $F_A^{\subseteq\alpha} \subseteq F_B^{\subseteq\alpha}$ dir.

c) $F_A \widetilde{\subseteq} F_B$ ise $F_A^{\supseteq\alpha} \subseteq F_B^{\supseteq\alpha}$ dir.

d) $F_A \widetilde{\subseteq} F_B$ ise $F_A^{\cup\alpha} \subseteq F_B^{\cup\alpha}$ dir.

İspat. $F_A \widetilde{\subseteq} F_B$ olsun. Tanım 2.3. den $A \subseteq B$ ve $\forall x \in A$ için $F_A(x) \subseteq F_B(x)$ dir.

a) $x \in F_A^{\cap\alpha} \Rightarrow F_A(x) \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow F_B(x) \supseteq F_A(x)$ olduğundan $F_B(x) \cap \alpha \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $x \in F_B^{\cap\alpha}(x)$ dir.

b) (i) $\forall y \in B \setminus A$ için $F_B(y) \nsubseteq \alpha$ olsun. $x \in F_B^{\subseteq\alpha} \Rightarrow F_B(x) \subseteq \alpha \Rightarrow F_A(x) \subseteq F_B(x) \subseteq \alpha \Rightarrow F_A(x) \subseteq \alpha \Rightarrow x \in F_A^{\subseteq\alpha}$.
(ii) $\forall x \in A$ için $F_A(x) \subseteq \alpha$ ve $\forall x \in B$ için $F_B(x) \subseteq \alpha$ olsun. $A = F_A^{\subseteq\alpha}$, $B = F_B^{\subseteq\alpha}$ ve $A \subseteq B$ olduğundan $F_A^{\subseteq\alpha} \subseteq F_B^{\subseteq\alpha}$ dir.

c) $x \in F_A^{\supseteq\alpha} \Rightarrow F_A(x) \supseteq \alpha \Rightarrow \alpha \subseteq F_A(x) \subseteq F_B(x)$ olduğundan $F_B(x) \supseteq \alpha$ dir. Dolayısıyla $x \in F_B^{\supseteq\alpha}$ dir.

d) $x \in F_A^{\cup\alpha} \Rightarrow F_A(x) \cup \alpha = U \Rightarrow F_A(x) \subseteq F_B(x)$ olduğundan $F_B(x) \cup \alpha = U$ dir. Dolayısıyla $x \in F_B^{\cup\alpha}$ dir.

■

Sınırlandırılmış kümelerin esnek birleşim "$\widetilde{\cup}$" işlemine göre bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

Teorem 3.4. F_A ve F_B, U üzerinde esnek kümeler ve $\alpha \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

$$(F_A \widetilde{\cup} F_B)^{\subseteq\alpha} \supseteq F_A^{\subseteq\alpha} \cap F_B^{\subseteq\alpha}.$$

İspat. $x \in F_A^{\subseteq\alpha} \cap F_B^{\subseteq\alpha} \Rightarrow x \in F_A^{\subseteq\alpha}$ ve $x \in F_B^{\subseteq\alpha} \Rightarrow F_A(x) \subseteq \alpha$ ve $F_B(x) \subseteq \alpha \Rightarrow (F_A(x) \cup F_B(x)) \subseteq \alpha \Rightarrow x \in (F_A \widetilde{\cup} F_B)^{\subseteq\alpha}$.

■

Örnek 3.5. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\},\ A = \{e_1, e_2, e_3\},\ B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ evrensel kümesi üzerindeki esnek kümeler F_A ve F_B,

$$F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_2, u_3\}), (e_3, \{u_1\})\},$$
$$F_B = \{(e_1, \{u_3, u_4\}), (e_2, \{u_1, u_2\}), (e_3, \{u_2\})\}$$

olsun. $C = A \cup B, H_C = F_A \widetilde{\cup} F_B, \forall x \in C$ için

$$H(x) = \begin{cases} F_A(x) & , x \in A \setminus B \\ F_B(x) & , x \in B \setminus A \\ F_A(x) \cup F_B(x) & , x \in A \cap B \end{cases}$$

olmak üzere, $H_C = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}), (e_2, \{u_1, u_2, u_3\}), (e_3, \{u_1, u_2\})\}$ dir.
$\alpha = \{u_1, u_2\}$ olmak üzere,
$H_C^{\subseteq\alpha} = \{e_3\}$, $F_A^{\subseteq\alpha} = \{e_1, e_3\}$, $F_B^{\subseteq\alpha} = \{e_2, e_3\}$ dir. Dolayısıyla $(F_A \widetilde{\cup} F_B)^{\subseteq\alpha} = F_A^{\subseteq\alpha} \cap F_B^{\subseteq\alpha}$ ve $(F_A \widetilde{\cup} F_B)^{\subseteq\alpha} \subseteq F_A^{\subseteq\alpha} \cup F_B^{\subseteq\alpha}$ dir.

Teorem 3.6. F_A ve F_B, U üzerinde esnek kümeler ve $\alpha \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

a) $(F_A \widetilde{\cup} F_B)^{\supseteq\alpha} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \cup F_B^{\supseteq\alpha}$.

b) $(F_A \widetilde{\cup} F_B)^{\cap\alpha} = F_A^{\cap\alpha} \cup F_B^{\cap\alpha}$.

c) $(F_A \widetilde{\cup} F_B)^{\cup\alpha} \supseteq F_A^{\cup\alpha} \cup F_B^{\cup\alpha}$.

İspat.

a) $x \in F_A^{\supseteq\alpha} \cup F_B^{\supseteq\alpha} \Rightarrow x \in F_A^{\supseteq\alpha}$ veya $x \in F_B^{\supseteq\alpha} \Rightarrow F_A(x) \supseteq \alpha$ veya $F_B(x) \supseteq \alpha \Rightarrow (F_A(x) \cup F_B(x)) \supseteq \alpha \Rightarrow x \in (F_A \cup F_B)^{\supseteq\alpha}$.

b) $C = A \cup B, H_C = F_A \widetilde{\cup} F_B$ olsun. $x \in H_C^{\cap\alpha} \Leftrightarrow H_C(x) \cap \alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow (F_A(x) \cup F_B(x)) \cap \alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow F_A(x) \cap \alpha \neq \emptyset$ veya $F_B(x) \cap \alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in F_A^{\cap\alpha}$ veya $x \in F_B^{\cap\alpha} \Leftrightarrow x \in F_A^{\cap\alpha} \cup F_B^{\cap\alpha}$.

c) $x \in F_A^{\cup\alpha} \cup F_B^{\cup\alpha} \Rightarrow x \in F_A^{\cup\alpha}$ veya $x \in F_B^{\cup\alpha} \Rightarrow F_A(x) \cup \alpha = U$ veya $F_B(x) \cup \alpha = U \Rightarrow (F_A(x) \cup F_B(x)) \cup \alpha = U \Rightarrow x \in (F_A \tilde{\cup} F_B)^{\cup\alpha}$.

■

Örnek 3.7. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel kümesi üzerindeki esnek kümeler F_A ve F_B,

$$F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_2, u_3\}), (e_3, \{u_1\}), (e_4, \{u_3\})\}$$
$$F_B = \{(e_1, \{u_3, u_4\}), (e_2, \{u_1, u_2\}), (e_3, \{u_2\}), (e_4, \{u_4\})\}$$

olsun. $C = A \cup B, H_C = F_A \tilde{\cup} F_B, \forall x \in C$ için

$$H(x) = \begin{cases} F_A(x) & , x \in A \setminus B \\ F_B(x) & , x \in B \setminus A \\ F_A(x) \cup F_B(x) & , x \in A \cap B \end{cases}$$

olduğundan $H_C = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}), (e_2, \{u_1, u_2, u_3\}), (e_3, \{u_1, u_2\}), (e_4, \{u_3, u_4\})\}$ dir.

$\alpha = \{u_1, u_2\}$ olmak üzere,

$H_C^{\supseteq\alpha} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $F_A^{\supseteq\alpha} = \{e_1\}$, $F_B^{\supseteq\alpha} = \{e_2\}$ olduğundan $(F_A \tilde{\cup} F_B)^{\supseteq\alpha} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \cup F_B^{\supseteq\alpha}$ dir. $H_C^{\cap\alpha} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $F_A^{\cap\alpha} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $F_B^{\cap\alpha} = \{e_2, e_3\}$ olduğundan $(F_A \tilde{\cup} F_B)^{\cap\alpha} = F_A^{\cap\alpha} \cup F_B^{\cap\alpha}$ dir.

$\beta = \{u_1, u_4, u_5\}$ olmak üzere,

$H_C^{\cup\beta} = \{e_1, e_2\}$, $F_A^{\cup\beta} = \{e_2\}$, $F_B^{\cup\beta} = \emptyset$ olduğundan $(F_A \tilde{\cup} F_B)^{\cup\beta} \supseteq F_A^{\cup\beta} \cup F_B^{\cup\beta}$ dir.

Sınırlandırılmış kümelerin esnek kısıtlanmış birleşim "$\cup_R$" işlemine göre bazı özellikleri aşağıdaki Teoremde verilmiştir:

Teorem 3.8. F_A ve F_B, U üzerinde esnek kümeler ve $\alpha \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

a) $(F_A \cup_R F_B)^{\subseteq\alpha} \subseteq F_A^{\subseteq\alpha} \cup F_B^{\subseteq\alpha}$.

b) $(F_A \cup_R F_B)^{\supseteq\alpha} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \cap F_B^{\supseteq\alpha}$.

c) $(F_A \cup_R F_B)^{\cap\alpha} = F_A^{\cap\alpha} \cup F_B^{\cap\alpha}$.

d) $(F_A \cup_R F_B)^{\cup\alpha} \supseteq F_A^{\cup\alpha} \cap F_B^{\cup\alpha}$.

İspat. $(F, A) \cup_R (F, B) = (H, C)$ olmak üzere $C = A \cap B$, $\forall x \in C$ için $H(x) = F_A(x) \cup F_B(x)$ olsun.

a) $x \in H_C^{\subseteq\alpha} \Rightarrow H_C(x) \subseteq \alpha \Rightarrow (F_A \cup F_B)(x) = F_A(x) \cup F_B(x) \subseteq \alpha \Rightarrow F_A(x) \subseteq \alpha$ ve $F_B(x) \subseteq \alpha \Rightarrow x \in F_A^{\subseteq\alpha}$ ve $x \in F_B^{\subseteq\alpha} \Rightarrow x \in F_A^{\subseteq\alpha} \cap F_B^{\subseteq\alpha} \subseteq F_A^{\subseteq\alpha} \cup F_B^{\subseteq\alpha}$.

b) $x \in F_A^{\supseteq\alpha} \cap F_B^{\supseteq\alpha} \Rightarrow x \in A, F_A(x) \supseteq \alpha$ ve $x \in B, F_B(x) \supseteq \alpha \Rightarrow x \in A \cap B, F_A(x) \cap F_B(x) \supseteq \alpha \Rightarrow x \in (F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\supseteq\alpha} \subseteq (F_A \cup_R F_B)^{\supseteq\alpha} \Rightarrow x \in (F_A \cup_R F_B)^{\supseteq\alpha}$.

c) $x \in H_C^{\cap\alpha} \Leftrightarrow H_C(x) \cap \alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow (F_A(x) \cup F_B(x)) \cap \alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow (F_A(x) \cap \alpha) \cup (F_B(x) \cap \alpha) \neq \emptyset \Leftrightarrow (F_A(x) \cap \alpha) \neq \emptyset$ veya $(F_B(x) \cap \alpha) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in F_A^{\cap\alpha} \cup F_B^{\cap\alpha} \Leftrightarrow (F_A \cup_R F_B)^{\cap\alpha} = F_A^{\cap\alpha} \cup F_B^{\cap\alpha}$.

d) $x \in F_A^{\cup\alpha} \cap F_B^{\cup\alpha} \Rightarrow x \in F_A^{\cup\alpha}$ ve $x \in F_B^{\cup\alpha} \Rightarrow x \in A, F_A(x) \cup \alpha = U$ ve $x \in B, F_B(x) \cup \alpha = U \Rightarrow x \in A \cap B, (F_A(x) \cup F_B(x)) \cup \alpha = U \Rightarrow x \in (F_A \cup_R F_B)^{\cup\alpha}$.

■

Örnek 3.9. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel kümesi üzerindeki esnek kümeler F_A ve F_B olmak üzere,

$$F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_2, u_3\}), (e_3, \{u_1\}), (e_4, \{u_3\})\},$$
$$F_B = \{(e_1, \{u_3, u_4\}), (e_2, \{u_1, u_2\}), (e_3, \{u_1, u_2\})\}$$

olsun. $C = A \cap B, H_C = F_A \cup_R F_B$, $\forall x \in C$ için $H(x) = F_A(x) \cup F_B(x)$ olmak üzere, $H_C = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}), (e_2, \{u_1, u_2, u_3\}), (e_3, \{u_1, u_2\})\}$ dir.

$\alpha = \{u_1, u_2\}$ olmak üzere,

$H_C^{\subseteq\alpha} = \{e_3\}$, $F_A^{\subseteq\alpha} = \{e_1, e_3\}$, $F_B^{\subseteq\alpha} = \{e_2, e_3\}$ olduğundan $(F_A \cup_R F_B)^{\subseteq\alpha} \subseteq F_A^{\subseteq\alpha} \cup F_B^{\subseteq\alpha}$,
$H_C^{\supseteq\alpha} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $F_A^{\supseteq\alpha} = \{e_1\}$, $F_B^{\supseteq\alpha} = \{e_2, e_3\}$ olduğundan $(F_A \cup_R F_B)^{\supseteq\alpha} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \cap F_B^{\supseteq\alpha}$,
$H_C^{\cap\alpha} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $F_A^{\cap\alpha} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $F_B^{\cap\alpha} = \{e_2, e_3\}$ olduğundan $(F_A \cup_R F_B)^{\cap\alpha} = F_A^{\cap\alpha} \cup F_B^{\cap\alpha}$ dir.

$\beta = \{u_1, u_4, u_5\}$ olmak üzere,

$H_C^{\cup\beta} = \{e_1, e_2\}$, $F_A^{\cup\beta} = \{e_2\}$, $F_B^{\cup\beta} = \emptyset$ olduğundan $(F_A \cup_R F_B)^{\cup\beta} \supseteq F_A^{\cup\beta} \cap F_B^{\cup\beta}$ dir.

Sınırlandırılmış kümelerin, esnek kesişim "$\widetilde{\cap}$" işlemine göre bazı özellikleri aşağıdaki Teoremle verilmiştir:

Teorem 3.10. F_A ve F_B, U üzerinde esnek kümeler ve $\alpha \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

a) $(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\subseteq\alpha} \supseteq F_A^{\subseteq\alpha} \cap F_B^{\cap\alpha}$.

b) $(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\supseteq\alpha} = F_A^{\supseteq\alpha} \cap F_B^{\supseteq\alpha}$.

c) $(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\cup\alpha} = F_A^{\cup\alpha} \cap F_B^{\cup\alpha}$.

d) $(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\cap\alpha} \subseteq F_A^{\cap\alpha} \cap F_B^{\cap\alpha}$.

İspat. $(F, A) \widetilde{\cap} (F, B) = (H, C)$ olmak üzere $\forall x \in C = A \cap B$ için $H(x) = F_A(x) \cap F_B(x)$ olsun.

a) $x \in F_A^{\subseteq\alpha} \cap F_B^{\subseteq\alpha} \Rightarrow x \in F_A^{\subseteq\alpha}$ ve $x \in F_B^{\subseteq\alpha} \Rightarrow x \in A$, $F_A(x) \subseteq \alpha$ ve $x \in B$, $F_B(x) \subseteq \alpha \Rightarrow x \in A \cap B$, $(F_A \widetilde{\cap} F_B)(x) \subseteq \alpha \Rightarrow x \in (F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\subseteq\alpha}$ elde edilir.

b) $x \in F_A^{\supseteq\alpha} \cap F_B^{\supseteq\alpha} \Leftrightarrow x \in A, x \in F_A^{\supseteq\alpha}$ ve $x \in B, x \in F_B^{\supseteq\alpha} \Leftrightarrow x \in A \cap B$ ve $F_A(x) \supseteq \alpha$ ve $F_B(x) \supseteq \alpha \Leftrightarrow x \in A \cap B$ ve $(F_A \widetilde{\cap} F_B)(x) \supseteq \alpha \Leftrightarrow x \in (F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\supseteq\alpha}$ dir.

c) $F_A \widetilde{\cap} F_B \widetilde{\subseteq} F_A$ ve $F_A \widetilde{\cap} F_B \widetilde{\subseteq} F_B$ olduğundan Teorem 3.3. (d) şıkkından $(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\cup\alpha} \subseteq F_A^{\cup\alpha}$ ve $(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\cup\alpha} \subseteq F_B^{\cup\alpha}$ dır ve buradan

$$(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\cup\alpha} \subseteq F_A^{\cup\alpha} \cap F_B^{\cup\alpha} \tag{3.1}$$

elde edilir. $x \in F_A^{\cup\alpha} \cap F_B^{\cup\alpha} \Rightarrow x \in A \cap B$, $F_A(x) \cup \alpha = U$ ve $F_B(x) \cup \alpha = U \Rightarrow x \in A \cap B$ ve $(F_A(x) \cap F_B(x)) \cup \alpha = U \Rightarrow x \in (F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\cup\alpha}$ dir. Dolayısıyla,

$$F_A^{\cup\alpha} \cap F_B^{\cup\alpha} \subseteq (F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\cup\alpha} \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.1) ve (3.2)'den eşitlik görülür.

d) $x \in H_C^{\cap\alpha} \Rightarrow (F_A \widetilde{\cap} F_B)(x) \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow (F_A(x) \cap F_B(x)) \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow F_A(x) \cap \alpha \neq \emptyset$ ve $F_B(x) \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow x \in F_A^{\cap\alpha}$ ve $x \in F_B^{\cap\alpha} \Rightarrow x \in F_A^{\cap\alpha} \cap F_B^{\cap\alpha}$ elde edilir.

■

Sınırlandırılmış kümelerin, esnek genişletilmiş kesişim "$\sqcap_\varepsilon$" işlemine göre bazı özellikleri aşağıdaki Teoremle verilmiştir:

Teorem 3.11. F_A ve F_B, U üzerinde esnek kümeler ve $\alpha \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

a) $(F_A \sqcap_\varepsilon F_B)^{\subseteq\alpha} \supseteq F_A^{\subseteq\alpha} \cap F_B^{\subseteq\alpha}$.

b) $(F_A \sqcap_\varepsilon F_B)^{\supseteq\alpha} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \cap F_B^{\supseteq\alpha}$.

c) $(F_A \sqcap_\varepsilon F_B)^{\cup\alpha} \supseteq F_A^{\cup\alpha} \cap F_B^{\cup\alpha}$.

İspat.

a) $x \in F_A^{\subseteq\alpha} \cap F_B^{\subseteq\alpha} \Rightarrow x \in F_A^{\subseteq\alpha}$ ve $x \in F_B^{\subseteq\alpha} \Rightarrow x \in A,\ F_A(x) \subseteq \alpha$ ve $x \in B,\ F_B(x) \subseteq \alpha \Rightarrow x \in A \cap B,\ (F_A(x) \cap F_B(x)) \subseteq \alpha \Rightarrow$ Tanım 2.10. dan $x \in (F_A \sqcap_\varepsilon F_B)^{\subseteq\alpha}$ elde edilir.

b) Teorem 3.10. (b) şıkkından $(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\supseteq\alpha} = F_A^{\supseteq\alpha} \cap F_B^{\supseteq\alpha}$ ve Tanım 2.9. ve 2.10. dan $(F_A \widetilde{\cap} F_B) \widetilde{\subseteq} (F_A \sqcap_\varepsilon F_B)$ dir. Dolayısıyla Teorem 3.3. (c) şıkkından $(F_A \sqcap_\varepsilon F_B)^{\supseteq\alpha} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \cap F_B^{\supseteq\alpha}$ dir.

c) $x \in F_A^{\cup\alpha} \cap F_B^{\cup\alpha} \Rightarrow x \in F_A^{\cup\alpha}$ ve $x \in F_B^{\cup\alpha} \Rightarrow x \in A$, $F_A(x) \cup \alpha = U$ ve $x \in B$, $F_B(x) \cup \alpha = U \Rightarrow x \in A \cap B$ ve $(F_A(x) \cap F_B(x)) \cup \alpha = U \Rightarrow x \in (F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\cup\alpha}$ dir. $(F_A \widetilde{\cap} F_B) \subseteq (F_A \sqcap_\varepsilon F_B)$ olduğundan Teorem 3.3. (d) şıkkından $(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\cup\alpha} \subseteq (F_A \sqcap_\varepsilon F_B)^{\cup\alpha}$ elde edilir. Sonuç olarak $(F_A \sqcap_\varepsilon F_B)^{\cup\alpha} \supseteq F_A^{\cup\alpha} \cap F_B^{\cup\alpha}$ dir.

■

Örnek 3.12. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\},\ A = \{e_1, e_2, e_3\},\ B = \{e_1, e_2, e_4\}$ olsun. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel kümesi üzerindeki esnek kümeler F_A ve F_B olmak üzere,

$$F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_5\}), (e_2, \{u_1, u_3\}), (e_3, \{u_3, u_4, u_5\})\}$$
$$F_B = \{(e_1, \{u_2, u_4\}), (e_2, \{u_1, u_3, u_5\}), (e_4, \{u_3\})\}$$

olsun. $C = A \cap B, H_C = F_A \widetilde{\cap} F_B, \forall x \in C$ için $H(x) = F_A(x) \cap F_B(x)$,
$L = A \cup B, K_L = F_A \sqcap_\varepsilon F_B, \forall x \in L$ için

$$K(x) = \begin{cases} F_A(x) & , x \in A \setminus B \\ F_B(x) & , x \in B \setminus A \\ F_A(x) \cap F_B(x) & , x \in A \cap B \end{cases}$$

olmak üzere,

$$H_C = \{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_1, u_3\})\},$$
$$K_L = \{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_1, u_3\}), (e_3, \{u_3, u_4, u_5\}), (e_4, \{u_3\})\}$$

dir. $\alpha = \{u_1, u_3\}$ ve $\beta = \{u_3\}$ olmak üzere,

$H_C^{\subseteq\alpha} = \{e_2\}$, $K_L^{\subseteq\alpha} = \{e_2, e_4\}$, $F_A^{\subseteq\alpha} = \{e_2\}$, $F_B^{\subseteq\alpha} = \{e_4\}$, olduğundan $(F_A \sqcap_\varepsilon F_B)^{\subseteq\alpha} \supseteq F_A^{\subseteq\alpha} \cap F_B^{\subseteq\alpha}$ ve $(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\subseteq\alpha} \supseteq F_A^{\subseteq\alpha} \cap F_B^{\subseteq\alpha}$ dir.

$H_C^{\supseteq\alpha} = \{e_2\}$, $K_L^{\supseteq\beta} = \{e_2, e_3, e_4\}$, $F_A^{\supseteq\alpha} = \{e_2\}$, $F_B^{\supseteq\alpha} = \{e_2\}$, $F_A^{\supseteq\beta} = \{e_2, e_3\}$, $F_B^{\supseteq\beta} = \{e_2, e_4\}$ olduğundan $(F_A \sqcap_\varepsilon F_B)^{\supseteq\beta} \supseteq F_A^{\supseteq\beta} \cap F_B^{\supseteq\beta}$ ve $(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\supseteq\alpha} = F_A^{\supseteq\alpha} \cap F_B^{\supseteq\alpha}$ dir.

$\sigma = \{u_1, u_2\}$ ve $\theta = \{u_2, u_4, u_5\}$ olmak üzere,

$H_C^{\cup\theta} = \{e_2\}$, $F_A^{\cup\theta} = \{e_2\}$, $F_B^{\cup\theta} = \{e_2\}$ olduğundan $(F_A \widetilde{\cap} F_B)^{\cup\theta} = F_A^{\cup\theta} \cap F_B^{\cup\theta}$ dir.

$K_L^{\cup\sigma} = \{e_3\}$, $F_A^{\cup\sigma} = \{e_3\}$, $F_B^{\cup\sigma} = \emptyset$ olduğundan $(F_A \sqcap_\varepsilon F_B)^{\cup\sigma} \supseteq F_A^{\cup\sigma} \cap F_B^{\cup\sigma}$ dir.

Sınırlandırılmış kümelerin, esnek kümelerdeki VEYA "$\vee$" işlemine göre bazı özellikleri aşağıdaki Teoremle verilmiştir:

Teorem 3.13. F_A ve F_B, U üzerinde esnek kümeler ve $\alpha \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

a) $(F_A \vee F_B)^{\subseteq\alpha} = F_A^{\subseteq\alpha} \times F_B^{\subseteq\alpha}$.

b) $(F_A \vee F_B)^{\cap\alpha} \supseteq F_A^{\cap\alpha} \times F_B^{\cap\alpha}$.

c) $(F_A \vee F_B)^{\supseteq\alpha} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \times F_B^{\supseteq\alpha}$.

d) $(F_A \vee F_B)^{\cup\alpha} \supseteq F_A^{\cup\alpha} \times F_B^{\cup\alpha}$.

İspat. $F_A \vee F_B = (H, A \times B) \ni \forall (x,y) \in A \times B$ için $H(x,y) = F_A(x) \cup F_B(y)$ olsun.

a) $(x,y) \in H_C^{\subseteq\alpha} \Leftrightarrow (F_A(x) \cup F_B(y)) \subseteq \alpha \Leftrightarrow F_A(x) \subseteq \alpha$ ve $F_B(y) \subseteq \alpha \Leftrightarrow (x,y) \in F_A^{\subseteq\alpha} \times F_B^{\subseteq\alpha}$ elde edilir.

b) $(x,y) \in F_A^{\cap\alpha} \times F_B^{\cap\alpha} \Leftrightarrow x \in F_A^{\cap\alpha}$ ve $y \in F_B^{\cap\alpha} \Leftrightarrow F_A(x) \cap \alpha \neq \emptyset$ ve $F_B(y) \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow (F_A(x) \cup F_B(y)) \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow (x,y) \in (F_A \vee F_B)^{\cap\alpha}$ dir.

c) $(x,y) \in F_A^{\supseteq\alpha} \times F_B^{\supseteq\alpha} \Leftrightarrow x \in F_A^{\supseteq\alpha}$ ve $y \in F_B^{\supseteq\alpha} \Leftrightarrow F_A(x) \supseteq \alpha$ ve $F_B(y) \supseteq \alpha \Rightarrow (F_A(x) \cup F_B(y)) \supseteq \alpha \Rightarrow (x,y) \in (F_A \vee F_B)^{\supseteq\alpha}$ dir.

d) $(x,y) \in F_A^{\cup\alpha} \times F_B^{\cup\alpha} \Leftrightarrow x \in F_A^{\cup\alpha}$ ve $y \in F_B^{\cup\alpha} \Leftrightarrow F_A(x) \cup \alpha = U$ ve $F_B(y) \cup \alpha = U \Rightarrow (F_A(x) \cup F_B(y)) \cup \alpha = U \Rightarrow (x,y) \in (F_A \vee F_B)^{\cup\alpha}$ elde edilir.

■

Sınırlandırılmış kümelerin, esnek kümelerdeki VE "$\wedge$" işlemine göre bazı özellikleri aşağıdaki Teoremle verilmiştir:

Teorem 3.14. F_A ve F_B, U üzerinde esnek kümeler ve $\alpha \subseteq U$ olsun. Bu durumda

a) $(F_A \wedge F_B)^{\cap\alpha} \subseteq F_A^{\cap\alpha} \times F_B^{\cap\alpha}$.

b) $(F_A \wedge F_B)^{\cup\alpha} = F_A^{\cup\alpha} \times F_B^{\cup\alpha}$.

c) $(F_A \wedge F_B)^{\subseteq\alpha} \supseteq F_A^{\subseteq\alpha} \times F_B^{\subseteq\alpha}$.

d) $(F_A \wedge F_B)^{\supseteq\alpha} = F_A^{\supseteq\alpha} \times F_B^{\supseteq\alpha}$.

İspat. $F_A \wedge F_B = (H, A \times B)$; $\forall (x,y) \in A \times B$ için $H(x,y) = F_A(x) \cap F_B(y)$ olsun.

a) $(x,y) \in H_C^{\cap\alpha} \Rightarrow (F_A(x) \cap F_B(y)) \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow F_A(x) \cap \alpha \neq \emptyset$ ve $F_B(y) \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow x \in F_A^{\cap\alpha}$ ve $y \in F_B^{\cap\alpha} \Rightarrow (x,y) \in F_A^{\cap\alpha} \times F_B^{\cap\alpha}$ elde edilir.

b) $(x,y) \in H_C^{\cup\alpha} \Leftrightarrow (F_A(x) \cap F_B(y)) \cup \alpha = U \Leftrightarrow (F_A(x) \cup \alpha) \cap (F_B(y) \cup \alpha) = U \Leftrightarrow$ $F_A(x) \cup \alpha = U$ ve $F_B(y) \cup \alpha = U \Leftrightarrow x \in F_A^{\cup\alpha}$ ve $y \in F_B^{\cup\alpha} \Leftrightarrow (x,y) \in F_A^{\cup\alpha} \times F_B^{\cup\alpha}$ elde edilir.

c) $(x,y) \in F_A^{\subseteq\alpha} \times F_B^{\subseteq\alpha} \Leftrightarrow x \in F_A^{\subseteq\alpha}$ ve $y \in F_B^{\subseteq\alpha} \Leftrightarrow F_A(x) \subseteq \alpha$ ve $F_B(y) \subseteq \alpha \Rightarrow$ $(F_A(x) \cap F_B(y)) \subseteq \alpha \Rightarrow (x,y) \in (F_A \wedge F_B)^{\subseteq\alpha}$ elde edilir.

d) $(x,y) \in H_C^{\supseteq\alpha} \Leftrightarrow (F_A(x) \cap F_B(y)) \supseteq \alpha \Leftrightarrow F_A(x) \supseteq \alpha$ ve $F_B(y) \supseteq \alpha \Leftrightarrow (x,y) \in$ $F_A^{\supseteq\alpha} \times F_B^{\supseteq\alpha}$ elde edilir.

■

Örnek 3.15. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B = \{e_1, e_2, e_4\}$ olsun. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel kümesi üzerindeki esnek kümeler F_A ve F_B olmak üzere;

$F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2, u_5\}), (e_2, \{u_1, u_3\}), (e_3, \{u_3, u_4, u_5\})\}$
$F_B = \{(e_1, \{u_2, u_4\}), (e_2, \{u_1, u_3, u_5\}), (e_4, \{u_3\})\}$ olsun. Buradan

$F_A \vee F_B = \{((e_1, e_1), \{u_1, u_2, u_4, u_5\}), ((e_1, e_2), \{u_1, u_2, u_3, u_5\}), ((e_1, e_4), \{u_1, u_2, u_3, u_5\}),$
$((e_2, e_1), \{u_1, u_2, u_3, u_4\}), ((e_2, e_2), \{u_1, u_3, u_5\}), ((e_2, e_4), \{u_1, u_3\}), ((e_3, e_1), \{u_2, u_3, u_4, u_5\}),$
$((e_3, e_2), \{u_1, u_3, u_4, u_5\}), ((e_3, e_4), \{u_3, u_4, u_5\})\}$ ve

$F_A \wedge F_B = \{((e_1, e_1), \{u_2\}), ((e_1, e_2), \{u_1, u_5\}), ((e_1, e_4), \emptyset), ((e_2, e_1), \emptyset),$
$((e_2, e_2), \{u_1, u_3\}), ((e_2, e_4), \{u_3\}), ((e_3, e_1), \{u_4\}), ((e_3, e_2), \{u_3, u_5\}), ((e_3, e_4), \{u_3\})\}$
dir. $\alpha = \{u_1, u_3\}$, $\beta = \{u_3\}$, $\theta = \{u_4, u_5\}$ ve $\sigma = \{u_2, u_3, u_4\}$ olmak üzere,

$(F_A \vee F_B)^{\subseteq\alpha} = \{(e_2, e_4)\}$, $(F_A \wedge F_B)^{\subseteq\alpha} = \{(e_1, e_4), (e_2, e_1), (e_2, e_2), (e_2, e_4), (e_3, e_4)\}$,
$F_A^{\subseteq\alpha} = \{e_2\}$, $F_B^{\subseteq\alpha} = \{e_4\}$ ve $F_A^{\subseteq\alpha} \times F_B^{\subseteq\alpha} = \{(e_2, e_4)\}$ dir.

$(F_A \vee F_B)^{\supseteq\alpha} = \{(e_1, e_2), (e_1, e_4), (e_2, e_1), (e_2, e_2), (e_2, e_4), (e_3, e_2)\}$,
$(F_A \wedge F_B)^{\supseteq\alpha} = \{(e_2, e_2)\}$, $F_A^{\supseteq\alpha} = \{e_2\}$, $F_B^{\supseteq\alpha} = \{e_2\}$ ve $F_A^{\supseteq\alpha} \times F_B^{\supseteq\alpha} = \{(e_2, e_2)\}$ dir.

$(F_A \vee F_B)^{\cap\beta} = \{(e_1, e_2), (e_1, e_4), (e_2, e_1), (e_2, e_2), (e_2, e_4), (e_3, e_1), (e_3, e_2), (e_3, e_4)\}$,
$F_A^{\cap\beta} = \{e_2, e_3\}$, $F_B^{\cap\beta} = \{e_2, e_4\}$ ve $F_A^{\cap\beta} \times F_B^{\cap\beta} = \{(e_2, e_2), (e_2, e_4), (e_3, e_2), (e_3, e_4)\}$

$(F_A \wedge F_B)^{\cap\theta} = \{(e_1, e_2), (e_3, e_1), (e_3, e_2)\}$,
$F_A^{\cap\theta} = \{e_1, e_3\}$, $F_B^{\cap\theta} = \{e_1, e_2\}$ ve $F_A^{\cap\theta} \times F_B^{\cap\beta} = \{(e_1, e_1), (e_1, e_2), (e_3, e_1), (e_3, e_2)\}$ dir.

$(F_A \vee F_B)^{\cup\sigma} = \{(e_1,e_1),(e_1,e_2),(e_1,e_4),(e_2,e_2),(e_3,e_2)\}$,
$(F_A \wedge F_B)^{\cup\sigma} = \{(e_1,e_2)\}$, $F_A^{\cup\sigma} = \{e_1\}$, $F_B^{\cup\sigma} = \{e_2\}$ ve $F_A^{\cup\sigma} \times F_B^{\cup\sigma} = \{(e_1,e_2)\}$ dir.

Sınırlandırılmış kümelerin, esnek kısıtlanmış fark "$\sim_R$" işlemine göre bazı özellikleri aşağıdaki Teoremle verilmiştir:

Teorem 3.16. F_A ve F_B, U üzerinde esnek kümeler ve $\alpha \subseteq U$ olmak üzere;

a) $(F_A \sim_R F_B)^{\subseteq\alpha} \supseteq F_A^{\subseteq\alpha} \setminus F_B^{\subseteq\alpha}$,

b) $(F_A \sim_R F_B)^{\supseteq\alpha} \subseteq F_A^{\supseteq\alpha} \setminus F_B^{\supseteq\alpha}$,

c) $(F_A \sim_R F_B)^{\cup\alpha} \subseteq F_A^{\cup\alpha} \setminus F_B^{\cup\alpha}$.

İspat. $H_C = F_A \sim_R F_B, C = A \cap B, \forall x \in C$ için $H(x) = F_A(x) \setminus F_B(x)$ olsun.

a) $x \in F_A^{\subseteq\alpha} \setminus F_B^{\subseteq\alpha} \Rightarrow x \in F_A^{\subseteq\alpha}$ ve $x \notin F_B^{\subseteq\alpha} \Rightarrow F_A(x) \subseteq \alpha$ ve $F_B(x) \nsubseteq \alpha \Rightarrow (F_A(x) \setminus F_B(x)) \subseteq F_A(x) \subseteq \alpha \Rightarrow x \in (F_A \sim_R F_B)^{\subseteq\alpha}$ elde edilir.

b) $x \in H_C^{\supseteq\alpha} \Rightarrow \alpha \subseteq (F_A(x) \setminus F_B(x)) \subseteq F_A(x) \Rightarrow \alpha \subseteq (F_A(x) \setminus F_B(x)) \subseteq F_A(x)$ ve $[(F_A(x) \setminus F_B(x)) \cap F_B(x) = \emptyset] \Rightarrow F_A(x) \supseteq \alpha$ ve $F_B(x) \nsupseteq \alpha \Rightarrow x \in F_A^{\supseteq\alpha} \setminus F_B^{\supseteq\alpha}$ elde edilir.

c) $x \in H_C^{\cup\alpha} \Rightarrow (F_A(x) \setminus F_B(x)) \cup \alpha = U \Rightarrow (F_A(x) \cap (U \setminus F_B(x))) \cup \alpha = U \Rightarrow (F_A(x) \cup \alpha) \cap ((U \setminus F_B(x)) \cup \alpha) = U \Rightarrow F_A(x) \cup \alpha = U$ ve $(U \setminus F_B(x)) \cup \alpha = U \Rightarrow F_A(x) \cup \alpha = U$ ve $F_B(x) \cup \alpha \neq U \Rightarrow x \in F_A^{\cup\alpha}$ ve $x \notin F_B^{\cup\alpha} \Rightarrow x \in F_A^{\cup\alpha} \setminus F_B^{\cup\alpha}$ elde edilir.

■

Örnek 3.17. $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, $A = \{e_1,e_2\}$, $B = \{e_1,e_3\}$ olsun. $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ evrensel kümesi üzerindeki esnek kümeler F_A ve F_B olmak üzere;

$$F_A = \{(e_1,\{u_1,u_2\}),(e_2,\{u_2,u_3\})\},$$
$$F_B = \{(e_1,\{u_2,u_4\}),(e_3\{u_1,u_3\})\}$$

olsun. $C = A \cap B, H_C = F_A \sim_R F_B, \forall x \in C$ için $H(x) = F_A(x) \setminus F_B(x)$ olmak üzere,

$$H_C = \{(e_1, \{u_1\})\}$$

dir. $\alpha = \{u_1, u_4\}$ ve $\beta = \{u_1, u_2\}$ olmak üzere,

$H_C^{\subseteq\alpha} = \{e_1\}$, $F_A^{\subseteq\alpha} = \{\emptyset\}$, $F_B^{\subseteq\alpha} = \{\emptyset\}$ olduğundan $(F_A \sim_R F_B)^{\subseteq\alpha} \supseteq F_A^{\subseteq\alpha} \setminus F_B^{\subseteq\alpha}$,
$H_C^{\supseteq\beta} = \{\emptyset\}$, $F_A^{\supseteq\beta} = \{e_1\}$, $F_B^{\supseteq\beta} = \{\emptyset\}$ olduğundan $(F_A \sim_R F_B)^{\supseteq\beta} \subseteq F_A^{\supseteq\beta} \setminus F_B^{\supseteq\beta}$ ve
$H_C^{\cup\alpha} = \{\emptyset\}$, $F_A^{\cup\alpha} = \{e_2\}$, $F_B^{\cup\alpha} = \{\emptyset\}$ olduğundan $(F_A \sim_R F_B)^{\cup\alpha} \subseteq F_A^{\cup\alpha} \setminus F_B^{\cup\alpha}$ elde edilir.

Esnek kümelerin, *alt-α içeren* ve *üst-α içeren* sınırlandırılmış kümeleriyle ilgili bazı özellikler aşağıdaki Teoremlerde verilmiştir:

Teorem 3.18. (Sezgin ve diğ., [38]) F_A, U üzerinde esnek küme ve $\alpha, \beta \subseteq U$ olsun. Bu durumda,

$$\alpha \subseteq \beta \Rightarrow F_A^{\supseteq\beta} \subseteq F_A^{\supseteq\alpha}.$$

Sonuç 3.19. F_A, U üzerinde esnek küme ve $\alpha, \beta \subseteq U$ olsun. Bu durumda,

a) $F_A^{\supseteq(\alpha\cap\beta)} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \cup F_A^{\supseteq\beta}$.

b) $F_A^{\supseteq(\alpha\cap\beta)} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \cap F_A^{\supseteq\beta}$.

İspat.

a) Teorem 3.18. dan $F_A^{\supseteq(\alpha\cap\beta)} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha}$ ve $F_A^{\supseteq(\alpha\cap\beta)} \supseteq F_B^{\supseteq\alpha}$ olduğundan $F_A^{\supseteq(\alpha\cap\beta)} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \cup F_A^{\supseteq\beta}$ dir.

b) (a)'nın ispatı ile benzer şekilde yapılır.

■

Teorem 3.20. (Sezgin ve diğ., [38]) F_A, U üzerinde esnek küme ve $\alpha, \beta \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

$$\alpha \subseteq \beta \Rightarrow F_A^{\subseteq\alpha} \subseteq F_A^{\subseteq\beta}.$$

Sonuç 3.21. F_A, U üzerinde esnek küme ve $\alpha, \beta \subseteq U$ olmak üzere;

a) $F_A^{\subseteq(\alpha\cap\beta)} \subseteq F_A^{\subseteq\alpha} \subseteq F_A^{\subseteq\alpha} \cup F_A^{\subseteq\beta}$.

b) $F_A^{\subseteq(\alpha\cap\beta)} \subseteq F_A^{\subseteq\alpha} \cap F_A^{\subseteq\beta}$.

Teorem 3.22. F_A, U üzerinde esnek küme ve $\alpha, \beta \subseteq U$ olsun. Eğer $\beta \subseteq \alpha \subseteq U$ ise

$$F_A^{\subseteq(\alpha\setminus\beta)} \subseteq F_A^{\subseteq\alpha} \setminus F_A^{\subseteq\beta}$$

dir.

İspat. $x \in F_A^{\subseteq(\alpha\setminus\beta)} \Rightarrow F_A(x) \subseteq (\alpha \setminus \beta) \Rightarrow F_A(x) \subseteq \alpha$ ve $F_A(x) \nsubseteq \beta \Rightarrow x \in F_A^{\subseteq\alpha}$ ve $x \notin F_A^{\subseteq\beta} \Rightarrow x \in F_A^{\subseteq\alpha} \setminus F_A^{\subseteq\beta}$ elde edilir. ■

Teorem 3.23. F_A, U üzerinde esnek küme ve $\alpha, \beta \subseteq U$ olsun. Eğer $\beta \subseteq \alpha \subseteq U$ ise

$$F_A^{\supseteq(\alpha\setminus\beta)} \supseteq F_A^{\supseteq\alpha} \setminus F_A^{\supseteq\beta}$$

dir.

İspat. $x \in F_A^{\supseteq\alpha} \setminus F_A^{\supseteq\beta} \Rightarrow F_A(x) \supseteq \alpha$ ve $F_A(x) \nsupseteq \beta \Rightarrow F_A(x) \supseteq (\alpha \setminus \beta) \Rightarrow x \in F_A^{\supseteq(\alpha\setminus\beta)}$ elde edilir. ■

Esnek kümelerin α-*kesişim* ve α-*birleşim* sınırlandırılmış kümeleriyle ilgili bazı özellikler aşağıdaki Teoremlerde verilmiştir:

Teorem 3.24. F_A, U üzerinde esnek küme ve $\alpha, \beta \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

a) $F_A^{\cup(\alpha\cap\beta)} \subseteq F_A^{\cup\alpha} \cap F_A^{\cup\beta}$.

b) $F_A^{\cup(\alpha\cup\beta)} \supseteq F_A^{\cup\alpha} \cup F_A^{\cup\beta}$.

İspat.

a) $x \in (F_A)^{\cup(\alpha\cap\beta)} \Rightarrow F_A(x) \cup (\alpha \cap \beta) = U \Rightarrow F_A(x) \cup \alpha = U$ ve $F_A(x) \cup \beta = U \Rightarrow$ $x \in F_A^{\cup\alpha} \cap F_A^{\cup\beta}$ elde edilir.

b) $x \in F_A^{\cup\alpha} \cup F_A^{\cup\beta} \Rightarrow F_A(x) \cup \alpha = U$ veya $F_A(x) \cup \beta = U \Rightarrow F_A(x) \cup (\alpha \cup \beta) = U \Rightarrow x \in F_A^{\cup(\alpha\cup\beta)}$ elde edilir.

■

Teorem 3.25. F_A, U üzerinde esnek küme ve $\beta \subseteq \alpha \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

a) $F_A^{\cup(\alpha\setminus\beta)} \subseteq F_A^{\cup\alpha} \setminus F_A^{\cup\beta}$.

b) $F_A^{\cup(\alpha\setminus\beta)} = F_A^{\cup\alpha} \cap F_A^{\cup\beta^t}$, burada $\beta^t = U \setminus \beta$.

İspat.

a) $x \in F_A^{\cup(\alpha\setminus\beta)} \Rightarrow F_A(x) \cup (\alpha\setminus\beta) = U \Rightarrow F_A(x) \cup \alpha = U$ ve $F_A(x) \cup \beta \neq U \Rightarrow x \in F_A^{\cup\alpha}$ ve $x \notin F_A^{\cup\beta} \Rightarrow x \in F_A^{\cup\alpha} \setminus F_A^{\cup\beta}$ elde edilir.

b) $x \in F_A^{\cup(\alpha\setminus\beta)} \Leftrightarrow F_A(x) \cup (\alpha \setminus \beta) = U \Leftrightarrow F_A(x) \cup (\alpha \cap \beta^t) = U \Leftrightarrow (F_A(x) \cup \alpha) \cap (F_A(x) \cup \beta^t) = U \Leftrightarrow F_A(x) \cup \alpha = U$ ve $F_A(x) \cup \beta^t = U \Leftrightarrow x \in F_A^{\cup\alpha}$ ve $x \in F_A^{\cup\beta^t} \Leftrightarrow x \in F_A^{\cup\alpha} \cap F_A^{\cup\beta^t}$ elde edilir.

■

Teorem 3.26. **(Atagün, [18])** F_A, U üzerinde esnek küme ve $\alpha, \beta \subseteq U$ olsun. Bu durumda,

a) $F_A^{\cap(\alpha\cap\beta)} \subseteq F_A^{\cap\alpha} \cap F_A^{\cap\beta}$.

b) $F_A^{\cap(\alpha\cup\beta)} = F_A^{\cap\alpha} \cup F_A^{\cap\beta}$.

İspat.

a) $x \in F_A^{\cap(\alpha\cap\beta)} \Rightarrow F_A(x) \cap (\alpha \cap \beta) \neq \emptyset \Rightarrow F_A(x) \cap \alpha \neq \emptyset$ ve $F_A(x) \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow x \in F_A^{\cap\alpha} \cap F_A^{\cap\beta}$ elde edilir.

b) $x \in F_A^{\cap\alpha} \cup F_A^{\cap\beta} \Leftrightarrow F_A(x) \cap \alpha \neq \emptyset$ veya $F_A(x) \cap \beta \neq \emptyset \Leftrightarrow F_A(x) \cap (\alpha \cup \beta) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in F_A^{\cap(\alpha\cup\beta)}$ elde edilir.

Teorem 3.27. F_A, U üzerinde esnek küme ve $\alpha, \beta \subseteq U$ olsun. Eğer $\beta \subseteq \alpha \subseteq U$ ise

$$F_A^{\cap(\alpha \setminus \beta)} \supseteq F_A^{\cap \alpha} \setminus F_A^{\cap \beta} \text{ dir.}$$

İspat. $x \in F_A^{\cap \alpha} \setminus F_A^{\cap \beta} \Rightarrow x \in F_A^{\cap \alpha}$ ve $x \notin F_A^{\cap \beta} \Rightarrow F_A(x) \cap \alpha \neq \emptyset$ ve $F_A(x) \cap \beta = \emptyset \Rightarrow$ $F_A(x) \cap (\alpha \setminus \beta) \neq \emptyset \Rightarrow x \in F_A^{\cap(\alpha \setminus \beta)}$ elde edilir. ■

Tanım 3.28. (F, A), U üzerinde esnek bir küme olsun.

$$supp(F, A) = \{x \in A | F(x) \neq \emptyset\}$$

kümesine (F, A) esnek kümesinin destek kümesi denir (Feng ve diğ., [10]).

Önerme 3.29. (Atagün, [18]) (F, A), U üzerinde bir esnek küme ve $\emptyset \neq \alpha \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

a) $(F, A)^{\cap \alpha} \subseteq supp(F, A)$.

b) $\forall x \in A$, $\alpha \subseteq F(x)$ ise $(F, A)^{\cap \alpha} = supp(F, A) = A$.

c) $\forall x \in A$, $F(x) \neq \emptyset$ ve $F(x) \subseteq \alpha$ ise $(F, A)^{\cap \alpha} = supp(F, A) = A$.

d) $(F, A) = \mathcal{U}_A$ ise $(F, A)^{\cap \alpha} = supp(F, A) = A$.

e) $(F, A) = \Phi_A$ veya $supp(F, A) = \emptyset$ ise $(F, A)^{\cap \alpha} = \emptyset$.

Önerme 3.30. (Atagün, [18]) (F, A), U üzerinde bir esnek küme ve $\emptyset \neq \alpha \subseteq U$ olsun. Bu durumda;

a) $\alpha \subseteq \beta$ ise $(F, A)^{\cap \alpha} \subseteq (F, A)^{\cap \beta}$.

b) $(F^c, A)^{\cap \alpha} = \{x \in A | \alpha \setminus F(x) \neq \emptyset\}$.

c) $(F, A)^{\cap \alpha^t} = \{x \in A | F(x) \setminus \alpha \neq \emptyset\}$.

d) $(F^c, A)^{\cap \alpha^t} = \{x \in A | U \setminus (F(x) \cup \alpha) \neq \emptyset\}$.

Önerme 3.31. (Atagün, [18]) (F, A), U üzerinde bir esnek küme ve $\emptyset \neq \alpha \subsetneqq U$ olsun. $\forall x \in A$, $F(x) \cup \alpha \neq U$ ise

a) $supp(F, A) \subseteq (F^c, A)^{\cap \alpha^t}$.

b) $(F, A)^{\cap \alpha} \subseteq (F^c, A)^{\cap \alpha^t}$.

4. α-KESİŞİM SINIRLANDIRILMIŞ KÜMESİNİN GRUP TEORİSİNDE UYGULAMALARI

Tanım 4.1. (Çağman ve diğ., [37]) G bir grup ve (F, G), U üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer (F, G) aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise U üzerinde G'nin bir *esnek kesişim-grubu* olarak adlandırılır;

i) $\forall x, y \in G$ için $F(xy) \supseteq F(x) \cap F(y)$,

ii) $\forall x \in G$ için $F(x^{-1}) = F(x)$.

Teorem 4.2. (Çağman ve diğ., [37]) (F, G) esnek kümesinin U üzerinde bir esnek kesişim-grubu olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in G$ için $F(xy^{-1}) \supseteq F(x) \cap F(y)$ olmasıdır.

Teorem 4.3. (Çağman ve diğ., [37]) G bir grup ve birim elemanı e_G olsun. (F, G), U üzerinde bir esnek kesişim-grup olmak üzere $\forall\ x \in G$ için $F(e_G) \supseteq F(x)$ dir.

Şimdi, U başlangıç evrensel küme ve $\emptyset \neq \alpha \subseteq U$ olmak üzere α-*kesişim* sınırlandırılmış esnek kümesi yardımıyla bir G grubunun α-tarafından üretilen esnek kesişim alt grubu kavramı tanıtılacaktır.

Tanım 4.4. G bir grup, (F, G) U üzerinde esnek küme ve $\emptyset \neq \alpha \subseteq U$ olsun. Eğer $(F, (F, G)^{\cap\alpha})$ esnek kümesi U üzerinde bir esnek kesişim grubu ise buna G'nin α-*tarafından üretilen esnek kesişim alt grubu* denir ve $< \alpha >_{\cap} \widetilde{\leq} G$ ile gösterilir.

Örnek 4.5. $G = (\mathbb{Z}_6, +)$ ve (F, G), $U = S_3$ üzerinde esnek küme olsun. $F : G \longrightarrow P(U)$ olmak üzere;
$F(\bar{0}) = \{(1), (12), (132), (123)\}$, $F(\bar{1}) = \{(23)\}$, $F(\bar{2}) = \{(12)\}$, $F(\bar{3}) = \{(1), (132), (123)\}$, $F(\bar{4}) = \{(12)\}$, $F(\bar{5}) = \{(23)\}$ ve $\alpha = \{(132), (123)\}$ olsun. Buradan $(F, G)^{\cap\alpha} = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ ve $< \alpha >_{\cap} = (F, (F, G)^{\cap\alpha}) = \{(\bar{0}, \{(1), (12), (132), (123)\}), (\bar{3}, \{(132), (123)\})\} \widetilde{\leq} G$ dir.
$\beta = \{(12)\}$ kümesi için $(F, G)^{\cap\beta} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ ve
$< \beta >_{\cap} = (F, (F, G)^{\cap\beta}) = \{(\bar{0}, \{(1), (12), (132), (123)\}), (\bar{2}, \{(12)\}), (\bar{4}, \{(12)\})\} \widetilde{\leq} G$ dir.
Yani $\{(\bar{0}, F(\bar{0})), (\bar{2}, F(\bar{2})), (\bar{4}, F(\bar{4}))\}$ esnek kümesi G'nin $(12) \in S_3$ tarafından üretilen esnek kesişim alt grubudur.

Teorem 4.6. (F, G), U üzerinde esnek küme olsun. e_G, G'nin birim elemanı olmak üzere $(F, \{e_G\})\widetilde{\leq}G$ dir. Fakat, $(F, \{e_G\}) =< \alpha >_\cap$ olacak şekilde bir α üreteci olmak zorunda değildir.

İspat. $F : \{e_G\} \longrightarrow P(U)$ olmak üzere $\forall x, y \in \{e_G\}$ için;
$F(xy^{-1}) = F(e_G) \supseteq F(e_G) \cap F(e_G) = F(x) \cap F(y)$ dir. Dolayısıyla Teorem 4.3. den $(F, \{e_G\})\widetilde{\leq}G$ elde edilir. İspatın kalan kısmı için Örnek 4.5. incelenirse;
$F(\bar{0}) = \{e, (12), (132), (123)\}$ için $(F, \{\bar{0}\})\widetilde{\leq}Z_6$ dir. Fakat $(F, \{\bar{0}\}) =< \alpha >_\cap$ olacak şekilde $\alpha \subseteq S_3$ yoktur. ■

Tanım 4.7. G grubunun esnek alt grubu $(F, \{e_G\})$, G'nin *aşikar esnek alt grubu* olarak adlandırılır ve $< e_G >_\cap$ olarak gösterilir.

Önerme 4.8. $< \alpha >_\cap \widetilde{\leq}G$ ise α tek olmak zorunda değildir. Üstelik $a, b \in U$ olmak üzere,

$$< \{a\} >_\cap =< \{b\} >_\cap \text{ ise } < \{a, b\} >_\cap =< \{a\} >_\cap \text{ dir.}$$

İspat. $< \alpha >_\cap \widetilde{\leq}G$ ise α'nın tek olmadığı Örnek 4.9. de verilmiştir. İspatın kalan kısmı için $\alpha, \beta \subseteq U$ ve $\alpha = \{a\}$, $\beta = \{b\}$ olacak şekilde $< \alpha >_\cap = \widetilde{=} < \beta >_\cap$ olsun.

$$A = \{x \in G|F(x) \cap \{a\} \neq \emptyset\} = \{x \in G|F(x) \cap \{b\} \neq \emptyset\},$$

$$B = \{x \in G|F(x) \cap \{a, b\} \neq \emptyset\}$$

olsun. Buradan $A \subseteq B$ olduğu açıktır. $x \in B$ olsun;

$$\begin{aligned} F(x) \cap \{a, b\} \neq \emptyset &\Rightarrow F(x) \cap \{a\} \neq \emptyset \text{ veya } F(x) \cap \{b\} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow x \in A \text{ veya } x \in A \\ &\Rightarrow x \in A \end{aligned}$$

Dolayısıyla $B \subseteq A$ dir. Sonuç olarak $(F, G)^{\cap\{a\}} = (F, G)^{\cap\{b\}} = (F, G)^{\cap\{a,b\}}$ dir. Yani $< \{a, b\} >_\cap =< \{a\} >_\cap$ dir. ■

Örnek 4.9. Örnek 4.5. de $\alpha = \{(132)\}$, $\beta = \{(123)\}$ ise
$< \alpha >_\cap =< \beta >_\cap =< (132), (123) >_\cap$ dir.

Aşağıdaki önerme ile üretilmiş esnek kesişim alt grubu ile o grubun alt grubu arasında bir ilişki olduğu ispatlanmıştır. Dolayısıyla bu önerme esnek cebirsel yapılar ile klasik cebirsel yapılar arasında köprü görevi görmektedir.

Önerme 4.10. $(F, G), U$ üzerinde esnek kesişim grubu ve $\emptyset \neq \alpha \subseteq U$ olsun. Eğer $< \alpha >_\cap \widetilde{\leq} G$ ise $(F, G)^{\cap\alpha}$, G'nin bir alt grubudur.

İspat. $< \alpha >_\cap = (F, (F, G)^{\cap\alpha}) \widetilde{\leq} G$ olduğundan $\emptyset \neq (F, G)^{\cap\alpha} \subseteq G$ ve $\forall x, y \in (F, G)^{\cap\alpha}$ için $F(xy^{-1}) \supseteq F(x) \cap F(y)$ dir. $F : (F, G)^{\cap\alpha} \longrightarrow P(U)$ bir fonksiyon olduğundan $\forall x, y \in (F, G)^{\cap\alpha}$ için $xy^{-1} \in (F, G)^{\cap\alpha}$ dir. Sonuç olarak $(F, G)^{\cap\alpha} \leq G$ dir. ■

Önerme 4.11. G bir grup ve $(F, G), U$ üzerinde esnek kesişim grubu olsun. $< \alpha >_\cap \widetilde{\leq} G$ ise $F(e_G) \cap \alpha \neq \emptyset$ dir. Fakat tersi genelde doğru değildir.

İspat. $< \alpha >_\cap \widetilde{\leq} G$ olsun. Önerme 4.10. dan $(F, G)^{\cap\alpha} = \{x \in G | F(x) \cap \alpha \neq \emptyset\}$ kümesi G'nin alt grubudur. $\forall x \in (F, G)^{\cap\alpha}$ için $F(x) \cap \alpha \neq \emptyset$ ve Teorem 4.3. den $F(e_G) \supseteq F(x)$ olduğundan $F(e_G) \cap \alpha \neq \emptyset$ dir. Tersinin genelde doğru olmadığı Örnek 4.12. de görülür. ■

Örnek 4.12. Örnek 4.5. de $\lambda = \{(1), (12), (123)\}$ için $F(\bar{0}) \cap \lambda \neq \emptyset$ olduğu görülür. Fakat $(F, G)^{\cap\lambda} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ G'nin esnek kesişim-alt grubu değidir.

Önerme 4.13. $< \alpha >_\cap \widetilde{\leq} G$ ve $< \beta >_\cap \widetilde{\leq} G$ olsun. Eğer $\alpha \subseteq \beta$ ise $< \alpha >_\cap \widetilde{\subseteq} < \beta >_\cap$ dir.

İspat. $x \in (F, G)^{\cap\alpha}$ olsun. $\alpha \subseteq \beta$ olduğundan $F(x) \cap \alpha \neq \emptyset$ dir. $\alpha \subseteq \beta$ olduğundan $F(x) \cap \beta \neq \emptyset$ dir. Bundan dolayı $(F, G)^{\cap\alpha} \subseteq (F, G)^{\cap\beta}$ dir. Sonuç olarak Tanım 2.3. den $(F, (F, G)^{\cap\alpha}) \widetilde{\subseteq} (F, (F, G)^{\cap\beta})$ dir. Yani $< \alpha >_\cap \widetilde{\subseteq} < \beta >_\cap$ dir. ■

Teorem 4.14. G bir grup, (F, G) ve (T, G) U üzerinde esnek kümeler olsun. $(F, G) \widetilde{\leq} G$ ve $(T, G) \widetilde{\leq} G$ ise $(F, G) \widetilde{\cap} (T, G) \widetilde{\leq} G$ dir.

İspat. Tanım 2.9. dan $(F,G)\widetilde{\cap}(T,G) = (H,G)$, $\forall x \in G$ için $H(x) = F(x) \cap T(x)$ dir.
$\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} H(xy^{-1}) =& F(xy^{-1}) \cap T(xy^{-1}) \\ \supseteq& (F(x) \cap F(y)) \cap (T(x) \cap T(y)) \\ =& (F(x) \cap T(x)) \cap (F(y) \cap T(y)) \\ =& H(x) \cap H(y) \end{aligned}$$

Sonuç olarak Teorem 4.2. den (H,G) =$(F,G)\widetilde{\cap}(T,G)\widetilde{\leq}G$ dir. ■

Sonuç 4.15. Eğer $< \alpha >_\cap \widetilde{\leq}G$ ve $< \beta >_\cap \widetilde{\leq}G$ ise $< \alpha >_\cap \widetilde{\cap} < \beta >_\cap$ G'nin esnek kesişim altgrubudur. Fakat bu alt grubun bir üreteci olmak zorunda değildir.

İspat. $< \alpha >_\cap \widetilde{\leq}G$ ve $< \beta >_\cap \widetilde{\leq}G$ ise $< \alpha >_\cap \widetilde{\cap} < \beta >_\cap \widetilde{\leq}G$ olduğu Teorem 4.14. den elde edilir. İspatın kalan kısmı için Örnek 4.16. yeterlidir. ■

Örnek 4.16. $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$ bir grup ve U evrensel kümesi 15 farklı kanser hastalığını temsil etmek üzere $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{15}\}$ ve $F : G \longrightarrow P(U)$ olsun.
$F(\bar{0}) = \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}\}$, $F(\bar{1}) = \{u_2, u_4\}$, $F(\bar{2}) = \{u_3, u_6, u_7, u_{11}\}$,
$F(\bar{3}) = \{u_1, u_5, u_9\}$, $F(\bar{4}) = \{u_3, u_6, u_7, u_{11}\}$, $F(\bar{5}) = \{u_1, u_8\}$, $F(\bar{6}) = \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}\}$,
$F(\bar{7}) = \{u_2, u_{10}\}$, $F(\bar{8}) = \{u_3, u_6, u_7, u_{11}\}$, $F(\bar{9}) = \{u_1, u_5, u_9\}$, $F(\bar{10}) = \{u_3, u_6, u_7, u_{11}\}$,
$F(\bar{11}) = \{u_2, u_8\}$ olsun. $\alpha = \{u_{11}\}$, $\beta = \{u_5\}$ için, $(F,G)^{\cap\alpha} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$ ve
$(F,G)^{\cap\beta} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ olup G'nin alt gruplarıdır.

$$\begin{aligned} (F,(F,G)^{\cap\alpha}) =& \{(\bar{0}, \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}\}), (\bar{2}, \{u_3, u_6, u_7, u_{11}\}), (\bar{4}, \{u_3, u_6, u_7, u_{11}\}), \\ & (\bar{6}, \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}\}), (\bar{8}, \{u_3, u_6, u_7, u_{11}\}), (\bar{10}, \{u_3, u_6, u_7, u_{11}\})\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (F,(F,G)^{\cap\beta}) =& \{(\bar{0}, \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}\}), (\bar{3}, \{u_1, u_5, u_9\}), (\bar{6}, \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}\}), \\ & (\bar{9}, \{u_1, u_5, u_9\})\} \end{aligned}$$

esnek kümeleri birer esnek kesişim gruptur. Buradan $< \alpha >_\cap \widetilde{\leq}G$ ve $< \beta >_\cap \widetilde{\leq}G$ dir.
Dolayısıyla,

$< \alpha >_\cap \widetilde{\cap} < \beta >_\cap = \{(\bar{0}, \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}\}), (\bar{6}, \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}\})\} \widetilde{\leq} G$ dir. Fakat $< \alpha >_\cap \cap < \beta >_\cap = < \theta >_\cap$ olacak şekilde $\theta \subseteq U$ yoktur.

Aşağıdaki Teoremle bir grubun iki üretilmiş esnek alt grubunun kesişimi yine bir üretilmiş esnek alt grup ise bu esnek alt grubun üreteci araştırılmıştır:

Teorem 4.17. G bir grup olsun. $\alpha, \beta \subseteq U$ olmak üzere $< \alpha >_\cap \widetilde{\leq} G$ ve $< \beta >_\cap \widetilde{\leq} G$ olsun.

$$< \alpha >_\cap \widetilde{\cap} < \beta >_\cap = < e_G >_\cap$$

aşikar esnek kesişim alt grup ya da

$$< \alpha >_\cap \widetilde{\cap} < \beta >_\cap = < \sigma >_\cap$$

olacak şekilde $\sigma \subseteq U$ **varsa**; σ'nın $\emptyset \neq \sigma \subseteq \alpha \cup \beta$ formunda alınması yeterlidir.

İspat. Eğer $< \alpha >_\cap \widetilde{\cap} < \beta >_\cap = < e_G >_\cap$ ise ispat açıktır. Kabul edelim ki

$$< e_G >_\cap \neq < \alpha >_\cap \widetilde{\cap} < \beta >_\cap = < \sigma >_\cap$$

olacak şekilde $\sigma \subseteq U$ bulunsun. Teorem 4.14. den $< \sigma >_\cap \widetilde{\leq} G$ dir.
$< \alpha >_\cap \widetilde{\cap} < \beta >_\cap = < \sigma >_\cap$ olduğudan $(x, V) \in < \sigma >_\cap$ için,

$$V \cap \alpha \neq \emptyset \text{ ve } V \cap \beta \neq \emptyset \Leftrightarrow V \cap \sigma \neq \emptyset \tag{4.1}$$

dir. (4.1) ifadesi aşağıdaki durumlarda sağlanır:

i) $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \sigma = \beta$,

ii) $\beta \subseteq \alpha \Rightarrow \sigma = \alpha$,

iii) $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \sigma = \alpha \cup \beta$,

iv) $\alpha \neq \beta$ ve $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \sigma = \alpha \cup \beta$.

Her ne kadar (4.1) ifadesi $\sigma \supseteq \alpha \cup \beta$ için sağlansa da $\emptyset \neq \sigma \subseteq \alpha \cup \beta$ olacak şekilde $\sigma \subseteq U$ varlığının gösterilmesi yeterlidir. ■

Tanım 4.18. (Çağman ve diğ., [37]) (F, G) ve (T, H), U üzerinde iki esnek kesişim grup olsun. (F, G) ve (T, H) esnek kesişim gruplarının çarpımı $(F, G) \times (T, H) = (Q, G \times H)$ olarak tanımlanır. Burada

$$Q : G \times H \longrightarrow P(U \times U)$$

$\forall(x, y) \in G \times H$ için $Q(x, y) = F(x) \times T(y)$ ile tanımlı $U \times U$ üzerinde bir esnek kümedir.

Teorem 4.19. (Çağman ve diğ., [37]) Eğer (F, G) ve (T, H), U üzerinde iki esnek kesişim grup ise $(F, G) \times (T, H)$ esnek kümesi de $U \times U$ üzerinde bir esnek kesişim-gruptur.

İspat. Tanım 4.18. göre $\forall(x, y) \in G \times H$ için $(Q, G \times H)(x, y) = F(x) \times T(y)$ olduğundan $\forall(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G \times H$ için,

$$\begin{aligned}
&Q_{G\times H}((x_1, y_1)(x_2, y_2)^{-1}) \\
&\quad = Q(x_1x_2^{-1}, y_1y_2^{-1}) \\
&\quad = F(x_1x_2^{-1}) \times T(y_1y_2^{-1}) \\
&\quad \supseteq (F(x_1) \cap F(x_2)) \times (T(y_2) \cap T(y_1)) \\
&\quad = (F(x_1) \times T(y_1)) \cap (F(x_2) \cap T(y_2)) \\
&\quad = Q_{G\times H}(x_1, y_1) \cap Q_{G\times H}(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

Bundan dolayı $F_G \times T_H = Q_{G\times H}$, $U \times U$ üzerinde bir esnek kesişim gruptur. ■

Teorem 4.20. G_1 ve G_2 iki grup, $(F, G_1), U_1$ üzerinde ve $(T, G_2), U_2$ üzerinde esnek kümeler olsun. $< \alpha >_\cap \,\widetilde{\leq} G_1$ ve $< \beta >_\cap \,\widetilde{\leq} G_2$ olacak şekilde $\alpha \subseteq U_1$ ve $\beta \subseteq U_2$ varsa:

$$< \alpha >_\cap \times < \beta >_\cap = < \alpha \times \beta >_\cap$$

dir. Yani iki üretilmiş esnek kesişim alt grubunun çarpımları da üretilmiş esnek kesişim alt gruptur.

İspat. $<\alpha>_\cap \widetilde{\leq} G_1$ ve $<\beta>_\cap \widetilde{\leq} G_2$ olsun. Önerme 4.10. dan $(F, G_1)^{\cap\alpha} \leq G_1$ ve $(T, G_2)^{\cap\beta} \leq G_2$ ve ayrıca Teorem 4.19. den

$$(F, (F, G_1)^{\cap\alpha}) \times (T, (T, G_2)^{\cap\beta}) \widetilde{\leq} G_1 \times G_2$$

dir.

$(x, F(x)) \in <\alpha>_\cap$ ve $(y, T(y)) \in <\beta>_\cap$ olsun. Dolayısıyla $F(x) \cap \alpha \neq \emptyset$ ve $T(y) \cap \beta \neq \emptyset$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} F(x) \cap \alpha \neq \emptyset \text{ ve } T(y) \cap \beta \neq \emptyset &\Leftrightarrow (F(x) \times T(y)) \cap (\alpha \times \beta) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (x, F(x)) \in <\alpha>_\cap \text{ ve } (y, T(y)) \in <\beta>_\cap \\ &\Leftrightarrow ((x, y), F(x) \times T(y)) \in (H, (H, G_1 \times G_2)^{\cap(\alpha\times\beta)}) \end{aligned}$$

Burada,

$$H : G_1 \times G_2 \longrightarrow P(U_1 \times U_2), H(x, y) = F(x) \times T(y)$$

şeklinde tanımlı esnek bir kümedir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

Örnek 4.21. $G_1 = (\mathbb{Z}_4, +)$ grubunu alalım ve (F, G_1), U üzerinde bir esnek küme olsun. $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ cep telefonu markalarını belirtmek üzere $F : G_1 \longrightarrow P(U)$;
$F(\bar{0}) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $F(\bar{1}) = \{u_0\}$, $F(\bar{2}) = \{u_1, u_3\}$, $F(\bar{3}) = \{u_2\}$ ve $\alpha = \{u_3\}$ olmak üzere, $(F, G_1)^{\cap\alpha} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ ve

$$<\alpha>_\cap = \{(\bar{0}, \{u_1, u_2, u_3\}), (\bar{2}, \{u_1, u_3\})\} \widetilde{\leq} G_1.$$

$G_2 = (\mathbb{Z}_6, +)$ grubunu alalım ve (T, G_2), V üzerinde bir esnek küme olsun. $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ evrensel kümesi cep telefonu özelliklerini belirmek üzere $T : G_2 \longrightarrow P(V)$;
$T(\tilde{0}) = \{v_0, v_1, v_2, v_5\}$, $T(\tilde{1}) = \{v_3, v_4\}$, $T(\tilde{2}) = \{v_4\}$, $T(\tilde{3}) = \{v_0, v_2\}$, $T(\tilde{4}) = \{v_3\}$,
$T(\tilde{5}) = \{v_4\}$ ve $\beta = \{v_2\}$ olmak üzere, $(T, G_2)^{\cap\beta} = \{\tilde{0}, \tilde{3}\}$ ve

$$<\beta>_\cap = \{(\tilde{0}, \{v_0, v_1, v_2, v_5\}), (\tilde{3}, \{v_0, v_2\})\} \widetilde{\leq} G_2$$

dir. Buna göre:

$< \alpha >_{\cap} \times < \beta >_{\cap} = \{((\bar{0},\tilde{0}),\{(u_1,v_0),(u_1,v_1),(u_1,v_2),(u_1,v_5),(u_2,v_0),(u_2,v_1),$
$(u_2,v_2),(u_2,v_5),(u_3,v_0)(u_3,v_1)(u_3,v_2)(u_3,v_5)\}),$
$((\bar{0},\tilde{3}),\{(u_1,v_0),(u_1,v_2),(u_2,v_0),(u_2,v_2),(u_3,v_0),(u_3,v_2)\}),$
$((\bar{2},\tilde{0}),\{(u_1,v_0),(u_1,v_1),(u_1,v_2),(u_1,v_5),(u_3,v_0),(u_3,v_1),(u_3,v_2),(u_3,v_5)\}),$
$((\bar{2},\tilde{3}),\{(u_1,v_0),(u_1,v_2),(u_3,v_0),(u_3,v_2)\})\}$ dir.
$H : G_1 \times G_2 \rightarrow P(U \times V)$ olmak üzere $(H, G_1 \times G_2)$, $U \times V$ üzerinde bir esnek kümedir. Ayrıca $\forall (x,y) \in G_1 \times G_2$ olmak üzere $H(x,y) = F(x) \times T(y)$ dir. Buna göre $\alpha \times \beta = \{u_3, v_2\}$ için $< \alpha \times \beta >_{\cap} = < \alpha >_{\cap} \times < \beta >_{\cap}$ olduğu görülür.

5. BİJEKTİF ESNEK MATRİSLER VE İŞLEMLERİ

Bu bölümde, (Gong ve diğ., [33]) makalesinde verilen, esnek kümelerin özel bir hali olan bijektif esnek kümeler ele alınmıştır. Ayrıca (Kamacı ve diğ., [34]) makalesinde verilen bijektif esnek işlemler ve bijektif esnek matrisler yardımıyla elde edilmiş bir karar verme metodu tanıtılmıştır. 8. bölümde bu karar verme metodu α-*kesişim* yardımıyla geliştirilmiş ve yeni bir algoritma inşa edilmiştir. Aksi belirtilmedikçe 5., 6., 7. ve 8. bölümlerdeki tüm tanım, teorem ve örnekler (Kamacı ve diğ., [34]) kaynağından alınmıştır.

Tanım 5.1. (Gong ve diğ., [33]) $(F, B), U$ üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa (F, B)'ye U üzerinde bijektif esnek küme denir:

i) $\bigcup_{e \in B} F(e) = U$.

ii) $e_i, e_j \in B$ ve $e_i \neq e_j$ ise $F(e_i) \cap F(e_j) = \emptyset$.

Bijektif esnek kümeler tüm alternatiflerin kullanıldığı ve farklı parametrelerin farklı alternatiflere yöneldiği özel esnek kümelerdir.

Gösterim 5.2. U üzerindeki bütün bijektif esnek kümeler $BS(U)$ ile gösterilecektir.

Tanım 5.3. $[a_{ij}] \in SM_{n \times m}$ olsun. Eğer

$$v_i([a_{ij}]) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1$$

ise $[a_{ij}]$'ye bijektif esnek matris denir.

Örnek 5.4. Aşağıda verilen $[a_{ij}]_{4\times5}$ esnek matrisi için,

$$[a_{ij}]_{4\times5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$v_1([a_{ij}])$=$v_2([a_{ij}])$=$v_3([a_{ij}])$=$v_4([a_{ij}]) = 1$ olduğundan $[a_{ij}]$ bir bijektif esnek matristir.

Gösterim 5.5. 1. $BSM(U)$, $BS(U)$ kümesinin elemanlarına karşılık gelen tüm bijektif esnek matrislerin kümesini belirtir.

2. $[F, A]$, (F, A) esnek kümesine karşılık gelen esnek matrisi belirtir.

Teorem 5.6. (F, A)'nın U üzerinde bir bijektif esnek küme olması için gerek ve yeter şart $[F, A]$'nın bijektif esnek matris olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $[F, A] = [a_{ij}]_{n\times m}$ esnek matris olsun. Tanım 2.15. ve 2.19. göre $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow u_i \in f(e_j)$. Dolayısıyla $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ için $v_i([a_{ij}]) = 1 \Leftrightarrow u_i \in f(e_j)$ ve $j \neq k$ için $u_i \notin f(e_k)$ dir. Ayrıca $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ için $v_i([a_{ij}]) = 1 \Leftrightarrow \forall u_i \in U$ için en az bir $e_j \in A$ vardır öyle ki $u_i \in f(e_j) \Leftrightarrow \bigcup_{e\in A} F(e) = U$ dir. Sonuç olarak Tanım 5.1. den (F, A) U üzerinde bijektif esnek kümedir. ■

Örnek 5.7. Örnek 5.4. de verilen $[a_{ij}]_{4\times 5}$ esnek matrisine karşılık gelen esnek küme $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ve $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olmak üzere $(F, A) = \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_2, u_3\}), (e_3, \emptyset), (e_4, \{u_4\}), (e_5, \emptyset)\}$ dir. Burada $\bigcup_{e\in A} F(e) = U$ ve $e_i, e_j \in A \ni e_i \neq e_j$ ise $F(e_i) \cap F(e_j) = \emptyset$ olduğundan (F, A) U üzerinde bir bijektif esnek kümedir.

Teorem 5.8. $[a_{ij}] \in BSM_{n\times m_1}$ ve $[b_{ik}] \in BSM_{n\times m_2}$ olsun. Bu durumda,

$$[a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}]$$

çarpımı da bijektif esnek matristir.

İspat. Teorem 2.30. dan ispat elde edilir. ■

Teorem 5.9. $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ evrensel küme olsun. Öyleyse her bir $[a_{ij}] \in BSM(U)$ için

$$[a_{ij}] \curlywedge [1]_{n\times 1} = [1]_{n\times 1} \curlywedge [a_{ij}] = [a_{ij}]$$

dir.

İspat. Tanım 2.21. den ispat elde edilir. ■

Uyarı 5.10. $BSM(U)$ esnek kesişim ve esnek birleşim işlemlerine göre kapalı değildir. Fakat Teorem 2.26. ve Teorem 5.8., 5.9. dan $(BSM(U), \curlywedge)$ bir monoidtir.

Gösterim 5.11. $[a_{ij}] \in BSM_{n\times m}$ olsun. $1 \leq q \leq j$ için $[a_{ij}]$'nin q.sütunu $|a_{ij}|_q$ ile gösterilecektir.

Tanım 5.12. $[a_{ij}] \in BSM_{n\times m_1}$ ve $[b_{ik}] \in BSM_{n\times m_2}$ olsun.

1. Eğer her bir $1 \leq i \leq n$ için $1 \leq q \leq m_1$, $1 \leq r \leq m_2$ olmak üzere $a_{iq} \leq b_{ir}$ sağlanıyorsa $|a_{ij}|_q$'ya $|b_{ik}|_r$'nin alt sütunu denir ve $|a_{ij}|_q \mathrel{\widetilde{\leq}} |b_{ik}|_r$ ile gösterilir.
   Ayrıca, $a_{iq} < b_{ir}$ sağlanıyorsa $|a_{ij}|_q$'ya $|b_{ik}|_r$'nin öz alt sütunu denir ve $|a_{ij}|_q \mathrel{\widetilde{<}} |b_{ik}|_r$ ile gösterilir.

2. Eğer her bir $1 \leq q \leq m_1$ için $|a_{ij}|_q \leq |b_{ik}|_r$ eşitsizliğini sağlayan $r \in \{1, 2, \ldots, m_2\}$ varsa; $[a_{ij}]$, $[b_{ik}]$'nın bir bijektif alt-sütun matrisi olarak adlandırılır ve $[a_{ij}] \mathrel{\widetilde{\sqsubseteq}} [b_{ik}]$ ile gösterilir.

3. $1 \leq q \leq m_1$ ve $1 \leq r \leq m_2$ iken $\forall 1 \leq i \leq n$ için $a_{iq} = b_{ir}$ ise $[a_{ij}]_q$ ya $[b_{ik}]_r$ nin bir eşit sütunu denir ve $[a_{ij}]_q = [b_{ik}]_r$ ile gösterilir.
   Eğer her bir $1 \leq q \leq m_1$ için $[a_{ij}]_q = [b_{ik}]_r$ eşitliğini sağlayan $\exists r \in \{1, 2, \ldots, m_2\}$ varsa $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ bijektif esnek eşit-sütun matrisler olarak adlandırılır ve $[a_{ij}] \mathrel{\widetilde{=}} [b_{ik}]$ ile gösterilir.

Örnek 5.13. Aşağıda verilen $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ bijektif esnek matrisleri göz önüne alalım:

$$[a_{ij}]_{5\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [b_{ik}]_{5\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Burada, $|b_{ik}|_2 = |a_{ij}|_3$ ve $|b_{ik}|_1 \mathrel{\widetilde{>}} |a_{ij}|_2$, $|b_{ik}|_1 \mathrel{\widetilde{>}} |a_{ij}|_1$ olduğundan $[a_{ij}]$, $[b_{ik}]$'nın bijektif esnek alt-sütun matrisidir.

Örnek 5.14. Aşağıda verilen $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ bijektif esnek matrislerini alalım.

$$[a_{ij}]_{5\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, [b_{ik}]_{5\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Burada $|b_{ik}|_2 = |a_{ij}|_1$, $|b_{ik}|_1 = |a_{ij}|_2$ olduğundan dolayı $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ bijektif esnek eşit sütunlu matrislerdir.

Tanım 5.15. $(F, A), (F, B) \in BS(U)$, $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ sırasıyla bu esnek kümelerin bijektif esnek matrisleri olsun.

$[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$'nın Kısıtlandırılmış-Ve Çarpımı $\underline{\curlywedge}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\underline{\curlywedge} : SM_{n\times m_1} \times BSM_{n\times m_2} \longrightarrow BSM_{n\times m_1 m_2}$$

$$[a_{ij}], [b_{ik}] \longrightarrow [a_{ij}] \underline{\curlywedge} [b_{ik}] = [c_{ip}]$$

Burada, $1 \leq r \leq m_1 m_2, 1 \leq s \leq m_1$ ve $1 \leq t \leq m_2$ için $s = \alpha, r = (\alpha - 1)m_2 + t$ öyle ki $\alpha, r \leq \alpha m_2$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $[c_{ip}]$ nin r. sütunu:

$$|c_{ip}|_r = \begin{cases} [a_{ij}]_s & \text{, eğer } |a_{ij}|_s \leq |b_{ik}|_t \\ 0 & \text{, eğer } |a_{ij}|_s \nleq |b_{ik}|_t \end{cases}$$

dir.

Tanım 5.16. $(F, A), (F, B) \in BS(U)$ ve $[a_{ij}]$, $[b_{ik}]$ sırasıyla bu esnek kümelerin bijektif esnek matrisleri olsun.

$[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$'nın Relax-Ve Çarpımı $\widetilde{\curlywedge}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\widetilde{\curlywedge} : BSM_{n\times m_1} \times BSM_{n\times m_2} \longrightarrow SM_{n\times m_1 m_2}$$

$$[a_{ij}], [b_{ik}] \longrightarrow [a_{ij}] \widetilde{\curlywedge} [b_{ik}] = [c_{ip}]$$

Burada, $1 \leq r \leq m_1 m_2, 1 \leq s \leq m_1$ ve $1 \leq t \leq m_2$ için $s = \alpha, r = (\alpha - 1)m_2 + t$ öyle ki $\alpha, r \leq \alpha m_2$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $[c_{ip}]$ nin r. sütunu:

$$|c_{ip}|_r = \begin{cases} 0 & \text{, eğer } |a_{ij}|_s \leq (|b_{ik}|_t)^c \\ |a_{ij}|_s & \text{, eğer } |a_{ij}|_s \nleq (|b_{ik}|_t)^c \end{cases}$$

dir. Burada $([b_{ik}]_t)^c$, $(|b_{ik}|_t)$ matrisinin komplemantıdır ve $[c_{ip}]$ matrisinin tipi $n \times m_1 m_2$ dir.

Örnek 5.17. $[a_{ij}]$ ve $[b_{ik}]$ bijektif esnek matrisleri

$$[a_{ij}]_{4\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, [b_{ik}]_{4\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ verilsin. Bu durumda;

$$[a_{ij}]\curlywedge[b_{ik}] = [c_{ip}]_{4\times6} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}, [a_{ij}]\widetilde{\curlywedge}[b_{ik}] = [d_{ip}]_{4\times6} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 5.18. $[a_{ij}] \in BSM_{n\times m_1}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

(i) $[a_{ij}] \curlywedge [1]_{n\times1}$=$[a_{ij}]$.

(ii) $[a_{ij}] \widetilde{\curlywedge} [1]_{n\times1}$=$[a_{ij}]$.

(iii) $[a_{ij}] \curlywedge [a_{ij}]$=$[a_{ij}]\widetilde{\curlywedge}[a_{ij}]$.

(iv) $[a_{ij}] \curlywedge [a_{ij}]^c$=$[a_{ij}]\widetilde{\curlywedge}[a_{ij}]^c$.

İspat.

(i) $[a_{ij}] \in BSM_{n\times m_1}$ ve $[a_{ij}] \curlywedge [1]_{n\times1} = [c_{ip}]$ olsun. $\forall s \in \{1, 2, \ldots, m_1\}$ için $|a_{ij}|_s \leq |1|$ olduğundan $|a_{ij}|_s = |c_{ip}|_r$ dir. Dolayısıyla $\forall r \in \{1, 2, \ldots, m_1\}$ için $|a_{ij}|_r = |c_{ip}|_r$ olduğundan $[a_{ij}] = [c_{ip}]$ dir. Burada $m_2 = 1$ ve $t = 1$ olduğundan $s = r$ dir.

(ii) $[a_{ij}] \in BSM_{n\times m_1}$ ve $[a_{ij}]\ \widetilde{\curlywedge}\ [1]_{n\times 1} = [c_{ip}]$ olsun. Bu durumda

$$|c_{ip}|_r = \begin{cases} |0| & \text{, eğer } |a_{ij}|_s{=}|0| \\ |a_{ij}|_s & , |a_{ij}|_s \neq |0| \end{cases}$$

olduğundan $|a_{ij}|_s = |c_{ip}|_r$ dir. Ayrıca $t = 1$ ve $m_2 = 1$ olduğundan $r = s$ dir. Dolayısıyla $\forall r \in \{1, 2, \ldots, m_1\}$ için $|a_{ij}|_r = |c_{ip}|_r$ olduğundan $[c_{ip}] = [a_{ij}]$ dir.

(iii) $[a_{ij}] \in BSM_{n\times m_1}$ bijektif esnek matris ve $[c_{ip}] = [a_{ij}] \ \underline{\curlywedge}\ [a_{ij}]$ ve $[d_{iq}] = [a_{ij}]\ \widetilde{\curlywedge}\ [a_{ij}]$ olsun. $\forall s, t \in \{1, 2, \ldots, m_1\}$ için $|a_{ij}|_s \not\leq |a_{ij}|_t$ oluyorsa , $[a_{ij}]$ bijektif matris olduğundan $|a_{ij}|_s \leq (|a_{ij}|_t)^c$ dir. Bundan dolayı

$$|c_{ip}|_r = |d_{iq}|_r = |a_{ij}|_s \tag{5.1}$$

Ayrıca $\forall s, t \in \{1, 2, \ldots, m_1\}$ için $|a_{ij}|_s \not\leq |a_{ij}|_t$ ise $[a_{ij}]$ bijektif matris olduğundan $|a_{ij}|_s \not\leq (|a_{ij}|_t)^c$ dir. Bundan dolayı

$$|c_{ip}|_r = |d_{iq}|_r = |0| \tag{5.2}$$

dir. (5.1) ve (5.2) den $[a_{ij}] \ \underline{\curlywedge}\ [a_{ij}] = [a_{ij}]\widetilde{\curlywedge}[a_{ij}]$ elde edilir.

(iv) $[a_{ij}] \in BSM_{n\times m_1}$ bijektif esnek matris ve $[c_{ip}] = [a_{ij}] \ \underline{\curlywedge}\ [a_{ij}]^c$ ve $[d_{iq}] = [a_{ij}]\ \widetilde{\curlywedge}\ [a_{ij}]^c$ olsun. $\forall s, t \in \{1, 2, \ldots, m_1\}$ için $|a_{ij}|_s \leq (|a_{ij}|_t)^c$ ise, $[a_{ij}]$ bijektif matris olduğundan $|a_{ij}|_s \not\leq (|a_{ij}|_t)^c$ dir. Bundan dolayı

$$|c_{ip}|_r = |d_{iq}|_r = |a_{ij}|_s \tag{5.3}$$

Ayrıca $\forall s, t \in \{1, 2, \ldots, m_1\}$ için $|a_{ij}|_s \not\leq (|a_{ij}|_t)^c$ ise, $[a_{ij}]$ bijektif matris olduğundan $|a_{ij}|_s \leq |a_{ij}|_t$ dir. Bundan dolayı

$$|c_{ip}|_r = |d_{iq}|_r = |0| \tag{5.4}$$

dir. (5.3) ve (5.4) den $[a_{ij}]\ \widetilde{\curlywedge}\ [a_{ij}]^c = [a_{ij}]\underline{\curlywedge}[a_{ij}]^c$ elde edilir.

6. BİJEKTİF ESNEK KARAR SİSTEMİ

Bu bölümde, yoğunluk ölçüm fonksiyonu tanımlanmış ve bir bijektif esnek matrisin diğeri üzerine yoğunluk oranı hesaplanmıştır. Ayrıca, bijektif esnek karar sistemi ve bijektif esnek karar sistemi yoğunluğu kavramları incelenmiştir.

Tanım 6.1. (Kamacı ve diğ., [22]) $[c_{ij}] \in SM_{n\times m}$ bir esnek matris olsun. M_r max-satır fonksiyonu:

$$M_r\colon SM_{n\times m} \longrightarrow SM_{n\times 1}\ ,\ M_r([c_{ij}]) = [d_{i1}]$$

burada $d_{i1} = max_{j\in\{1,2,\ldots,m\}} c_{ij}$ şeklinde tanımlanır. $M_r([c_{ij}])$ sütun esnek matrisine *max-satır esnek matrisi* denir.

Örnek 6.2.

$$[a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}] = [c_{ip}]_{4\times 6} = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{bmatrix}$$

esnek matrisinin max-satır matrisi,

$$M_r([c_{ip}]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Tanım 6.3. (F, A) ve (G, B) bijektif esnek kümelere karşılık gelen bijektif esnek matrisler sırasıyla $[F, A]$ ve $[G, B]$ olsun. $[F, A] \curlywedge [G, B] = [c_{ij}]$ nin max-satır esnek matrisi $M_r([c_{ij}]) = [d_{i1}]$ olsun. $[F, A]$ esnek matrisinin $[G, B]$ esnek matrisi üzerine *yoğunluk ölçüm fonksiyonu*

$$\begin{aligned} d_f : SM_{n\times 1} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [d_{i1}] &\longrightarrow d_f([d_{i1}]) = \sum_{i=1}^{n} d_{i1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 6.4. $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere U üzerindeki (F, A) ve (G, B) bijektif esnek kümelerin esnek matrisleri sırasıyla $[F, A]$ ve $[G, B]$ olsun. $[F, A]$'nın $[G, B]$ üzerine *yoğunluk oranı* τ:

$$\tau = \delta([F, A]; [G, B]) = \tfrac{d_f(M_r([F,A] \curlywedge [G,B]))}{|U|}$$

sayısıdır. Burada $0 \leq \tau \leq 1$ olduğu açıktır.
Yoğunluk kavramı, bijektif esnek matrisin diğeri üzerindeki etki derecesini tanımlamaktadır.
Eğer τ=1 ise $[F, A]$ nın $[G, B]$ üzerinde tam yoğun olduğu söylenir.
Eğer τ=0 ise $[F, A]$ nın $[G, B]$ üzerinde sıfır yoğun olduğu söylenir.

Örnek 6.5. $[a_{ij}]_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix}, [b_{ik}]_{4\times 2} = \begin{bmatrix} 1\ 0 \\ 0\ 1 \\ 1\ 0 \\ 0\ 1 \end{bmatrix}$ bijektif esnek matrisleri verilsin.

$$[a_{ij}] \curlywedge [b_{ik}] = [c_{ip}]_{4\times 6} = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{bmatrix}, M_r([c_{ip}]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$[F, A] = [a_{ij}]$ ve $[G, B] = [b_{ik}]$ bijektif esnek matrisleri için;

$$\tau = \delta([F, A]; [G, B]) = \frac{d_f(M_r([c_{ip}])}{|U|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

dir.

Gösterim 6.6. Bundan sonra, U evrensel kümesi üzerinde $i, j = 1, \ldots, r$ için ve $i \neq j$ iken $E_i \cap E_j = \emptyset$ olmak üzere (F_i, E_i) bijektif esnek kümelerine karşılık gelen r tane $[F_i, E_i]$ bijektif esnek matrisini gösterecektir ve $[F, E] = [F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2] \curlywedge \ldots \curlywedge [F_r, E_r] = \bigwedge_{i=1}^{r}[F_i, E_i]$ alınacaktır.

Tanım 6.7. $\forall\, i = 1, 2, \ldots, r$ için $B \cap E_i = \emptyset$ olmak üzere U üzerinde (G, B) esnek kümesine karşılık gelen bijektif esnek matris $[G, B]$ olsun. $([F, E]; [G, B] : U)$, U üzerinde *bijektif esnek karar sistemi* ve $[G, B]$ *karar esnek matrisi* olarak adlandırılır.

Tanım 6.8. $[F, E]$'nin $[G, B]$ üzerindeki yoğunluk oranı $([F, A]; [G, B] : U)$ *bijektif esnek karar sisteminin yoğunluğu* olarak adlandırılır ve $\tau = \delta([F, E]; [G, B])$ şeklinde formüle edilir.

Tanım 6.9. $([F, E]; [G, B] : U)$ nin bijektif esnek karar yoğunlu τ olsun. Eğer $m < r$ ve $\delta(\bigwedge_{i=1}^{m} ([F_i, E_i]; [G, B])) = \tau$ ise $(\bigwedge_{i=1}^{m} ([F_i, E_i]; [G, B]))$, $([F, E]; [G, B] : U)$ nun bir *indirgenmiş bijektif esnek karar sistemi* olarak adlandırılır.
Bu tanıma göre, karar vermeyi etkilemeyen esnek matrisler elde edilir. Böylece, bu matrisleri üreten parametrelerin ortadan kaldırılması sağlanmıştır.

Örnek 6.10. $[F_1, E_1]$, $[F_2, E_2]$, $[F_3, E_3]$ ve $[G, B]$ bijektif esnek matrisler:

$$[F_1, E_1] = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \end{bmatrix}, [F_2, E_2] = \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \\ 0\,1 \end{bmatrix}, [F_3, E_3] = \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \\ 1\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \end{bmatrix}, [G, B] = \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$[F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2] = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \end{bmatrix} \curlywedge \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \\ 0\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

$$([F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2]) \curlywedge [F_3, E_3] = [F, E] = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} \curlywedge \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \\ 1\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

$$[F, E] \underline{\curlywedge} [G, B] = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} \underline{\curlywedge} \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

$$M_r([F, E] \underline{\curlywedge} [G, B]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_f(M_r([F, E] \underline{\curlywedge} [G, B])) = 3$$

$$([F_1,E_1] \curlywedge [F_2,E_2])\underline{\curlywedge}[G,B] = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} \underline{\curlywedge} \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

$$M_r(([F_1,E_1] \curlywedge [F_2,E_2])\underline{\curlywedge}[G,B]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d_f(M_r(([F_1,E_1] \curlywedge [F_2,E_2])\underline{\curlywedge}[G,B]) = 3$$

$$\tau = \delta([F,E];[G,B]) = \frac{d_f(M_r([F,E]\underline{\curlywedge}[G,B]))}{|U|} = \frac{3}{5}$$

$$\delta([F_1,E_1],[F_2,E_2];[G,B]) = \frac{d_f(M_r([F,E]\underline{\curlywedge}[G,B]))}{|U|} = \frac{3}{5} = \tau$$

Örnekte görüldüğü gibi $[F_3,E_3]$ sistemin yoğunluk oranını etkilemez. Bu nedenle E_3 parametre kümesinin kararı etkilemediği anlaşılmaktadır.

Gösterim 6.11. $[G,B]$ nin t. sütun matrisi ve $[H,C]$ nin r. sütun matrisi sırasıyla $|G,B|_t$ ve $|H,C|_r$ ile gösterilecektir.

Tanım 6.12. $[H,C] = \bigwedge_{i=1}^{m} [F_i,E_i]$ ve $([F,E];[G,B] : U)$ nun indirgenmiş bijektif esnek karar sistemi $([H,C];[G,B] : U)$ olsun. Eğer $|H,C|_r \,\widetilde{\leq}\, |G,B|_t$ ise

$$\frac{d_f(|H,C|_r)}{d_f(|G,B|_t)}$$

oranına $[H,C]$ tarafından belirlenen bir karar bileşeni denir ve karar bileşeni etki oranını belirtir.

Burada $|B|$ ve $|C|$ sırasıyla B, C kümelerinin eleman sayısını göstermek üzere, $t \leq |B|$ ve $r \leq |C|$ dir.

Örnek 6.13. $[F_1,E_1]=\begin{bmatrix}1\,0\,0\\1\,0\,0\\0\,1\,0\\0\,0\,1\\1\,0\,0\end{bmatrix}, [F_2,E_2]=\begin{bmatrix}1\,0\\1\,0\\1\,0\\0\,1\\0\,1\end{bmatrix}, [F_3,E_3]=\begin{bmatrix}1\,0\\1\,0\\1\,0\\1\,0\\0\,1\end{bmatrix}, [G,B]=\begin{bmatrix}1\,0\\0\,1\\1\,0\\0\,1\\1\,0\end{bmatrix}$

bijektif esnek matrisleri göz önünde bulunduralım. $[H,C]=[F_1,E_1]\curlywedge[F_2,E_2]$ olsun.

$$[H,C]=\begin{bmatrix}1\,0\,0\\1\,0\,0\\0\,1\,0\\0\,0\,1\\1\,0\,0\end{bmatrix}\curlywedge\begin{bmatrix}1\,0\\1\,0\\1\,0\\0\,1\\0\,1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\,0\,0\,0\,0\,0\\1\,0\,0\,0\,0\,0\\0\,0\,1\,0\,0\,0\\0\,0\,0\,0\,0\,1\\0\,1\,0\,0\,0\,0\end{bmatrix}$$

$|H,C|_2\widetilde{\leq}|G,B|_1$ olduğundan

$$\frac{d_f(|H,C|_2)}{d_f(|G,B|_1)}=\frac{1}{3}$$

$|H,C|_6\widetilde{\leq}|G,B|_2$ olduğundan

$$\frac{d_f(|H,C|_6)}{d_f(|G,B|_1)}=\frac{1}{2}$$

elde edilir.

7. ÇOKLU-BİJEKTİF DİLSEL ESNEK KARAR SİSTEMİ

Bu bölümde, dilsel küme ve dilsel değerli fonksiyon kavramları tanıltılmış, ayrıca, çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi inşa edilmiştir. Daha sonra, indirgenmiş bijektif esnek matrisinin her bir sütununun belirleyici etki oranını hesaplayan bir formül verilmiştir. Son olarak, bu kavramları kullanarak yeni bir karar yöntemi oluşturulmuştur.

Tanım 7.1. $\ell \in \mathbb{N}$ olmak üzere $B = \{t_0, t_1, \ldots, t_{\ell-1}, t_\ell, t_{\ell+1}, \ldots, t_{2\ell}\}$ sonlu, tam sıralı bir küme olsun. B bir *dilsel küme* olarak adlandırılır. Bu küme aşağıdaki karakteristik özellikleri sağlar:

1. $\forall i, j \in \{0, 1, \ldots, 2\ell\}$ için $i \leq j \iff t_i \leq t_j$.
2. $i \in \{0, 1, \ldots, 2\ell\}$ için t_i elemanının olumsuzu $t_{2\ell-i}$ dir.
3. Eğer $t_j \leq t_i$ ise $max(t_i, t_j) = t_i$ dir.
4. Eğer $t_i \leq t_j$ ise $min(t_i, t_j) = t_i$ dir.

Burada t_ℓ terimi B kümesinin orta terimi olarak adlandırılır.

Tanım 7.2. $B = \{t_0, t_1, \ldots, t_{\ell-1}, t_\ell, t_{\ell+1}, \ldots, t_{2\ell}\}$ dilsel küme olmak üzere

$$\begin{aligned} f_L : [0,1] &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f_L(x) = \begin{cases} t_{[|2\ell x|]} & , 0 \leq x < 0,5 \\ t_\ell & , x = 0,5 \\ t_{-[|-2\ell x|]} & , 0,5 < x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ile tanımlı f_L fonksiyonuna B kümesine bağlı bir *dilsel-değerli fonksiyon* denir. Burada $[|2\ell x|]$, $2\ell x$ reel sayısının tam değerini gösterir.

Örnek 7.3. $\ell = 2$ için B=$\{t_0 =$ çok kötü, $t_1 =$ kötü, $t_2 =$ normal, $t_3 =$ iyi, $t_4 =$ çok iyi$\}$ dilsel küme olsun. Burada $t_2 =$ normal B kümesinin orta terimidir. B kümesinin dilsel-değerli fonksiyonu f_L alınırsa, $x = 0,43$ değeri için $f_L(0,43)$ terimi $\ell = 2$ olduğundan

$f_L(0,43) = t_{[|2.2.0,43|]} = t_1$ olur. Aynı şekilde $f_L(0) = t_0$, $f_L(0,2) = t_0$, $f_L(0,5) = t_2$, $f_L(0,625) = t_3$, $f_L(0,75) = t_3$, $f_L(1) = t_4$ dir.

NOT. Şu andan itibaren B kümesi bir Dilsel küme olarak alınacaktır.

Tanım 7.4. U üzerindeki bijektif esnek kümeler $(G_1, B), (G_2, B), \ldots, (G_k, B)$ olmak üzere bu kümelere karşılık gelen bijektif esnek matrisler sırasıyla $[G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B]$ olsun. Ayrıca $i = 1, 2, \ldots, r$ için $B \cap E_i = \emptyset$ ve U üzerindeki bjektif dilsel esnek karar verme sistemleri $([F, E]; [G_1, B] : U)$, $([F, E]; [G_2, B] : U)$, ..., $([F, E]; [G_k, B] : U)$ olsun. Bu durumda U üzerindeki, $[G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B]$ *dilsel-çoklu karar esnek matrisleri* ve $([F, E]; [G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B] : U)$ *çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi* olarak adlandırılır.

Tanım 7.5. $\tau_1 = \delta([F, E]; [G_1, B])$, $\tau_2 = \delta([F, E]; [G_2, B])$, ..., $\tau_k = ([F, E]; [G_k, B])$ sırasıyla $[F, E]$'nin $[G_1, B]$ üzerine, $[F, E]$'nin $[G_2, B]$ üzerine, $[F, E]$'nin $[G_k, B]$ üzerine bijektif dilsel esnek karar sistemi yoğunlukları olsun. $[F, E]$ 'nin $[G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B]$ üzerine yoğunluğu, $([F, E]; [G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B] : U)$'nin *çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi yoğunluğu* olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi formüle edilir:

$$\Re = \delta([F, E]; [G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B] : U) = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k}{k}.$$

Tanım 7.6. $([F, E]; [G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B] : U)$ bir çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi olsun. Eğer $m \leq r$ ve $\delta([F, E]; [G_1, B]) = \delta(\bigwedge_{i=1}^{m}[F_i, E_i]; [G_1, B])$, $\delta([F, E]; [G_2, B]) = \delta(\bigwedge_{i=1}^{m}[F_i, E_i]; [G_2, B])$, ..., $\delta([F, E]; [G_k, B]) = \delta(\bigwedge_{i=1}^{m}[F_i, E_i]; [G_k, B])$ ise bu durumda $(\bigwedge_{i=1}^{m}[F_i, E_i]; [G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B] : U)$, $([F, E]; [G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B] : U)$'nin *indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi* olarak adlandırılır.

Örnek 7.7. $[F_1, E_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[F_2, E_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[F_3, E_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ bijektif esnek matrisleri göz önüne alalım. B={t_0 = küçük, t_1 = orta, t_2 = büyük } dilsel küme ve $[G_1, B]$, $[G_2, B]$ aşağıda verilen bijektif esnek matrisler olsunlar.

$$[G_1, B] = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 0 \end{bmatrix}, [G_2, B] = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{bmatrix}.$$

$([F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2]) \curlywedge [F_3, E_3] = [F, E]$ olmak üzere;

$$[F, E]\underline{\curlywedge}[G_1, B] = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix} \underline{\curlywedge} \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_r([F, E]\underline{\curlywedge}[G_1, B]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d_f(M_r([F, E]\underline{\curlywedge}[G_1, B])) = 3$$

$$[F,E]\underline{\curlywedge}[G_2,B]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\underline{\curlywedge}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_r([F,E]\underline{\curlywedge}[G_2,B])=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d_f(M_r([F,E]\underline{\curlywedge}[G_2,B]))=5$$

$$([F_1,E_1] \curlywedge [F_2,E_2]) \underline{\curlywedge} [G_1,B] = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix} \underline{\curlywedge} \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$M_r(([F_1,E_1] \curlywedge [F_2,E_2]) \underline{\curlywedge} [G_1,B]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d_f(M_r(([F_1,E_1] \curlywedge [F_2,E_2]) \underline{\curlywedge} [G_1,B]) = 3$$

$$([F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2]) \underline{\curlywedge} [G_2, B] = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} \underline{\curlywedge} \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

$$M_r(([F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2]) \underline{\curlywedge} [G_2, B]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d_f(M_r(([F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2]) \underline{\curlywedge} [G_2, B]) = 5$$

$\delta([F, E]; [G_1, B])$= $\delta([F, E_1] \curlywedge [F, E_2]; [G_1, B]) = \frac{3}{5}$ ve
$\delta([F, E]; [G_2, B])$ = $\delta([F, E_1] \curlywedge [F, E_2]; [G_2, B]) = \frac{5}{5} = 1$ olduğundan $([F, E_1] \curlywedge [F, E_2]; [G_1, B], [G_2, B]; U)$, $([F, E]; [G_1, B], [G_2, B]; U)$ nin indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemidir.

NOT. $\lambda \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için $[G_\lambda, B]$ nin t_ε.sütunu $[G_\lambda, B]_{t_\varepsilon}$ ile gösterilecektir.

Tanım 7.8. $[H, C] = \bigwedge_{i=1}^{m} [F_i, E_i]$ ve $([F, E]; [G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B] : U)$ nin indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek matris sistemi $([H, C]; [G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B] : U)$ olsun.

$I_r = \{1 \leq \lambda \leq k : |H, C|_r \widetilde{\leq} |G_\lambda, B|_{t_\varepsilon}, 0 \leq \varepsilon < \ell\}$ için,

$$\eta_r = \sum_{\lambda \in \mathbf{I}} (\ell - \varepsilon) \frac{d_f(|H, C|_r)}{d_f(|G_\lambda, B|_{t_\varepsilon})}$$

r. sütun için karar bileşeninin negatif etki oranı anlamına gelir ve $[H,C]$ tarafından belirlenmiş *negatif karar bileşeni* olarak adlandırılır.(burada ε, λ 'ya bağlı olarak değişir.)

$J_r = \{1 \leq \lambda \leq k : |H,C|_r \widetilde{\leqq} |G_\lambda, B|_{t_\varepsilon}, \ell \leq \varepsilon \leq 2\ell\}$ için,

$$\sigma_r = \sum_{\lambda \in J} (\varepsilon - \ell) \frac{d_f(|H,C|_r)}{d_f(|G_\lambda, B|_{t_\varepsilon})}$$

r. sütun için karar bileşeninin pozitif etki oranı anlamına gelir ve $[H,C]$ tarafından belirlenmiş *pozitif karar bileşeni* olarak adlandırılır.(burada ε, λ 'ya bağlı olarak değişir.)
Burada, $t_\varepsilon \leq |B|$ ve $r \leq |C|$ dir.

Tanım 7.9. Tanım 7.8. de verilen $([F,E];[G_1,B],[G_2,B],\ldots,[G_k,B]:U)$, η_r ve σ_r için

$$P_r = \frac{\sigma_r - \eta_r}{2\ell(|I|_r + |J|_r)}$$

sayısına $[H.C]$ 'nin r.sütununun *belirleyici etki oranı* denir. Burada $|I|_r$ ve $|J|_r$, r.sütun için I ve J nin eleman sayısını gösterir. Burada dilsel karar değeri $x = \frac{1}{2} + P_r$ için

i. $P_r > 0$ ise, $[H,C]$'nin r.sütununu oluşturan parametreler $f_L(x) = t_{-[|-2\ell x|]}$'ye karşılık gelen dilsel parametreyi etkiler.

ii. $P_r = 0$ ise, $[H,C]$'nin r.sütununu oluşturan parametreler $f_L(x) = t_\ell$'ye karşılık gelen dilsel parametreyi etkiler.

iii. $P_r < 0$ ise, $[H,C]$'nin r.sütununu oluşturan parametreler $f_L(x) = t_{[|2\ell x|]}$'ye karşılık gelen dilsel parametreyi etkiler.

Örnek 7.10. $[F_1,E_1] = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \end{bmatrix}, [F_2,E_2] = \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \\ 0\,1 \end{bmatrix}, [F_3,E_3] = \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \\ 1\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \end{bmatrix},$

$$[G_1,B]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\ [G_2,B]=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

bijektif esnek matrislerini göz önünde bulunduralım. $([F,E_1]\curlywedge[F,E_2];[G_1,B],[G_2,B];U)$, $([F,E];[G_1,B],[G_2,B];U)$ nin indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi olduğunu Örnek 7.7. den biliyoruz. B={t_0 =küçük , t_1 =orta , t_2 =büyük } dilsel küme ve $[H,C]$=$[F_1,E_1]\curlywedge[F_2,E_2]$ olsun.

$r=2$ için $|H,C|_2\widetilde{\leq}|G_1,B|_1$ olduğundan negatif karar bileşeni

$$\eta_2=\frac{d_f(|H,C|_2)}{d_f(|G_1,B|_1)}=\frac{1}{3}$$

$r=2$ için $|H,C|_2\widetilde{\leq}|G_2,B|_3$ olduğundan pozitif karar bileşeni

$$\sigma_2=\frac{d_f(|H,C|_2)}{d_f(|G_2,B|_3)}=1$$

dir. Bundan dolayı

$$P_2=\frac{\sigma_2-\eta_2}{2.1.2}=\frac{1}{6}$$

dir. $P_2>0$ olduğundan $x=\frac{2}{3}$ dilsel karar değeri için t_2'ye bağlı olarak $[H,C]$'nin 2.sütunu oluşturan parametrelerin dilsel parametresi "büyük" e etki ettiğini söyleyebiliriz.

Şimdi, aşağıdaki algoritmayı kullanarak yeni bir karar yöntemi oluşturabiliriz.

Algoritma 7.11. Çoklu-Bijektif Dilsel Karar Sisteminin Algoritması:

Adım 1. $(F_i,E_i),(G_1,B),(G_2,B),\ldots,(G_k,B)$ bijektif esnek kümeleri oluşturulur.

Adım 2. $[F_i,E_i],[G_1,B],[G_2,B],\ldots,[G_k,B]$ bijektif esnek matrisleri oluşturulur.

Adım 3. $([F,E],[G_1,B];U)$, $([F,E],[G_2,B];U)$, $\ldots$, $([F,E],[G_k,B];U)$ herbirinin bijektif dilsel esnek karar sistem yoğunluğu hesaplanır.

Adım 4. Eğer mümkünse $([F, E]; [G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B] : U)$ 'nin indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi bulunur.

Adım 5. Pozitif, negatif karar bileşenleri elde edilir, belirleyici etki oranları ve dilsel karar değerleri hesaplanır.

Adım 6. Dilsel parametreler, dilsel karar değeri ile belirlenir.

8. ÇOKLU-BİJEKTİF DİLSEL KARAR SİSTEMİNİN BİR UYGULAMASI

Örnek 8.1. Bir şirketin K, L ve M ülkelerine cep telefonu ihraç etmek istediğini varsayalım. Bu amaçla, şirket halihazırda bu ülkelere cep telefonu ihracatı yapan yedi şirketin cep telefonunun son versiyonunun özelliklerini ve müşteri memnuniyet oranlarını inceliyor. Bu incelemeden sonra, şirket bu memnuniyet oranlarını göz önünde bulundurarak cep telefonları üretmek istiyor.

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$, yedi şirketin bu ülkelere ihraç ettiği cep telefonlarının en son sürümünü tanımlayan alternatif kümeyi ve $E = E_1 \times E_2 \times E_3$ parametre kümesini belirtsin. Burada E_1 cep telefonunun kamera kalitesini, E_2 cep telefonunun ağırlığını ve kalınlığını, E_3 cep telefonunun işlemci hızını tanımlar. Bu parametre kümeleri $E_1 =\{x_1 =$normal, $x_2 =$iyi, $x_3 =$çok iyi$\}$, $E_2 =\{y_1 =$hafif-ince, $y_2 =$ağır-kalın$\}$ ve $E_3 =\{z_1 =$hızlı, $z_2 =$aşırı hızlı$\}$ dir. Ayrıca, B=$\{t_0$=çok kötü, $t_1 =$kötü, $t_2 =$biraz kötü, $t_3 =$orta, $t_4 =$ biraz iyi, $t_5 =$iyi, $t_6 =$çok iyi$\}$ dilsel kümesi cep telefonlarının müşteri memnuniyet aralıklarını belirtir.

Adım 1. Şirket aşağıdaki bijektif esnek kümelere sahiptir:

(F_1, E_1)=$\{(x_1, \{u_4, u_7\}), (x_2, \{u_3, u_6\}), (x_3, \{u_1, u_2, u_5\})\}$,

(F_2, E_2)=$\{(y_1, \{u_1, u_4, u_5, u_6\}), (y_2, \{u_2, u_3, u_7\})\}$,

(F_3, E_3)=$\{(z_1, \{u_1, u_2, u_5\}), (z_2, \{u_3, u_4, u_6, u_7\})\}$,

(G_1, B)=$\{(t_1, \{u_4\}), (t_3, \{u_3, u_7\}), (t_4, \{u_2, u_6\}), (t_5, \{u_1, u_5\})\}$ K ülkesi için,

$(G_2, B) = \{(t_1, \{u_7\}), (t_2, \{u_3, u_4\}), (t_3, \{u_2\}), (t_4, \{u_5\}), (t_5, \{u_6\}), (t_6, \{u_1\})\}$ L ülkesi için,

$(G_3, B) = \{(t_0, \{u_7\}), (t_3, \{u_4\}), (t_4, \{u_3, u_6\}), (t_6, \{u_1, u_2, u_5\})\}$ M ülkesi için.

Adım 2. Şirket için bijektif esnek matrisler aşağıdaki gibidir.

$$[F, E] = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

$$[G_1, B] = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$[G_2, B] = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$[G_3, B] = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Adım 3. Şirketin herbir bijektif dilsel esnek karar sisteminin yoğunluğu elde edilir.

$$\tau_1 = \delta([F,E];[G_1,B]) = \frac{d_f(M_r((F,E)\underline{\curlywedge}(G_1,B)))}{|U|} = 1$$

$$\tau_2 = \delta([F,E];[G_2,B]) = \frac{d_f(M_r((F,E)\underline{\curlywedge}(G_2,B)))}{|U|} = \frac{5}{7}$$

$$\tau_3 = \delta([F,E];[G_3,B]) = \frac{d_f(M_r((F,E)\underline{\curlywedge}(G_3,B)))}{|U|} = 1$$

Adım 4.

$$\delta([F_1,E_1] \curlywedge [F_2,E_2];[G_1,B]) = 1$$

$$\delta([F_1,E_1] \curlywedge [F_2,E_2];[G_2,B]) = \frac{5}{7}$$

$$\delta([F_1,E_1] \curlywedge [F_2,E_2];[G_3,B]) = 1$$

olduğundan $([F_1,E_1]\curlywedge[F_2,E_2];[G_1,B],[G_2,B],[G_3,B] : U)$ indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemidir.

Adım 5.

$P_1 = -\frac{5}{36}$ olduğundan $x = \frac{13}{36}$ ve $t_{[|2.3.\frac{13}{36}|]} = t_2$ olur. Benzer şekilde;

$$P_2 = -\tfrac{5}{18},\ x = \tfrac{2}{9},\ t_{[|2.3.\frac{2}{9}|]} = t_1$$

$$P_3 = \tfrac{1}{6},\ x = \tfrac{2}{3},\ t_{-[|-2.3.\frac{2}{3}|]} = t_4$$

$$P_4 = 0,\ x = \tfrac{1}{2},\ t_l = t_3$$

$$P_5 = \tfrac{1}{3},\ x = \tfrac{5}{6},\ t_{[|2.3.\frac{13}{36}|]} = t_5$$

$$P_6 = \tfrac{1}{12},\ x = \tfrac{7}{12},\ t_{-[|-2.3.\frac{7}{12}|]} = t_4$$

elde edilir.

Adım 6. Şirket, yakın gelecekte üretilecek olan cep telefonlarının özelliklerini aşağıdakileri kullanarak belirleyebilir.

1. Müşteriler $\frac{13}{36}$ oranında cep telefonunun kamera kalitesi normal ve hafif ince olan telefonlar için biraz kötü demiştir.

2. Müşteriler $\frac{2}{9}$ oranında cep telefonunun kamera kalitesi normal ve ağır kalın olan telefonlar için kötü demiştir.

3. Müşteriler $\frac{2}{3}$ oranında cep telefonunun kamera kalitesi iyi ve hafif ince olan telefonlar için biraz iyi demiştir.

4. Müşteriler $\frac{1}{2}$ oranında cep telefonunun kamera kalitesi iyi ve ağır kalın olan telefonlar orta demiştir.

5. Müşteriler $\frac{5}{6}$ oranında cep telefonunun kamera kalitesi çok iyi ve hafif ince olan telefonlar için iyi demiştir.

6. Müşteriler $\frac{7}{12}$ oranında cep telefonunun kamera kalitesi çok iyi ve ağır kalın olan telefonlar için biraz iyi demiştir.

Örneğin; ($\frac{5}{6}$), şirket kamera kalitesi çok iyi ve hafif ince olan bir cep telefonu ürettiğinde altı müşteriden beşinin memnun olabileceği anlamına geliyor.

Karşılaştırma: Aşağıda verilen algoritma ile Algoritma 7.11. geliştirilerek yeni bir karar yöntemi inşa edilmiştir. Böylece Algoritma 7.11. den daha etkili sonuçlar verdiği görülmüş ve aynı zamanda çözüm yolu da kısalmıştır.

Algoritma 8.2. Sınırlandırılmış Kümelerle Oluşturulan Esnek Karar Verme Algoritması:

Adım 1. $(F_i, E_i), (G_1, B), (G_2, B), \ldots, (G_k, B)$ bijektif esnek kümeleri oluşturulur.

Adım 2. $\alpha \subseteq U$ kümesi belirlenir.

Adım 3. α kümesine göre, $(F_i, E_i)^{\cap\alpha}, (G_1, B)^{\cap\alpha}, (G_2, B)^{\cap\alpha}, \ldots, (G_k, B)^{\cap\alpha}$ esnek kümeleri oluşturulur.

Adım 4. Sınırlandırılmış esnek kümlere göre $[F_i, E_i], [G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B]$ esnek matrisleri oluşturulur.

Adım 5. $([F, E], [G_1, B]; U)$, $([F, E], [G_2, B]; U)$, $\ldots$, $([F, E], [G_k, B]; U)$ herbirinin bijektif dilsel esnek karar sistem yoğunluğu hesaplanır.

Adım 6. Eğer mümkünse $([F, E]; [G_1, B], [G_2, B], \ldots, [G_k, B] : U)$'nin indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi bulunur.

Adım 7. Pozitif, negatif karar bileşenleri elde edilir, belirleyici etki oranları ve dilsel karar değerleri hesaplanır.

Adım 8. Dilsel parametreler, dilsel karar değeri ile belirlenir.

Burada α-*kesişim* yerine problemin türüne göre α-*birleşim*, α-*üst içeren* ve α-*alt içeren* sınırlandırılmış kümeleri de kullanılabilir.

Örnek 8.3. Örnek 8.1. deki karar verme problemini düşünelim.

Adım 1. Örnek 8.1. deki bijektif esnek kümeleri ele alalım.

Adım 2. Burada K,L ve M ülkelerinin ada ülkeleri olduğunu varsayalım. Dolayısıyla telefonların su geçirmezlik özelliğinin olması müşteri memnuniyeti için göz ardı edilemez. Bu özelliği sağlayan telefonlar u_1, u_7 olmak üzere $\alpha = \{u_1, u_7\}$ seçelim.

Adım 3. α kümesine göre sınırlandırılmış esnek kümeler aşağıdaki gibidir.

$$(F_1, E_1)^{\cap\alpha} = \{x_1, x_3\},$$
$$(F_2, E_2)^{\cap\alpha} = \{y_1, y_2\},$$
$$(F_3, E_3)^{\cap\alpha} = \{z_1, z_2\},$$
$$(G_1, B)^{\cap\alpha} = \{t_3, t_5\},$$
$$(G_2, B)^{\cap\alpha} = \{t_1, t_6\},$$
$$(G_3, B)^{\cap\alpha} = \{t_0, t_6\}.$$

Adım 4. Şirket için esnek matrisler aşağıdaki gibidir.

$$[F_1, E_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, [F_2, E_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [F_3, E_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2] = \begin{bmatrix} 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{bmatrix}, [F, E] = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}.$$

$$[G_1, B] = \begin{bmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,0 \\ 0\,1 \\ 0\,0 \\ 1\,0 \end{bmatrix}, [G_2, B] = \begin{bmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \\ 0\,0 \\ 0\,0 \\ 0\,0 \\ 0\,0 \\ 1\,0 \end{bmatrix}, [G_3, B] = \begin{bmatrix} 0\,1 \\ 0\,1 \\ 0\,0 \\ 0\,0 \\ 0\,1 \\ 0\,0 \\ 1\,0 \end{bmatrix}.$$

Adım 5. Şirketin herbir bijektif dilsel esnek karar sisteminin yoğunluğu elde edilir.

$$\tau_1 = \delta([F, E]; [G_1, B]) = \frac{d_f(M_r((F, E)\underline{\curlywedge}(G_1, B)))}{|U|} = \frac{3}{7}$$

$$\tau_2 = \delta([F, E]; [G_2, B]) = \frac{d_f(M_r((F, E)\underline{\curlywedge}(G_2, B)))}{|U|} = \frac{1}{7}$$

$$\tau_3 = \delta([F, E]; [G_3, B]) = \frac{d_f(M_r((F, E)\underline{\curlywedge}(G_3, B)))}{|U|} = \frac{4}{7}$$

Adım 6.

$$\delta([F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2]; [G_1, B]) = \frac{3}{7}$$

$$\delta([F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2]; [G_2, B]) = \frac{1}{7}$$

$$\delta([F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2]; [G_3, B]) = \frac{4}{7}$$

olduğundan $([F_1, E_1] \curlywedge [F_2, E_2]; [G_1, B], [G_2, B], [G_3, B] : U)$ indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemidir.

Adım 7. α kümesi ile sınırlandırmalar yapıldığı için bazı P değerleri hesaplanamaz.

$P_2 = -\frac{5}{18}$ olduğundan $x = \frac{2}{9}$ ve $t_{[|2.3.\frac{2}{9}|]} = t_1$ olur. Benzer şekilde;

$$P_5 = \frac{1}{3},\ x = \frac{5}{6},\ t_{[|2.3.\frac{5}{6}|]} = t_5$$

$$P_6 = \frac{1}{6},\ x = \frac{2}{3},\ t_{-[|-2.3.\frac{2}{3}|]} = t_4$$

elde edilir.

Adım 6. Şirket, yakın gelecekte üretilecek olan cep telefonlarının özelliklerini aşağıdakileri kullanarak belirleyebilir.

1. Müşteriler $\frac{2}{9}$ oranında cep telefonunun kamera kalitesi normal ve ağır kalın olan telefonlar için kötü demiştir.
2. Müşteriler $\frac{5}{6}$ oranında cep telefonunun kamera kalitesi çok iyi ve hafif ince olan telefonlar için iyi demiştir.
3. Müşteriler $\frac{2}{3}$ oranında cep telefonunun kamera kalitesi çok iyi ve ağır kalın olan telefonlar için biraz iyi demiştir.

Örneğin; ($\frac{5}{6}$), şirket kamera kalitesi çok iyi ve hafif ince olan bir cep telefonu ürettiğinde altı müşteriden beşinin memnun olabileceği anlamına geliyor.

KAYNAKLAR

[1]. Molodtsov, D., 1999, Soft set theory-first results, *Computers and Mathematics with Applications*, 37, 19–31.

[2]. Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007, Soft sets and soft groups, *Information Sciences*, 177, 2726–2735.

[3]. Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007, Erratum to "Soft sets and soft groups", *Information Sciences*, 179(3) 338 [Inform. Sci. 177 2726–2735].

[4]. Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K.Shabir, M., 2009, On some new operations in soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 57(9), 1547–1553.

[5]. Atagün, A.O. ve Aygün, E., 2016, Groups of soft sets, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 30, 729–733.

[6]. Maji, P.K., Biswas, R. ve Roy, A. R., 2003, Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555–562.

[7]. Pei, D., Miao, D., 2005, From soft sets to information systems, in:Hu, X. , Liu, Q., Skowron, A. ; Lin, T.L., Yager, R.R., Zhang, B. (Eds:), *Proceedings of Granular Computing*, IEEE(2) 617–621.

[8]. Sezgin, A. ve Atagün, A.O., 2011, On operations of soft sets, *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 1457–1467.

[9]. Acar, U., Koyuncu, F. ve Tanay, B., 2010, Soft sets and soft rings, *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3458–3463.

[10]. Feng, F., Jun, Y.B. ve Zhao, X., 2008, Soft semirings, *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 2621–2628.

[11]. Jun, Y.B. ve Park, C.H., 2008, Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras, *Information Sciences*, 178, 2466–2475.

[12]. Jun, Y. B., 2008, Soft BCK/BCI-algebras, *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 1408–1413.

[13]. Jun, Y. B., Lee, K.J. ve Zhan, J., 2009, Soft p-ideals of soft BCI-algebras, *Computers and Mathematics with Applications*, 58, 2060–2068.

[14]. Kazancı, O., Yılmaz, Ş. ve S. Yamak, 2010, Soft sets and soft BCH-algebras, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 39, 205–217.

[15]. Sezgin, A. ve Atagün, A. O., 2011, A note on soft near-rings and idealistic soft near-rings, *Filomat*, 25, 53–68.

[16]. Sezgin, A. ve Atagün, A.O., 2011, Soft groups and normalistic soft groups, *Computers and Mathematics with Applications*, 62(2), 685–698.

[17]. Atagün, A.O. ve Sezgin Sezer, A., 2011, Soft substructures of rings fields and modules, *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 592–601.

[18]. Atagün, A. O., Set-generated soft subrings of a ring, submitted.

[19]. Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010, Soft matrix theory and its decision making, *Computers and Mathematics with Applications*, 59(10), 3308–3314.

[20]. Atagün, A.O., Kamacı, H. ve Oktay, O., 2018, Reduced soft matrices and generalized products with applications in decision making, *Neural Computing and Applications*, 29, 445–456.

[21]. Aygün, E. ve Kamacı, H., 2019, Some generalized operations in soft set theory and their role in similarity and decision making, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(6), 6537–6547.

[22]. Kamacı, H., Atagün, A.O. ve Sönmezoğlu, A., 2018, Row-products of soft matrices with applications in multiple-disjoint decision making, *Applied Soft Computing*, 62, 892–914.

[23]. Kamacı, H., Atagün, A.O. ve Aygün, E., 2019, Difference operations of soft matrices with applications in decision making, *Punjab University Journal of Mathematics*, 51(3), 1–21.

[24]. Kamacı, H., Saltık, K., Akız, H.F. ve Atagün, A.O., 2018, Cardinality inverse soft matrix theory and its applications in multicriteria group decision making, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 34(3), 2031–2049.

[25]. Kamacı, H., 2020, Selectivity analysis of parameters in soft set and its effect on decision making, *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 11(2), 313–324.

[26]. Karaaslan, F., 2015, Neutrosophic soft sets with applications in decision making, *International Journal of Information Science and Intelligent System*, 4(2), 1–20.

[27]. Karaaslan, F., 2016, Soft classes and soft rough classes with applications in decision making, *Mathematical problems in engineering*, 2016, 11 pages.

[28]. Karaaslan, F., 2017, Possibility neutrosophic soft sets and PNS-decision making method, *International Journal of Information Science and Intelligent System*, 54, 403–414.

[29]. Karaaslan, F. ve Hayat, K., 2018, Some new operations on single-valued neutrosophic matrices and their applications in multi-criteria group decision making, *Applied Intelligence*, 48(12), 4594–4614.

[30]. Eraslan, S., 2015. A decision making method via TOPSIS on soft sets. *Journal of New Results in Science*, 8, 57–71.

[31]. Maji, P.K., Biswas, R. ve Roy, A.R., 2002, An application of soft sets in a decision making problem, *Computers and Mathematics with Applications*, 44, 1077–1083.

[32]. Petchimuthu, S. ve Kamacı, H., 2019, The row-products of inverse soft matrices in multicriteria decision making, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(6), 6425–6441.

[33]. Gong, K., Xiao, Z. ve Zhang, X., 2010, The bijective soft set with its operations, *Computers and Mathematics with Applications* , 60, 2270–2278.

[34]. Kamacı, H., Atagün, A.O. ve Toktaş, E., 2018, Bijective soft matrix theory and multi-bijective linguistic soft decision system, *Filomat*, 32(11), 3799–3814.

[35]. Atagün, A.O. ve Kamacı, H., Decomposition of soft sets and soft matrices with applications in group decision making, submitted.

[36]. Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010, Soft set theory and uni-int decision making, *European Journal of Operational Research*, 207, 848–855.

[37]. Çağman, N., Çıtak, F. ve Aktaş, H., 2012, Soft int-group and its applications to group theory, *Neural Computing and Applications*, 21 (Issue 1-Supplement), 151–158.

[38]. Sezgin, A., Çağman, N. ve Çıtak, F., 2019, α-inclusions applied to group theory via soft set and logic, *Communications Series A1: Mathematics And Statistics*, 68(1), 334–352.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Hakan AYKUT
Doğum Yeri	Ankara
Doğum Tarihi	09.08.1994
Uyruğu	T.C
Telefon	
E-Posta Adresi	hknaykt1903@gmail.com
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Sakarya Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2017

Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	2020

Makale ve Bildiriler
"The Restrictive Sets and Their Applications to Soft Group Theory", International Conference on Mathematics and Its Applications in Science and Engineering(ICMASE 2020), Hacı Bayram Veli Unıversity, ANKARA, TURKEY, July 9-10, 2020. (Oral)