T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLI $L^p$ UZAYINDA SINIRLILIĞI

**Hayrullah ASLAN**

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

**MATEMATİKANABİLİM DALI**

**KIRŞEHİR - 2013**

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLI $L^p$ UZAYINDA SINIRLILIĞI

**Hayrullah ASLAN**

## YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİKANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV

KIRŞEHİR - 2013

**Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne**

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Doç Dr. Simten BAYRAKÇI
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç.Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

# ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Tez konusu olarak , Singüler İntegral Operatörü ve bu operatörün Ağırlıklı Lp Uzayındaki Sınırlılığı hakkındadır.

İlk bölüm tezin giriş bölümüdür.

İkinci bölümde tezde kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilecektir.

Üçüncü bölüm Singüler İntegral Operatörlerinin $L^p$ uzayındaki sınırlılığı ve Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörleri hakkındadır.

Dördüncü bölüm ise Singüler İntegral Operatörlerinin Ağırlıklı $L^p$ Uzayındaki sınırlılığı hakkındadır.



**Anahtar Kelimeler:** Singüler integral operatörleri, Calderon-Zygmund Singüler integral operatörleri

## ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.As a thesis subject, Singular integral operators in Weighted $Lp$ Spaces and these operators will be given information about the limitations.

The first part is the introduction section of the thesis.

In the second section we will use in this thesis will be given the basic definitions and theorems.

In the third chapter of singular integral operators in $Lp$ spaces limitation and Calderon-Zygmund singular integral operators will be informed about.

In the fourth chapter of singular integral operators in weighted $Lp$ spaces limitation will be informed about.

**Keywords:** Singular integral operators, Calderon-Zygmund Singular integral operators

## TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken, her ihtiyaç duyduğumda yardımcı olan, değerli ve derin bilgileriyle bana ışık tutan, önüme çıkan her konuda yardımlarını esirgemeyen, beni tüm içtenliği ve samimiyetiyle destekleyen ve bana emek veren saygı değer hocalarım; Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV'e ve Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT'a ;bugünlere ulaşmamda verdikleri emek ve sevgileri ile destekleri için sevgili aileme teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

**Hayrullah ASLAN**

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

# SİMGELER VE KISALTMALAR

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi $(-\infty, \infty)$ |
| $f * g$ | : f ile g fonksiyonun konvolüsyonu |
| $\tilde{f}$ | : f nin Hilbert dönüşümü |
| $R_j$ | : Riesz dönüşümü |
| $pv$ | : esas değer |
| $\mu$ | : Ölçü fonksiyonu |

# 1 GİRİŞ

Singüler integraller konusu başta Mihlin, Calderon ve Zygmund'un çalısmaları olmak üzere son 60 yıl içerisinde oldukça gelişmiştir. Harmonik analizin önemli konuları arasında yer alan

$$Tf(x) = p.v. \int_{E^n} f(y)k(x-y)dy$$

singüler integral operatörleri kısmi türevli denklemler teorisinde, analitik
fonksiyonların sınır değer problemleri teorisinde, Fourier serilerinde, matematiksel fizik ve matematiğin diğer dallarında bir çok uygulamaları olan oldukça güncel bir konudur. Singüler integral operatörünün ağırlıklı Lp uzayında sınırlılığı son yıllarda önemli bir inceleme alanı oluşturmuştur. Bugüne kadar Dünya'nın her yerinden B. Muckenhoupt, R. Wheeden, C.Fefferman, R.R.Coifman, K.F Anderson, D.S Kuztz, S. Samko, V. Burenkov, V. Kokilashvili, V.Guliyev, A. Meskhi, Y.Ding, S.Z. Lu gibi matematiğin önemli isimleri bu alanda çalışmış ve bir çok problemin çözümü için önemli sonuçlar elde etmiştir. Gelişen teknolojiye yeni bir temel oluşturabilecek bu konu her geçen gün Matematik Dünyası içinde önemini artırmaktadır. Calderon Zygmund operatörlerinin çeşitli fonksiyon uzaylarında sınırlılığından alınmış neticeler analizin bu ve diğer alanlarında kısmi sürekli denklemlerin çözümlerinin regülerliği problemlerinin araştırılmasında uygulanıyor. Bu tez de, Singüler integral operatörünün ağırlıklı Lp uzayında sınırlılığı incelenecektir.

## 2 TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 2.1 (Zayıf $L^p$uzayı)** $f$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Zayıf $L^p$ uzayı

$$L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n) = \{f : \|f\|_{p,\infty} < \infty\}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $f$ nin yarı normu $C > 0$ sabiti için

$$\|f\|_{p,\infty} := \sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} \leq C$$

ile verilir.

**Tanım 2.2 ($(p,q)$ tipli operatör)** $T$, bir altlineer operatör ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun. Eğer $T$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı bir operatör ise $T$, zayıf $(p,q)$ tipindendir denir. Yani herhangi bir $\lambda > 0$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^q \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa $T$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı operatörü $(p,q)$ tipindendir denir.

### 2.1 Ağırlıklı Norm Eşitsizlikleri

Burada $\omega$, $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan lokal integrallenebilen fonksiyondur ve ağırlık fonksiyonu olarak da adlandırılır. Şimdi $A_p$ ağırlıklarının tanımını verelim.

**Tanım 2.3 ($(1 \leq p < \infty)$için $A_p$ ağırlıkları )** $\omega(x) \leq 0$ ve $\omega(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Aşagıdaki eşitsizliği sağlayan bir $C > 0$ sabiti

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}\,dx\right)^{p-1} \leq C \tag{2.3}$$

$1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ denir. Burada ve aşağıda, $1/p + 1/p' = 1$ dır. $C > 0$ olmak üzere

$$M\omega(x) \leq C\omega(x) \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\omega \in A_1$. (2.3) veya (2.4) de görünen $C$ sabitine $\omega$ nın $A_p$ sabiti denir.

**Uyarı 2.4** $\omega \in A_1$ olması için gerek ve yeter şart $C > 0$ ve herhangi $Q$ kübü için

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx \leq C \inf_{x \in Q} \omega(x). \tag{2.5}$$

olmasıdır. Burada ve aşağıda, inf ile temel infimum anlaşılacaktır. Dahası, $1 \leq p < \infty$ ve $\omega \in A_p$ için, $A_p$ sabiti $C \leq 1$ dir. Aslında, her bir $Q$ kübü için

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1/p} \omega(x)^{-1/p} dx \\ &\leq \left\{ \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \right\}^{1/p} \\ &\leq C^{1/p} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi $A_p$ ağırlık fonksiyonlarının bazı özelliklerini verelim.

**Önerme 2.5 ( $A_p$ ağırlıklarının $(I.)$ özellikleri)**

i. $A_p \subsetneqq A_q$, eğer $1 \leq p < q < \infty$.

ii. $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ gerek ve yeter şart $\omega(x)^{1-p'} \in A_{p'}$.

iii. $\omega_0, \omega_1 \in A_1$ ise $1 < p < \infty$ için $\omega_0 \omega_1^{1-p} \in A_p$.

iv. $(1 \leq p < \infty)$ olmak üzere $\omega \in A_p$ ise herbir $0 < \varepsilon < 1$ için $\omega^\varepsilon \in A_p$.

v. $(1 \leq p < \infty)$ için $\omega \in A_p$ ise $\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx \right)^p .\omega(Q) \leq C \int_Q |f(x)|^p \omega(x) dx. \tag{2.6}$$

vi. $(1 \leq p < \infty)$ için $\omega \in A_p$ ise herhangi bir $\delta > 1$ için $C(n, p\delta)$ sabiti vardır öyleki her bir $Q$ kübü için, $\omega(\delta Q) \leq C(n, p, \delta)\, \omega(Q)$. Özellikle, $\delta = 2$ alınırsa $A_p$ ağırlıkları çift koşulu sağlar.

vii. $(1 \leq p < \infty)$ için $\omega \in A_p$ ise herhangi bir $0 < \alpha < 1$ için $0 < \beta < 1$ vardır öyle ki herhangi ölçülebilir $E \subset Q$ için $|E| \leq \alpha |Q|$ ve $\omega(E) \leq \beta \omega(Q)$.

**İspat.**

i. $p > 1$ için Tanım 2.3 ve Hölder eşitsizliğinin direk sonucudur. $p = 1$ olduğunda ise (2.5) den

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-q'} dx \right)^{q-1} &\leq \sup_{x \in Q} \omega(x)^{-1} \\ &= \left( \inf_{x \in Q} \omega(x) \right)^{-1} \\ &\leq C \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Diğer taraftan, $|x|^\alpha \in A_p$ olması için gerek ve yeter şart $-n < \alpha < n(p-1)$ olduğundan $A_p \neq A_q$ olmadığını elde ederiz.

ii. $(p-1)(p'-1)=1$ olduğundan herhangi bir $Q$ kübü için

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q [\omega(x)^{1-p'}]^{1-p}dx\right)^{p'-1}\\ &=\left\{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1}\right\}^{p'-1}\\ &\leq C^{p'-1}\end{aligned}$$

olduğu görülür.

iii. Herhangi bir $Q$ için , $(i=1,2)$ $\omega_i \in A_1$ olduğundan ve (2.5) den

$$\omega_i(x)^{-1} \leq \sup_{x\in Q}\omega_i(x)^{-1} \leq \left(\inf_{x\in Q}\omega_i(x)\right)^{-1} \leq C\left(\frac{\omega_i(Q)}{|Q|}\right)^{-1} \tag{2.7}$$

elde edilir. (2.7) den,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega_0(x)\,\omega_1(x)^{1-p}dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega_0(x)^{1-p'}\omega_1(x)\,dx\right)^{p-1} \leq C$$

sonucunu verir.

iv. $p=1$ için , Hölder eşitsizliği ve (2.5) den

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{\varepsilon}dx \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right)^{\varepsilon} \leq \left(C\inf_{x\in Q}\omega(x)\right)^{\varepsilon} = C^{\varepsilon}\inf_{x\in Q}\omega(x)^{\varepsilon}$$

olduğu görülür. Benzer olarak, $1<p<\infty$ için Tanım 2.3 ve Hölder eşitsizliğinden iv. sonucu elde edilir.

v. $p=1$ için , (2.5) den

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx.\omega(Q) &= \int_Q |f(x)|dx.\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\\ &\leq C\int_Q |f(x)|dx.\inf_{x\in Q}\omega(x)\\ &\leq C\int_Q |f(x)|\omega(x)\,dx.\end{aligned}$$

elde edilir. $1<p<\infty$ olduğunda ise Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx\\ &=\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\omega(x)^{1/p}\omega(x)^{-1/p}dx\\ &\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p\omega(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}dx\right)^{(p-1)/p}\\ &\leq C^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p\omega(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right)^{-1/p}\end{aligned}$$

olur.

vi. Eğer (2.6) da $Q$ ile $\delta Q$ ve $f(x)$ ile $\chi Q(x)$ nın yerlerini değiştirisek vi. sonucunu elde etmiş oluruz.

vii. (2.5) de $S = Q \backslash E$ ve $f(x) = \chi S(x)$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^p \omega(Q) \leq C \int_S \omega(x)\, dx.$$

Buradan

$$(1-\alpha)^p \omega(Q) \leq \left(1 - \frac{|E|}{|Q|}\right)^p \omega(Q) \leq C \left(\int_Q \omega(x)\, dx - \int_E \omega(x)\, dx\right)$$

$C \geq 1$ olmak üzere;

$$\omega(E) \leq \frac{C - (1-\alpha)^p}{C} \omega(Q).$$

Buradan $\beta = (C - (1-\alpha)^p)/C$ olduğunda vii. sonucu elde edilmiş olur.

■

Sıradaki teorem ile $A_p$ ağırlık fonksiyonlarının çok önemli ve kullanışlı olan bir özelliği verilecektir.

**Teorem 2.6 (Ters Hölder eşitsizliği)** $1 \leq p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda herhangi bir $Q$ kübü için sadece $p$ ye bağlı olan $\varepsilon > 0$ ve $C$, $\omega$ nın $A_p$ sabiti olmak üzere

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon}\, dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q \omega(x)\, dx \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.** $Q$ belirlenmiş küp olsun, $Q$ üzerinde $\omega$ için Calderón-Zygmund parçalanışı uygulanırsa

$$\{\omega(Q)/|Q| = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \dots\}$$

olur her bir $\lambda^k$ için $\{Q_{k,i}\}$ ayrık küpler dizisini elde ederiz, öyle ki

$$\omega(x) \leq \lambda_k \text{ için } \ x \notin \Lambda_k = \bigcup_i Q_{k,i}$$

ve

$$\lambda_k < \frac{1}{|Q_{k,i}|} \int_{Q_{k,i}} \omega(x)\, dx \leq 2^n \lambda_k.$$

şeklindedir. $\lambda_{k+1} > \lambda_k$ için ve her $Q_{k+1,j}$ için $Q_{k+1,j}$ kümesi ya $Q_{k,i}$ veya bazı $i$ indisleri için $Q_{k,i}$ nin altkübüdür. Buradan

$$\begin{aligned}
|Q_{k+1,j}| &< \frac{1}{\lambda_{k+1}} \int_{Q_{k+1,j}} \omega(x)\, dx \\
&= \frac{Q_{k,i}}{\lambda_{k+1}} \frac{1}{|Q_{k,i}|} \int_{Q_{k+1,j}} \omega(x)\, dx \\
&\leq \frac{Q_{k,i}}{\lambda_{k+1}} \frac{1}{|Q_{k,i}|} \int_{Q_{k,j}} \omega(x)\, dx \\
&\leq 2^n \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} |Q_{k,i}|.
\end{aligned}$$

Bundan dolayı

$$|Q_{k,i} \cap \Lambda_{k+1}| \leq 2^n \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} |Q_{k,i}|$$

elde edilir. Belirlenmiş $\alpha < 1$ için $\{\lambda_k\}$ dizisini $2^n \lambda_k / \lambda_{k+1} = \alpha$ gibi seçbiliriz. Buna denk olarak $\lambda_k = (2^n/\alpha)^k \lambda_0$. Buradan

$$|Q_{k,i} \cap \Lambda_{k+1}| \leq \alpha |Q_{k,i}|.$$

elde edilir. Önerme 2.5 vii. den,$0 < \beta < 1$ vardır öyleki

$$\omega \left( Q_{k,i} \cap \Lambda_{k+1} \right) \beta \omega \left( Q_{k,i} \right).$$

$i$ indis li terimler toplanırsa, $\omega \left( \Lambda_{k+1} \right) \leq \beta \omega \left( \Lambda_k \right)$ olduğu elde edilmiş olur, buradan

$$\omega \left( \Lambda_{k+1} \right) \leq \beta^k \omega \left( \Lambda_0 \right)$$

Benzer olarak $|\Lambda_{k+1}| \leq \alpha |\Lambda_k|$ ve $|\Lambda_{k+1}| \leq \alpha^k |\Lambda_0|$. Buradan

$$\left| \bigcup_{k=0}^{\infty} \lambda_k \right| = \lim_{k \to \infty} \lambda k$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon} dx &= \int_{Q\Lambda_0} \omega(x)^{1+\varepsilon} dx + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Lambda_k \setminus \Lambda_{k+1}} \omega(x)^{1+\varepsilon} dx \\
&\leq \lambda_0^\varepsilon \omega(Q \setminus \Lambda_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k+1}^\varepsilon \omega(\Lambda_k \setminus \Lambda_{k+1}) \\
&\leq \lambda_0^\varepsilon \left( \omega(Q \setminus \Lambda_0) + \sum_{k=0}^{\infty} (2^n/\alpha)^{(k+1)\varepsilon} \beta^k \omega(\Lambda_0) \right) \\
&\leq \lambda_0^\varepsilon \left( \omega(Q \setminus \Lambda_0) + (2^n/\alpha)^\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} [(2^n/\alpha)\beta]^k \omega(\Lambda_0) \right).
\end{aligned}$$

$(2^n/\alpha)^\varepsilon \beta < 1$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ için seri yakınsaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon} dx &\leq C \lambda_0^\varepsilon \left( \omega(Q \setminus \Lambda_0) + \omega(\Lambda_0) \right) \\
&= C \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right)^\varepsilon \cdot \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) |Q|.
\end{aligned}$$

Böylelikle (2.8) denklemi elde edilir ve Teorem 2.6 in ispatı tamamlanmış olur. Teorem 2.6 in sonuçları olarak $A_p$ ağırlık fonksiyonlarının bazı özelliklerini verelim. ■

**Önerme 2.7 ($A_p$ ağırlık fonksiyonlarının (II.) özellikleri)**

viii. $(1 < p < \infty)$ olmak üzere $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $p - \varepsilon > 1$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ için $\omega(x) \in A_{p-\varepsilon}$.

ix. $1 < p < \infty$ için $A_p = \bigcup_{q<p} A_q$.

x. $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $\omega(x)^{1+\varepsilon} \in A_p$.

xi. $1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda $\delta > 0$ ve $C > 0$ vardır öyle ki her bir $Q$ kübü ve $E \subset Q$ olacak şekilde ölçülebilir $E$ kümesi için

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \leq C \left( \frac{|E|}{|Q|} \right)^{\delta}. \tag{2.9}$$

**İspat.**

viii. ii. özelliğinden $\omega \in A_p$ ise $\omega^{1-p'} \in A_{p'}.\omega^{1-p'}$ için ters Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{(1-p')(1+\theta)} dx \right)^{(p-1)/(1+\theta)} \leq C^{p-1} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1},$$

burada $\theta > 0$. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx$ ile çarpılırsa

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{(1-p')(1+\theta)} dx \right)^{(p-1)/(1+\theta)} \leq C.$$

olduğu görülür.$(1 - p')(1 + \theta) = 1 - q'$ denirse $1 < q < p$ için $\omega \in A_q$ olur. Böylelikle vii. özelliği $\varepsilon = p - q$ için elde edilmiş olur.

ix. ix. özelliği i. ve viii. özelliğinin direk sonucudur. Gerçekten, $A_p \supset \bigcup_{q<p} A_q$ olduğunu i. özellikten biliyoruz. Diğer taraftan viii. den $A_p \subset \bigcup_{q<p} A_q$.

x. $\omega \in A_1$ olsun (2.8) denkleminden

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon} dx \leq \left( \frac{C}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right)^{1+\varepsilon} \leq C\omega(x)^{1+\varepsilon} h.h.x \in \mathbb{R}^n.$$

Buradan $\omega(x)^{1+\varepsilon} \in A_1$.

Eğer $p > 1$ için $\omega \in A_p$ ise ii. den $\omega(x)^{1+p'} \in A_{p'}$. Komogorov eşitsizliği kullanılarak $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon} dx \leq C_1 \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right)^{1+\varepsilon}$$

ve

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{(1-p')(1+\varepsilon)} dx \leq C_2 \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{1+\varepsilon}.$$

sağlanır. Böylece

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon} dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q [\omega(x)^{1+\varepsilon}]^{1-p'} dx \right)^{p-1}$$
$$\leq C \left\{ \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \right\}^{1+\varepsilon} \leq C.$$

xi. $1 \leq p < \infty$ için $\omega(x) \in A_p$ olduğundan $1 + \varepsilon$ ve $(1 + \varepsilon)/\varepsilon$ için Hölder eşitsizliği kullanılır ise (2.8) dan

$$\begin{aligned}
\int_E \omega(x)dx &\leq \left(\int_E \omega(x)^{1+\varepsilon}dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} .|E|^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|}\int_E \omega(x)^{1+\varepsilon}dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} |Q|^{1/(1+\varepsilon)}\|E|^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \\
&\leq \frac{C}{|Q|}\int_E \omega(x)dx|Q|^{1/(1+\varepsilon)}\|E|^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \\
&= C\omega(Q)\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Böylelikle $\delta = \varepsilon/(1+\varepsilon)$ için $\omega$ nın (2.9) denklemini sağladığı görülür ve ispat tamamlanır.

■

**Uyarı 2.8** $\omega$, $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\omega$ (2.9) denklimini sağlarsa $\omega \in A_\infty$ denir. xi. özelliği gösteriyor ki $\bigcup_{1\leq p<\infty} A_p \subset A_\infty$. Bununla birlikte $\bigcup_{1\leq p<\infty} A_p \supset A_\infty$ olduğu da ispatlanabilir. Sonuç olarak $A_\infty = \bigcup_{1\leq p<\infty} A_p$.

**Tanım 2.9** X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir $\sigma$ cebiri olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki herbir kümeye ölçülebilir küme, $\mu$ ölçü fonksiyonu olmak üzere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne ölçü uzayı denir.

**Tanım 2.10** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere; $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı ve

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$$

özelligine sahip ölçülebilir $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına $L_p(\Omega)$ uzayı veya $\Omega$ bölgesinde $p$. kuvvetten Lebesgue-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir. $L_p(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty$$

şeklindeki norm ile tanımlanır. Buradaki $\|f\|_p$ gösterimine $f$ fonksiyonunun $Lp$-normu denir.

$\Omega$ Bölgesinde $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir $M$ sabiti varsa $f$ fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Böyle $M$ sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nin $\Omega$ bölgesindeki esas supremumu(esaslı sınırı) denir ve

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf\{K : |f(x)| \leq Kh.h.x \in \Omega\}$$

şeklinde gösterilir. $\Omega$ bölgesindeki hemen hemen sınırlı $f$ fonksiyonları ile tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ seklinde gösterilir. Buna göre bir $f$ fonksiyonunun $L^\infty$-normu

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 2.11 (Young Eşitsizliği)** $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\forall a, b > 0$ için

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

olur.

**Teorem 2.12** $p \leq 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p\right)$$

olur.

**Teorem 2.13 (Hölder Eşitsizliği)** $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L^p, g \in L^q$ ise $fg \in L^1$ olur ve

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizligi sağlanır.

**Teorem 2.14 (Minkowski Eşitsizliği)** Eğer $f, g \in L^p$ ve $1 \leq p$ ise $f + g \in L^p$ olur ve

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizligi sağlanır.

Hölder teoremi ve Lebesgue integralinin özellikleri gözönünde bulunduruldugunda $L^p, 1 \leq p < \infty$, nin bir vektör uzayı oldugu görülür. Bununla birlikte $\|f\|_p$; $L^p$ üzerinde bir normdur ve

1. Tanımdan $\|f\|_p \geq 0$
2. $\|f\|_p \geq 0$ ise hemen hemen heryerde $f(x) = 0$
3. $\|\alpha f\|_p = \alpha \|f\|_p$
4. $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

özellikleri sağlandıgından $L^p, 1 \leq p \leq \infty$, bir normlu uzaydır.

**Teorem 2.15** $L_p, 1 \leq p < \infty$, uzayı

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

normu altında tam ve dolaysıyla Banach uzayıdır.

**Tanım 2.16** $f_n$ ve $f$ fonksiyonları $L^p$ uzayının elemanları olmak üzere; $(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna $p$. mertebeden yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$.

Bu yakınsaklık çesidine $L^p$ de yakınsaklık da denir. Burada $p \geq 1$ olup,

$$\|f_n - f\|_p = \left( \int_\Omega |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir. Buna göre,
$(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna $L^p$ de yakınsaktır. $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$

**Tanım 2.17** $\omega$ fonksiyonu h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için $\omega(x) > 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir olsun. Bu durumda $\omega$ fonksiyonuna bir ağırlık fonksiyonu denir.

**Tanım 2.18** Hilbert dönüşümü
$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $f \in L^p(E^1)$ olsun.

$$\tilde{f}(x) = pv\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t}dt = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon} \frac{f(t)}{x-t}dt$$

esas değer konvolüsyonu $f$ nin Hilbert dönüşümü olarak adlandırılır. Buradaki esas amacımız $\tilde{f}$ nin varlığını göstermek ve $1 < p < \infty$ için $L^p$ de $Hf = \tilde{f}$ operatörünün sürekli olduğunu ifade eden Riesz'in klasik sonucunu elde etmek olacaktır. Burada $\tilde{f}$, $f$ ile $\frac{1}{x}$ çekirdeğinin konvolüsyonudur. Fakat bu konvolüsyon esas değer anlamında alınmalıdır, çünkü $\frac{1}{x}$ çekirdeği $E^1$ üzerinde integrallenebilir değildir. $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L^p$ olmak üzere

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \tilde{f}_\epsilon(x)$$

yazalım, burada

$$\tilde{f}_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon} \frac{f(t)}{x-t}dt$$

ile verilir. Hölder eşitsizliğinden $\tilde{f}_\epsilon(x)$ in var olduğu görülür, çünkü orijinin bir $\epsilon$-komşuluğunun dışında $\frac{1}{x}$ çekirdeği her $q > 1$ için $L^q$ ya aittir. W. H. Young teoreminden $p > 1$ olmak üzere eğer $f \in L \cap L_p$ ise $\tilde{f}_\epsilon \in L^p$ dir.

## 3 SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN $L^p$ UZAYINDA SINIRLILIĞI

Calderon-Zygmund singüler integral operatörü Riesz ve Hilbert dönüşümlerinin direk genelleştirmesidir. Birincisi üst yarı düzlem üzerindeki eşlenik harmonik fonksiyonların sınır değer araştırmalarından meydana gelmektedir, diğeri ikinci dereceden eliptik denklem çözümünün düzenliliğiyle birleştirilmektedir.

Şimdi bunlar hakkında kısaca bilgilere bakalım. $f \in L^p(\mathbb{R})(1 \leq p < \infty)$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde Cauchy integrali;

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

Burada $z = x + iy, y > 0$ dir. $F(z)$ nin $\mathbb{R}^2_+$ üzerinde analitik olduğu görülür. Ayrıca;

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} [(P_y * f)(x) + i(Q_y * f)(x)]) \end{aligned}$$

Burada

$$P_y(t) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{t^2 + y^2}$$

Poisson çekirdek olarak adlandırlır ve

$$Q_y(t) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + y^2}$$

eşlenik Poisson çekirdek olarak adlandırılır. $P_y * f$, $f$ nin Poisson integrali olarak adlandırılır ve $Q_y * f$, $f$ nin eşlenik poisson integrali olarak adlandırılır. Harmonik fonksiyonların sınır değerlerinin özelliklerinden, $y \to 0$ iken $P_y * f \to f$ ve $y \to 0$ iken $Q_y * f \to Hf$ olur. $Hf$ e, $f$ in Hilbert dönüşümü denir.

$$Hf(x) = p.v. \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t} dt \tag{3.1}$$

Eğer $f \in L^2(\mathbb{R})$ ise,

$$\widehat{Hf}(\xi) = -isgn\xi \widehat{f}(\xi) \tag{3.2}$$

dir. $K(x) = p.v. \frac{1}{x}$ olsun, bu durumda $Hf = (K * f)$ dir.

Şimdi kabul edelim ki $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ olsun ve $\triangle u = f$ Poisson denklemi verilsin, burada

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

$\mathbb{R}^n$ de Laplace operatörüdür. Eşitliğin her iki tarafına Fourier dönüşümü uygulandığında

$$\widehat{f}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi)$$

olduğunu elde ederiz. Bu da

$$\widehat{u}(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2} \widehat{f}(\xi)$$

eşitliğidir. Böylece, $1 \leq j, k \leq n$ için

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}}(\xi) &= -4(\pi)^2 \xi_i \xi_k \widehat{u}(\xi) \\ &= \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

dir. Eğer operatörü

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{f(\xi)}, j = 1, 2, ...., n \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlarsak,

$$\left( \widehat{\frac{\partial_u^2}{\partial_{x_j}} \partial_{x_k}} \right)(\xi) = -\widehat{R_j R_k} f(\xi)$$

olduğu görülür. (3.3) denklemiyle tanımlanan $R_j$ operatörü Riesz dönüşümü olarak tanımlanır. Bu, Possion denklemi için çözüm kuralının problemi, Riesz dönüşümünün sınırlığının dönüşümüdür. (3.2) ile (3.3) ün karşılaştırılmasıyla Riesz dönüşümü bir boyuttan n boyuta Hilbert dönüşümünün bir genelleştirmesi olduğu görülmektedir. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$ ise f nin Riesz dönüşümü aşağıdaki forma sahiptir.

$$R_j f(x) = p.v.C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^{n+1}} f(y) d(y), 1 \leq j \leq n \tag{3.4}$$

Eğer $K_j(x) = p.v. \frac{x_j}{|x|^(n+1)} (j = 1, 2, ..., n)$ alırsak,

$$R_j f = K_j * f$$

olur.

Şimdi singüler integral operatörünü tanımlamadan önce bazı bilgilere bakalım. $n \geq 3$ olduğu zaman, Laplace operatörü $\Delta$ nın temel çözümü

$$\Gamma(x) = \frac{1}{(2-n) w_{n-1}} \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

dir.

Örneğin $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}^n)$ için $f$ iyi özelliklere sahip olduğu zaman $\Gamma * f$, $\Delta u = f$ Possion denkleminin bir çözümüdür. Bu da

$$\begin{aligned} u(x) &= \Gamma * f(x) \\ &= C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} dy \end{aligned}$$

dir. $u$ nun ikinci dizisinin kısmi türevi alındığında, $\Omega_j(y) = C_n(1 - n|y|^{-2} y_j^2)$ olduğu yerde;

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega_j(x - y)}{|x - y|^n} f(y) dy = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-y| > \varepsilon} \frac{\Omega_i(x - y)}{|x - y|^n} f(y) dy$$

elde edilir. $\Omega$ ya bağlı aşağıdaki özellikler bulunmuştur.

(a)$\Omega_j(\lambda_y) = \Omega_j(y), \forall \lambda > 0$

(b)$\int_{S^{n-1}} \Omega_j(y') d_\sigma(y') = 0$

(c)$\Omega_j \epsilon L^1(S^{n-1})$

$$T_j f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy,$$

Böylece $\Delta u = f$ denkleminin çözümünün $L^p$ düzenliliği $T_j$ operatörünün $L^p$ sınırına düşmektedir. Kabul edelim ki (a),(b) ve (c) üç şartı üzerinde bir $\Omega$ fonksiyonu verilsin. Böylece

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n), (1 \leq p < \infty)$$

için

$$T_\Omega f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy \tag{3.5}$$

tanımlanır.

Eğer $\Omega(x) = \frac{x_j}{|x|}$ ise, $T_\Omega, R_j(j = 1, 2, ..., n)$ Riesz dönüşümü olur.

Eğer $n = 1$ ve $\Omega(x) = sgn(x)$ ise $T_\Omega$, H Hilbert dönüşümüdür.

## 3.1 Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörleri

$K(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ olmak üzere,

$$|K(x)| \leq B|x|^{-n}, \forall x \neq 0 \tag{3.6}$$

$$\int_{r \leq |x| \leq R} K(x)dx = 0, \forall 0 < r < R < \infty \tag{3.7}$$

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|dx \leq B, \forall y \neq 0 \tag{3.8}$$

şartları sağlandığında B, x ve y nin bir sabitten bağımsız olduğu yerlerde, K ya Calderon-Zygmund çekirdeği denir ve (3.8) şartı Hömander'in şartı olarak adlandırılır.

**Teorem 3.1** Kabul edelim ki K Calderon-Zygmund çekirdeğidir. $\epsilon > 0$ ve$f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ için

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|y| \geq \epsilon} f(x-y)K(y)dy$$

olsun. Böylece aşağıdaki ifadeleri doğrudur.

$(i)\|T_\epsilon f\|_p \leq A_p \|f\|_p$, burada $Ap$, $\epsilon$ ve $f$ nin bağımsızıdır.

$(ii) Her f \in L^p(\mathbb{R}^n), \lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon f$, $L^p$ normunun olması durumunda vardır. Bu da, bir $T$ nin varlığını gerektirir öyleki

$$Tf(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K(y)dy$$

$(iii)\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$

**Uyarı 3.2** Teorem (3.1) (ii) de tanımlanan T lineer operatörü Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörü olarak tanımlanır. $T_\epsilon$, T nin kesilmiş operatörü olarak adlandırılır.

**İspat.** $\epsilon > 0$ için, $K_\epsilon(x) = K(x)\chi_{\{|x|\geq\epsilon\}}(x)$ olsun. Böylece $T_\epsilon f(x) = K_\epsilon * f(x)$ dir. İlk olarak $T_\epsilon$, (2,2) nin bir türü olduğu gösterilecek ve $T_\epsilon$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde düzgün sınırlıdır. Daha sonra $K_\epsilon$ nun (3.6) ve (3.7) durumunda düzgün olduğu gösterilecek. Daha sonra $K_\epsilon$ nun (3.8) durumunda düzgün olduğu gösterilecek. Aslında herbir $x, y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ $|x| \geq 2|y|$ için eğer $x$ ve $x - y$ nin her ikiside $B(0, \epsilon)$ içinde iseler $K_\epsilon(x) = K\epsilon(x - y) = 0$ dır. Eğer x ve $x - y$ nin her ikiside $B(0, \epsilon)$ da iseler $K_\epsilon(x) = K(x)$, $K_\epsilon(x - y) = K(x - y)$ olur. Bu durumda $K\epsilon$ (3.8) şartını sağlar. Eğer $|x| > \epsilon$ ve $|x - y| < \epsilon$ ise $\frac{|x|}{2} \leq |x - y| < \epsilon$ ve $\epsilon < |x| < 2\epsilon$ olur. Bundan dolayı, C $\epsilon$ nun bağımsız olduğu yerlerde

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K_\epsilon(x - y) - K_\epsilon(x)|dx \leq \int_{\epsilon\leq|x|\leq 2\epsilon} |K_\epsilon(x)|dx \leq CB$$

olur. Burada her $\epsilon > 0$, $K_\epsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$ için $C > 0$ olacak şekilde bir sabitin var olduğunu göstermek yeterlidir. Her $\epsilon > 0$ için

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{K}_\epsilon(\xi)| \leq CB \tag{3.9}$$

dir. Aslında $\xi \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned}
\hat{K}_\epsilon(\xi) &= \lim_{R\to\infty} \int_{|x|\leq R} e^{-2\pi i x\xi} K_\epsilon(x)dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \Big( \int_{|x|\leq \frac{\alpha}{|\xi|}} e^{-2\pi i x\xi} K_\epsilon(x)dx \\
&+ \int_{\frac{\alpha}{\xi}<|x|\leq R} e^{-2\pi i x\xi} K_\epsilon(x)dx \Big) \\
&= \lim_{R\to\infty} (I_1 + I_2)
\end{aligned}$$

dir.(3.6) ve (3.7) şartlarından şu sonuç çıkar.

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \int_{|x|\leq\frac{\alpha}{|\xi|}} (e^{-2\pi i x\xi} - 1)K_\epsilon(x)dx \\
&\leq C|\xi| \int_{|x|\leq\frac{\alpha}{|\xi|}} |x||K_\epsilon(x)|dx \\
&\leq C\alpha B
\end{aligned}$$

Şimdi $I_2$ ye bakalım. $y = \frac{\xi}{2|\xi|^2}$ alırsak $e^{2\pi i y\xi} = -1$ olur. Burada

$$J = \left( \int_{\frac{\alpha}{\xi}<|x|\leq R} - \int_{\frac{\alpha}{\xi}<|x-y|\leq R} \right) e^{-2\pi i x\xi} K_\epsilon(x - y)dx$$

alırsak,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\frac{\alpha}{|\xi|}<|x-y|\leq R} e^{-2\pi i(x-y)\xi} K_\epsilon(x - y)dx \\
&= -\int_{\frac{\alpha}{|\xi|}<|x-y|\leq R} e^{-2\pi i x\xi} K_\epsilon(x - y)dx \\
&= -\int_{\frac{\alpha}{|\xi|}<|x|\leq R} e^{-2\pi i x\xi} K_\epsilon(x - y)dx + J,
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{\xi}<|x|\le R}[K_\epsilon(x) - K_\epsilon(x-y)]e^{-2\pi i x\xi}dx + \frac{J}{2}$$

bulunur.$|y| = \frac{1}{2|\xi|}$ ve $\alpha > 1$ iken, C ve B,$\epsilon$ ve $\xi$ nin birbirinden bağımsız oldukları yerlerde

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{|\xi|}<|x|\le R}[K_\epsilon(x) - K_\epsilon(x-y)]e^{-2\pi i x\xi}dx\right| \le \int_{|x|\ge 2|y|}|K_\epsilon(x) - K_\epsilon(x-y)|dx \le CB$$

ifadesine sahip oluruz. Diğer taraftan eğer biz $\{x|\frac{\alpha}{|\xi|} < |x| \le R\}$ ve $\{x|\frac{\alpha}{|\xi|} < |x-y| \le R\}$ bu her ikisinin simetrik farkını E olarak alırsak,

$$|J| \le \int_E |K_\epsilon(x-y)|dx$$

olur. Buradan $|y| = \frac{1}{2|\xi|}$ ve $\alpha > 1$ alınırsa

$$E \subset \left\{x|\frac{\alpha}{2|\xi|} \le |x| \le \frac{2\alpha}{|\xi|}\right\}\bigcup\left\{x|\frac{R}{2} \le |x| \le 2R\right\}$$

elde edilir. Böylece (3.6) den C ve B,$\epsilon$ ve $\xi$ den bağımsız oldukları yerlerde

$$|J| \le \int_{\frac{\alpha}{2|\xi|}\le|x|\le\frac{2\alpha}{|\xi|}}|K_\epsilon(x-y)|dx + \int_{\frac{R}{2}\le|x|\le 2R}|K_\epsilon(x-y)|dx \le CB$$

şeklinde olur.Yukarıdakileri toparlayıp (3.9) ele aldığımızda $T_\epsilon$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde $\epsilon$ un içinde düzgün sınırlıdır.
Şimdi $T_\epsilon$ un (1,1) in zayıf bir tipi olduğunu ve bu sınırın $\epsilon$ un bağımsız bir sınırı olduğu gösterilecek.
Her $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda > 0$ için bir fonksiyonun (teorem Calderon-Zygmund decomposition for function) Calderon-Zygmund tarafından analiz edilmesiyle $Q_j$ ve g,b iki fonksiyonun örtüşmeyen küplerinin alırsak $f = g + b$ için aşağıdaki özellikleri sağlar: (a) $\|g\|_2^2 \le C\lambda\|f\|_1$, $|g(x)| \le 2^n\lambda$, $\alpha.e.x \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\lambda \le \frac{1}{Q_j}\int_{Q_j} f(x)dx \le 2^n\lambda$, her $Q_j$ için;

(c) $\Sigma_j|Q_j| \le \frac{1}{j}\|f\|_1$;

(d) $b(x) = \sum_j b_j(x)$,$\int_{Q_j} b_j dx = 0 supp b_j \subset Q_j$ ve $\|b_j\|_1 \le 2\int_{Q_j}|f(x)|dx$

dir. Çünkü

$$T_\epsilon f(x) = T_\epsilon g(x) + T_\epsilon b(x)$$

den

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{R}^n :| T_\epsilon f(x) |> \lambda\}| &\le |\{x \in \mathbb{R}^n :| T_\epsilon g(x) |> \frac{\lambda}{2}\}| \\ &+ |\{x \in \mathbb{R}^n :| T_\epsilon b(x) |> \frac{\lambda}{2}\}| \\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

olur. İlk adım ve (a) dan

$$I_1 \leq (\frac{2}{\lambda})^2 \int_{\mathbb{R}^n} |T_\epsilon g(x)|^2 dx \leq \frac{4C}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx \leq \frac{4C}{\lambda} \|f\|_1$$

elde edilir. $I_2$ yi tahmin etmek için, $Q_j^* = 2n^{\frac{1}{2}} Q_j$ merkezi $Q_j$ ile aynı ve kenarı $Q_j$ nin $2n^{\frac{1}{2}}$ katı olan bir küp olsun. $E^* = U_j Q_j^*$ alırsak (c) den

$$|E^*| \leq \sum_j |Q_j^*| \leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_1$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} I_2 &\leq |E^*| + |x \notin E^*||T_\epsilon b(x)| > |\frac{\lambda}{2}| \\ &\leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_1 + \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\epsilon b(x)| dx \end{aligned}$$

olur.

$$\sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\epsilon b_j(x)| dx \leq C \|f\|_1 \tag{3.10}$$

ifadesini kanıtlamak için $|T_\epsilon b(x)| \leq \sum_j |T_\epsilon b_j(x)|$ ifadesini kanıtlamak yeterlidir.
$y_j Q_j$ nin merkezini ifade ettiğinden (3.8) den $(b)$ ve $(c)$ ikisi birlikte (3.10) sağladığından

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus E^*} |T_\epsilon b_j(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} \int_{Q_j} |K_\epsilon(x-y) - K_\epsilon(x-y_j)||b_j(y)| dy dx \\ &\leq \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_j^*} |K_\epsilon(x-y) - K_\epsilon(x-y_j)| dx dy \\ &\leq CB \int_{Q_j} |b_j(y)| dy \leq 2CB \int_{Q_j} |f(y)| dy \end{aligned}$$

ifadesine sahibiz. Buradan da $T_\epsilon$, $(1,1)$ in zayıf bir tipidir ve onun sınırı $\epsilon$ ya da $f$ den bağımsızdır. Şimdi $T_\epsilon$,$(p,p)(1 < p < \infty)$ şeklinde olduğu gösterilecek. Marcinkiewiz Interpolation Teoreminin uygulamasından $T_\epsilon$,$(p,p)(1 < p < 2)$nin bir tipi olduğunu biliyoruz ve onun sınırı $\epsilon$ ya da f den bağımsızdır. Şimdi $2 < p < \infty$ olduğunu kabul edelim ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ den $1 < p' < 2$ olur. Eğer $\widetilde{T_\epsilon}$ nu $T_\epsilon$ nun dual operatörü olarak alırsak $\widetilde{K_\epsilon(x)} = \overline{K_\epsilon(-x)}$ olduğu yerde $\widetilde{T_\epsilon f(x)} = \widetilde{K_\epsilon} * f(x)$ elde ederiz. Açıkça $\widetilde{K_\epsilon}, K_\epsilon$ nun tüm şartlarını sağlar. Böylece $\widetilde{T_\epsilon}$ $(p', p')$ nin bir tipidir. Bu nedenle her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned} \|T_\epsilon f\|_p &= sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} | \int_{\mathbb{R}^n} T_\epsilon f(x) g(x) dx| \\ &= sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} | \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widetilde{T_\epsilon} g(x) dx| \\ &\leq \|f\|_p sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \|\widetilde{T_\epsilon} g\|_{p'} \\ &\leq A_p \|f\|_p \end{aligned}$$

dir. Daha sonra her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ için $Tf$ nin varlığını ve $L^p$ de $T_\epsilon f$ nin sınırlılığı gösterilecek.İlk olarak $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğunu kabul edelim.Her y $(y \neq 0)$ için

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C|y| \tag{3.11}$$

elde etmek istiyoruz. Aslında

$$\frac{d}{dt}f(x-ty) = \langle \nabla f, -y \rangle (x-ty)$$

den $y' = \frac{y}{|y|}$ olduğunda

$$\begin{aligned} f(x-y) - f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x-ty)dt \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f, -y \rangle (x-ty)dt \\ &= \int_0^{|y|} \langle \nabla f, -y' \rangle (x-sy)ds \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} | \int_0^{|y|} \langle \nabla f, -y' \rangle (x-sy) ds|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^{|y|} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f, -y' \rangle (x-sy)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ds \\ &\leq |y| \sum_{j=1}^{n} \| \frac{\partial f}{\partial x_j} \|_p \end{aligned}$$

dir. Şimdi $0 < \eta < \epsilon$ olduğunu düşünelim. Böylece (3.11) ve (3.6) den

$$\begin{aligned} \|T_\eta f - T_\epsilon f\|_p &\leq \int_{\eta < |y| < \epsilon} |K_y| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\ &\leq C \int_{\eta < |y| \leq \epsilon} |y||K(y)|dy \\ &\leq CB \to 0 (\eta, \epsilon \to 0) \end{aligned}$$

Bu da her f fonksiyonunun $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğunu gösterir. $T_\epsilon f$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de bir Couchy dizisidir. Bu nedenle

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|T_\epsilon f - Tf\| = 0$$

olacak şekilde $Tf \in L^p$ vardır.

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

den

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p &\leq \|Tf - T_\epsilon f\| + \|T_\epsilon f\|_p \\ &\leq \|Tf - T_\epsilon f\|_p + A_p \|f\|_p \end{aligned}$$

olduğu görülür. Her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $\delta > 0$ için $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vardır öyleki $f = g + h$ ve $\|h\|_p < \infty$ dır.Böylece $0 < \eta < \epsilon$ için

$$\begin{aligned} \|T_\eta f - T_\epsilon f\|_p &\leq \|T_\eta (f-g)\|_p + \|T_\eta g - T_\epsilon g\|_p + \|T_\epsilon (g-f)\|_p \\ &\leq A_p \|(f-g)\|_p + \|T_\eta g - T_\epsilon g\|_p + A_p \|g-f\|_p \\ &\to 2A_p \delta, \eta, \epsilon \to 0 \end{aligned}$$

dır. $\delta$ keyfi olduğu için $\{T_\epsilon f\}$ her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ de daima bir cauchy dizisi olduğunu gösterir. Bu nedenle $Tf \in L^p$ vardır öyleki

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|Tf - T_\epsilon f\|_p = 0$$

ve

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

■

**Teorem 3.3** Kabul edelim ki $\Omega(x)$ sınır fonksiyonudur.

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0 \tag{3.12}$$

$$\int_0^1 \frac{w_\infty(\delta)}{\delta} d\delta < \infty \tag{3.13}$$

ile $\mathbb{R}^n$ de 0 dereceli bir homojen sınır fonksiyonudur.

$$w_\infty = \underset{x',y' \in S^{n-1}, |x'-y'|<\infty}{sup} \mid \Omega(x') - \Omega(y') \mid$$

dır.$f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ için

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{\Omega_y}{|y|^n} f(x-y)dy$$

olsun. Böylece aşağıdaki üç durum sağlanır:

$(i)f$ den bağımsız bir $A_p$ sabiti vardır öyle ki $\|T_\epsilon f\|_p \leq A_p \|f\|_p$

$(ii)Tf$ vardır öyleki $L^p$ normunda $lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f(x) = Tf(x)$ dir.

$(iii)\|Tf\|_p \leq A_p \|f\| p$

**İspat.** Teorem (3.1) den, $k(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ denkleminin (3.8) şartını sağladığını göstermemiz yeterlidir. $|x| \geq 2|y|$ ile $0 < Q < 1$ için

$$|x - Qy| \leq |x| + |y| \leq \frac{3}{2}|x|$$

ve

$$|x - y| \geq |x| - |y| \geq \frac{1}{2}|x|$$

olduğu zaman

$$K(x-y) - K(x) = \frac{\Omega(x-y) - \Omega(x)}{|x-y|^n} + \Omega(x)\left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right) := I_1 + I_2.$$

dir. Böylece

$$\left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| \leq C\frac{|y||x-Qy|^{n-1}}{|x-y|^n|x|^n} \leq C\frac{|y|}{|x|^{n+1}}. \tag{3.14}$$

dır. Diğer yandan $|x| \geq 2|y|$ olduğu zaman

$$\left| \frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|} \right| \leq 2\frac{|y|}{|x|} \tag{3.15}$$

dır. Bu yüzden (3.14) ve (3.15) den

$$\begin{aligned}
\int_{|x \geq 2|y||} |K(x-y) - K(x)| dx &\leq \int_{|x \geq 2|y||} |I_1| dx + \int_{|x \geq 2|y||} |I_2| dx \\
&\leq \int_{|x \geq 2|y||} \left| \Omega\left( \frac{x-y}{|x-y|} \right) - \Omega\left( \frac{x}{|x|} \right) \right| \frac{dx}{|x-y|^n} \\
&+ C \parallel \Omega \parallel_\infty |y| \int_{|x \geq 2|y||} \frac{dx}{|x|^{n+1}} \\
&\leq C \int_{|x \geq 2|y||} w_\infty \left( 2\frac{|y|}{|x|} \right) \frac{dx}{|x|^n} \\
&+ C' \parallel Q \parallel_\infty \\
&= C \int_{2|y|}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} w_\infty \left( 2\frac{|y|}{r} \right) d\sigma(x') \frac{dr}{r} \\
&+ C' \parallel \Omega \parallel_\infty \\
&\leq C' \int_0^1 \frac{w_\infty(\delta)}{\delta} d\delta + C \parallel \Omega \parallel_\infty \\
&\leq B
\end{aligned}$$

olur. ■

**Uyarı 3.4** $\Omega$ sıfır dereceli homojen olduğu yerlerde $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ ise, böylece

$$T_\Omega f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) dy \tag{3.16}$$

şeklinde tanımından $T_\Omega$ homojen çekirdekli bir süngüler integral operatörü olarak adlandırılır. Teorem (3.1) ve teorem (3.3) de, $L^p$ normu homojen çekirdeğin varlığıyla singüler integral operatörü ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörünün sınırı olduğu gösterilir ve burada $(p,p)(1 \leq p \leq \infty)$ varlığı için, noktasal anlamda $\{T_\epsilon f(x)\}$ in limitinin olup olmamasıdır. Burada $T_\Omega$ nın sınırlılığı $(1,1)$ aralığında gösterilmiştir. $T_\Omega$ (3.16) ile tanımlanan bir süngüler integral operatörüdür. $\Omega$, $\mathbb{R}^n$ de sıfırıncı dereceden homojen olsun ve (3.12) ve (3.13) ifadelerini sağlasın. Her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$ için

$$T_\Omega^* f(x) = sup_{\epsilon > 0} |T_{\Omega,\epsilon} f(x)|$$

ifadesi $T_{\Omega,\epsilon}$ nun

$$T_{\Omega,\epsilon} f(x) = \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) dy, \epsilon > 0$$

ile tanımlanan $T_\Omega$ operatörünün olduğu yerlerde maksimal singüler integral operatörü olarak adlandırılır.

**Lemma 3.5** (Cotlar eşitsizliği) $C_1, C_2 > 0$ olacak şekilde iki sabit vardır öyleki M nin Hardy-Littlewood maksimal operatörü olduğu yerlerde $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$T_\Omega^* f(x) \leq C_1 M(T_\Omega f)(x) + C_2 M f(x) \tag{3.17}$$

dir.

**İspat.** $K_\varepsilon(x) = |x|^{-n}w(x)\chi_{\{|x|\geq\varepsilon\}}(x)$ olsun. Kompakt destekli negatif olmayan $\varphi \in \Re(\mathbb{R}^n)$ radyal fonksiyonu seçelim., öyleki $supp(\varphi) \subset \{x : |x| \leq 1\}$ ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$$

olsun. Genelliği kaybetmeden $\varphi(|x|)$ i $|x|$ de azalan olarak alabiliriz. Böylece

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * \varphi = K * \varphi$$

noktasallığı tutar.

Şimdi $\phi(x) = K * \varphi(x) - K_1(x)$ olduğu gösterilecek. $K$, $-n$. dereceden homojen olduğu için

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$$

ve

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$$

olduğunda $\varepsilon > 0$ için

$$\phi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon * K(x) - K_\varepsilon(x) \tag{3.18}$$

sağlanır. (3.18) den $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$T_{\Omega,\varepsilon}f(x) = K_\varepsilon * f(x) = (\varphi_\varepsilon * K) * f(x) - \phi_\varepsilon * f(x). \tag{3.19}$$

dır. Diğer yandan $\forall\eta > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$(\varphi_{\varepsilon *} K_\eta) * f(x) = \varphi_\varepsilon * (K_\eta * f)(x) = \varphi_\varepsilon * (T_{\Omega,\eta}f)(x).$$

olur. $\varphi_{\varepsilon \in L^{p'}}$ olsun. Böylece $\varphi_{\varepsilon *}K_\eta$, $\eta \to 0$ iken $L^p$ de $\varphi_{\varepsilon *}K$ ya yakınlaşıyor. (Teorem (3.1) ispatından görülebilir.) Bu arada $T_{\Omega,\eta}f$, $L^\infty$ da $T_\Omega f$ ye yakınlaşmaktadır. Böylece

$$(\varphi_\varepsilon * K) * f(x) = \varphi_\varepsilon * (T_\Omega f)(x)$$

dır. Bu formül (3.19) ile birlikte

$$T_{\Omega,\varepsilon}f(x) = \varphi_\varepsilon * (T_\Omega f)(x) - \phi_\varepsilon * f(x) \tag{3.20}$$

ifade eder. İleride $\phi$ nin bir radyal integrallenebilir fonksiyon tarafından hakim olabileceği gösterilecek. $|x| < 1$ olduğu zaman

$$\phi(x) = \varphi * K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(x-y) - \varphi(x)]K(y)dy$$

dır. Unutmayalım ki; $K(y) = |y|^{-n}\Omega(y), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $supp\varphi \subset \{x : |x| \leq 1\}$ dir. Açıkça $\phi, 1 \leq |x| \leq 2$ olduğu zaman sınırlıdır. $|x| > 2$ olduğunda

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\varphi(y)dy - K(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [K(x-y) - K(x)]\varphi(y)dy\end{aligned}$$

dır.

$$|K(x-y)-K(x)| \leq \frac{|\Omega(x-y)-\Omega(x)|}{|x-y|^n} + |\Omega(x)|\left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right|$$

olduğu için, Teorem (3.3) ispatı

$$|K(x-y)-K(x)| \leq C^1|x|^{-n}w_\infty\left(\frac{2}{|x|}\right)$$

ifade eder. Böylece $|x| > 2$ olduğunda $|\phi(x)| \leq C^{'}|x|^{-n}w_\infty\left(\frac{2}{|x|}\right)$ dir. $\Omega$ (3.14) durumunu sağladığı için, $\phi$ nin minimum radikal baskın fonksiyonu

$$\psi(x) = sup_{|y|\geq|x|}|\phi(y)|$$

nin integrallenebilir olmasıyla ifade edilir. Böylece (3.20) ve Hardy-Littlewood maksimal operatörün özelliklerinden $C_1, C_2 > 0$ varlığını elde ederiz öyleki,

$$\begin{aligned} T_\Omega^* f(x) &= sup_{\varepsilon>0}|T_{\Omega,\varepsilon}f(x)| && (3.21)\\ &\leq sup_{\varepsilon>0}|\varphi_\varepsilon * (T_\Omega f)(x)| + sup_{\varepsilon>0}|\phi_\varepsilon * f(x)| && (3.22)\\ &\leq C_1 M(T_{\Omega f})(x) + C_2 Mf(x). && (3.23)\end{aligned}$$

dır. $M$ ve $T_\Omega$ nın her ikiside $(p,p)$ tipinde operatörler olduğu için, $T_\Omega^*, (p,p)$ tipinde olduğu aşağıda verilecektir. ■

**Teorem 3.6** Kabul edelim ki $\Omega$, 0 dereceli ve (3.12) ve (3.13) durumlarını sağlayan bir homojen sınırlı fonksiyon olsun. Böylece $T_\Omega^*$,
$(p,p)(1 < p < \infty)$ şeklindedir ve zayıf şekli (1,1) dir.

**İspat.** $T_\Omega^*$ ın (1.1) in zayıf bir tipi olduğunu göstermek yeterlidir. İspattaki fikir Teorem (3.1) deki ile aynıdır. $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda > 0$ için Calderon-Zygmund ayrışmasını kullandığımızda $f = g + b$ ve $\{Q_j\}$ örtüşmeyen küplerinin bir sonucuna sahip oluruz. Böylece

$$|\{x : T_\Omega^* f(x) > \lambda\}| \leq |\{x : T_\Omega^* g(x) > \frac{\lambda}{2}\}| + |\{x : T_\Omega^* b(x) > \frac{\lambda}{2}\}|. \tag{3.24}$$

$||g||_2^2 \leq C\lambda||f||_1$ ve $T_\Omega^*$ (2.2) nin bir tipi olduğu için

$$|\{x : T_\Omega^* g(x) > \frac{\lambda}{2}\}| \leq C'\lambda^{-2}||T_\Omega^* g||_2^2 \leq C''\frac{1}{\lambda}||f||_1.$$

dır. Şimdi $y_j$ ile $Q_j$ nin merkezi belirtilip ve $d_j$ ilede $Q_j$ nin yan uzunluğunu gösterecez. Böylece

$$|E| \leq \sum_j |S_j| = \sum_j C_n|Q_j| \leq \frac{C_n}{\lambda}||f||_1.$$

bulunur. Bu da

$$|\{x : T_\Omega^* b(x) > \frac{\lambda}{2}\}| \leq |E| + |\{x \in E^c : T_\Omega^* b(x) > \frac{\lambda}{2}\}|. \tag{3.25}$$

i sağlar. $x \in E^c$ ve $\varepsilon > 0$ olduğunda

$$T_{\Omega,\varepsilon}b(x) = \sum_j \int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b(y)d(y)$$

olur. $Q_j$ nin aşağıdaki üç durumunu göz önüne alalım.
(i) $\forall y \in Q_j$ için, $|x-y| < \varepsilon$;
(ii) $\forall y \in Q_j$ için, $|x-y| > \varepsilon$;
(iii) $y \in Q_j$ nin varlığında, $|x-y| = \varepsilon$
dur.
İlk durum için, $K_\varepsilon(x-y) = 0$. Böylece $T_{\Omega,\varepsilon}b(x) = 0$ dır. 2. durum için $K_\varepsilon(x-y) = K(x-y)$, böylece

$$\left|\int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b_j(y)dy\right| = \left|\int_{Q_j} [K(x-y) - K(x-y_j)]b_j(y)dy\right|$$
$$\leq \int_{Q_j} |[K(x-y) - K(x-y_j)]b_j(y)dy|$$

dır. Üçüncü durum olarak, $x \in E^c \subset S_j^c$ için, $S(x,r)$, yarıçapı $r = C_n\varepsilon$ ve merkezi $x$ olan kapalı bir küre olduğu yerde, $Q_j \subset S(x,r)$ olsun diye sadece $n$ ye bağlı iki sabit $C_n$ ve $C_n^{'}$ vardır. Eğer $y \in Q_j$ ise $|x-y| \geq C_n^{'}\varepsilon$ dur. Böylece, $y \in Q_j$ için,

$$|K_\varepsilon(x-y)| \leq \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n} \leq |\Omega|_\infty (C_n^{'}\varepsilon)^{-n}.$$

dir. Bu yüzden

$$\left|\int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b_j(y)dy\right| \leq \int_{Q_j\cap S(x,r)} |K_\varepsilon(x-y)||b(y)|dy$$
$$\leq C^{'}||\Omega||_\infty \varepsilon^{-n} \int_{S(x,r)} |b(y)|dy$$
$$\leq C^{''} \frac{1}{|S(x,r)|} \int_{S(x,r)} |b(y)|dy$$

olur. Tüm küplerin toplamı alınarak

$$|T_{\Omega,\varepsilon}b(x)| \leq \sum_j \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)||b_j(y)|dy + \frac{C^{''}}{|S(x,r)|} \int_{S(x,r)} |b(y)|dy$$

elde edilir. Böylece,

$$|T_\Omega^* b(x)| \leq \sum_j \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)||b(y)|dy + CMb(x).$$

olur. Bundan dolayı

$$|\{x \in E^c : T_\Omega^* b(x) > \frac{\lambda}{2}\}|$$
$$\leq \left|\{x \in E^c : \sum_j \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)||b(y)|dy > \frac{\lambda}{4}\}\right|$$
$$+|\{x \in E^c : CMb(x)\frac{\lambda}{4}\}|$$

dır. (3.10) ve Hardy-Littlewood maksimal operatörün sınırlılığını $(1,1)$ alırsak

$$|\{x \in E^c : T_\Omega^* b(x) > \frac{\lambda}{2}\}| \leq \frac{C^{'}}{\lambda}||f||_1$$

ifadesine sahip oluruz. Bu eşitsizlik (3.24) ve (3.25) ile birlikte gösterirki $T_\Omega^*(1.1)$ zayıf şeklinin operatörüdür. ■

**Sonuç 3.7** Eğer $\Omega$ teorem (3.6) daki şartları sağlarsa $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 < p < \infty)$ için

$$\lim_{\epsilon \to 0} T_{\Omega,\epsilon} f(x) = T_\Omega f(x)$$

dir.

**İspat.** $f \in L^p(1 \leq p < \infty)$ için,

$$\Lambda f(x) = |\lim_{\varepsilon \to 0} sup T_{\Omega,\varepsilon} f(x) - \lim_{\varepsilon \to 0} inf T_{\Omega,\varepsilon} f(x)|, x \in \mathbb{R}^n,$$

olsun, böylece, $\Lambda f(x) \leq 2T_\Omega^* f(x)$ olur. Keyfi $\delta > 0$ için, $f = g + h$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $||h||_p < \delta$ olsun. $\Omega$ (3.12) durumunu sağlarsa $g$ kompakt destekle bir düzgün fonksiyondur. $\varepsilon \to 0$ iken $T_{\Omega,\varepsilon} g$, $T_\Omega g$ ye eşit olarak yakınsıyor. Bu yüzden $\Lambda g(x) = 0$ dır. Böylece, $1 < p < \infty$ için

$$||\Lambda(f)||_p \leq ||\Lambda(h)||_p \leq 2A_p ||h||_p \leq 2A_p \delta$$

dır. $\delta$ keyfi olduğundan, $\Lambda(f)(x) = 0$ dır. Örneğin $1 < p < \infty$ için $x \in \mathbb{R}^n$ dir. Böylece, $x \in \mathbb{R}^n$ için $T_{\Omega,\varepsilon} f(x)$ in limiti vardır.

Ayrıca $p = 1$ olduğunda, $\lambda > 0$ için

$$|\{x : \Lambda(f)(x) > \lambda\}| \leq \frac{2A}{\lambda} ||h||_1 \leq \frac{2A\delta}{\lambda}$$

olur. Bu yüzden $x \in \mathbb{R}^n$ için $\Lambda(f)(x) = 0$ dır. Böylece $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için $T_{\Omega,\varepsilon} f(x)$ in limiti vardır.

■

**Sonuç 3.8** Eğer $\Omega$ teorem (3.6) daki şartları sağlarsa $T_\Omega$ (1,1) in zayıf bir tipidir.

**Uyarı 3.9** $R_j(j = 1, 2, ..., n)$ Riesz dönüşümleri $C_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ olduğunda

$$R_j f(x) = p.v. C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy$$

elde edilir.

**Teorem 3.10** $R_j(j = 1, 2, ..., n)$ Riesz dönüşümleri $(p, p)(1 < p < \infty)$ tipinde ve (1,1) zayıf tipindedir.H Hilbert dönüşümü bir Riesz dönüşümü olduğundan

$$Hf(x) = p.v. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x - y} dy$$

şeklindedir.

**Teorem 3.11** H Hilbert operatörü (1,1) zayıf tipli ve $(p, p)(1 < p < \infty)$ tipli bir operatördür.

**Uyarı 3.12** $H^*$ maksimal Hilbert dönüşümü

$$H^*f(x) = \sup_{\epsilon>0}\left|C_n \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}dy\right|$$

şeklindedir.

$$R_j f(x) = \sup_{\epsilon>0} \epsilon > 0|C_n \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)dy|, (j = 1, 2, ..., n)$$

olduğunda $R_j^*$ maksimal riesz dönüşümü olur.

Şimdi Calderon-Zygmund singüler integral operatörünün ağırlıklı sınırlılığı ve onun maksimal operatörü hakkında bilgi verelim. İlk olarak sharp maksimal fonksiyonun tanımını verelim. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,f in $M^\sharp f(x)$ sharp maksimal fonksiyonu,

$$M^\sharp f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ile tanımlanmıştır. Burada supremum x'i içeren $\mathbb{R}^n$ deki tüm yuvarlar üzerinde alınır ve

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(t)dt$$

Q üzerinde f nin ortalamasıdır. Her $a \in \mathbb{C}$ ve $Q \subset \mathbb{R}^n$ için

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - \alpha|dx + |\alpha - f_Q| \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q |f(x) - \alpha|dx \qquad (3.26)$$

dır.

**Lemma 3.13** Kabul edelim ki $\Omega$, $\mathbb{R}^n$ de 0 dereceli bir homojen sınırlı fonksiyon olsun ve (3.12) ve (3.13) ifadelerini sağlasın. Böylece her $s > 1$ ve M nin Hardy-Littlewood maksimal operatör olduğu yerlerde

$$M^\sharp(T_\Omega f)(x) \leq C(n,s)(M|f|^s)(x), x \in \mathbb{R}^n$$

dir.

Bu bölümde kullanılan tanım ve teoremlerde *B. Muckenhoupt, R. Wheeden, Y.Ding, S.Z. Lu, E. M. Stein*'nin ilgili kaynaklarından yararlanılmıştır.

# 4 SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLI $L^p$ UZAYINDA SINIRLILIĞI

Bu bölümde kullanılan tanım ve teoremlerde *B. Muckenhoupt, R. Wheeden, Y.Ding, S.Z. Lu, Garcia-Cuerva, J., Rubio de Francia*'nın ilgili kaynaklarından yararlanılmıştır.

**Lemma 4.1** $w \in A_\infty$ ve $0 < p_0 < \infty$ aralığında mevcut olsun. Öyleki $Mf \in L^{p_0}(w)$ dır. Böylece,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M^\sharp f(x))^p w(x)dx \tag{4.1}$$

$p_0 \leq p < \infty$ için sağlar.

**İspat.** $M^\sharp(|f|)(x) \leq 2M^\sharp f(x)$ için genelliği kaybetmeden kabul edelim ki $f \geq 0$ olsun. $\lambda > 0$ için Calderon-Zygmund ayrışmasını kullanalım.. Dyadic küplerin (ii) özelliğinden eğer $Q_1 \subset Q_2 \subset ...$ ve $f_{Q_k} > \lambda$ koşullarını sağlayan dyadic küplerin bir dizisi varsa $\{w(Q_k)\}$ eşit olarak $k$ ya göre düzgün sınırlıdır. Gerçekten keyfi $x \in Q_k$ için biliyoruzki

$$t < \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(y)dy \leq Mf(x).$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} w(Q_k) = \int_{Q_k} w(x)dx &\leq \frac{1}{t^{p_o}} \int_{Q_k} (Mf(x))^{p_o} w(x)dx \\ &\leq \frac{1}{t^{p_o}} \parallel Mf \parallel^{p_o}_{L^{p_o}(w)} . \end{aligned}$$

dir. $w(x)dx$ çift ölçüm ve $w \in A_\infty$ olduğundan $\{|Q_k|\}$ düzgün sınırlıdır. Bundan dolayı $f_Q > t$ koşulunu sağlayan bütün dyadic $Q$ küpler kesin olarak maksimal dyadik küp olarak adlandırılan küplerin bir kümesi olsun. O halde keyfi $Q_j$ için

$$t < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y)dy \leq 2^n t$$

ifadesini sağlamalıdır. Genelliği kaybetmeden $\{Q_j\}$ yi $\lambda$ ya bağımlı olarak $\{Q_{\lambda,j}\}$ olarak tanımlayabiliriz. Ayrıca keyfi $Q_{\mu,j}$ ve $\lambda < \mu$ için $Q_{\mu,j} \subset Q_{\lambda,k}$ olacak biçimde bir $k$ mutlaka vardır.

Şimdi keyfi $\lambda > 0$ için $Q_0 = Q_{2^{-n-1}\lambda,j_0}$ ve $A > 0$ olsun. Eğer

$$Q_0 \subset \{x : M^\sharp(f)(x) > \frac{\lambda}{A}\},$$

ise

$$\Sigma_{j:Q_{\lambda,j} \subset Q_0} w\left(Q_{\lambda,j}\right) \leq w\left(\{x : M^\sharp(f)(x) > \frac{\lambda}{A}\}\right) \tag{4.2}$$

dır.

Eğer $Q_0 \nsubseteq \{x|M^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{A}\}$ ise,

$$\frac{1}{Q_0} \int |f(y) - f_{Q_0}|dy \leq \frac{\lambda}{A}$$

ve

$$f_{Q_0} = \frac{1}{Q_0}\int_{Q_0} f(t)dt \leq 2^n 2^{-n-1}\lambda = \frac{\lambda}{2}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{\{j|Q_{\lambda,j}\subset Q_0\}} (\lambda - \frac{\lambda}{2})|Q_{\lambda,j}| &= \sum_{\{j|Q_{\lambda,j}\subset Q_0\}} \int_{Q_{\lambda,j}} |\lambda - \frac{\lambda}{2}|dy \\ &\leq \sum_{\{j|Q_{\lambda,j}\subset Q_0\}} \int_{Q_{\lambda,j}} |f(y) - f_{Q_0}|dy \\ &\leq \int_{Q_0} |f(y) - f_{Q_0}|dy \\ &\leq A^{-1}\lambda|Q_0|\end{aligned}$$

$$\sum_{\{j|Q_{\lambda,j}\subset Q_0\}} | Q_{\lambda,y} | \leq 2A^{-1} | Q_0 |$$

olur.Diğer yandan

$$\bigsqcup_{\{j|Q_{\lambda,j}\subset Q_0\}} Q_{\lambda,j} \subset Q_0$$

ve $w \in A_\infty$ için $\delta > 0$ ve $A > 0$ vardır. öyleki,

$$\frac{w(\bigsqcup_{\{j|Q_{\lambda,j}\subset Q_0\}} Q_{\lambda,j})}{w(Q_0)} \leq C\left(\frac{|\sum_{\{j|Q_{\lambda,j}\subset Q_0\}} Q_{\lambda,j}|}{|Q_0|}\right)^\delta$$

dır.Böylece

$$\sum_{\{j|Q_{\lambda,j}\subset Q_0\}} w(Q_{\lambda,j}) \leq C(2A^{-1})^\delta w(Q_0) \tag{4.3}$$

dır.(4.2) ve (4.3) ten

$$\sum_{\{j|Q_{\lambda,j}\subset Q_0\}} w(\lambda, j) \leq w(x|M^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{A}) + C(2A^{-1})w(Q_0)$$

olur. Şimdi $Q_0$ ın tamamını alalım. Bu eşitsizlik

$$\sum_{\{j|Q_{\lambda,j}\subset Q_0\}} w(Q_{\lambda,j}) \leq w(x : M^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{A}) + C(2A^{-1})\delta \sum_k w(Q_{2^{-n-1}\lambda,k}) \tag{4.4}$$

şeklinde olur.

$\alpha(\lambda) = \sum_j w(Q_{\lambda,j})$ ve$\beta(\lambda) = w(\{x : Mf(x) > \lambda\})$ olsun. Böylece $\bigsqcup_j Q_{\lambda,j} \subset \{x|Mf(x) > \lambda\}$ ve $Q_{\lambda,j}$ ayrılırsa

$$\alpha(\lambda) \leq \beta(\lambda) \tag{4.5}$$

olur. İleride

$$\beta(\lambda) \leq \sum_j w(3Q_{4^{-n}\lambda,j}) \leq C_1\alpha(\frac{\lambda}{C_2}) \tag{4.6}$$

ifadesini bulmaya çalışacağız. $3Q$, $Q$ ile aynı merkezli $Q$ nun kenar uzunluğunun üç katı olan küplerde $E_\lambda = \{x|mf(x) > \lambda\}$ yazalım. Eğer biz

$$E_\lambda \subset \bigsqcup_j 3Q_{4^{-n}\lambda,j} \tag{4.7}$$

olarak gösterirsek (4.6) eşitsizliğinin sol tarafı doğal olarak sağlanır. Bu nedenle (4.6) eşitsizliğini aldığımızda ikincisi açık olur. Şimdi keyfi verilen $x \in E_\lambda$ için $R$,

$$\frac{1}{R}\int_R f(y)dy > \lambda$$

olan bir küptür. Eğer R nin kenar uzunluğu d olarak alınırsa $2^{k-1} < d \leq 2^k$ olacak şekilde bir tek k tam sayısı vardır. Böylece $Q_k$ da R ile kesişen bir çok $2^n$ dyadik küpleri vardır. ve

$$\int_{R\cap Q} |f(y)dy| > \frac{\lambda|R|}{2^n}$$

olacak şekilde en az bir $Q$ diyadik küpü vardır.$|R| \leq |Q| < 2^n|R|$ için

$$\int_{R\cap Q} |f(y)|dy > \frac{\lambda|R|}{2^n} > \frac{\lambda|Q|}{4^n}$$

olur. Bu $\frac{1}{Q}\int_Q |f(y)|dy > \frac{\lambda}{4^n}$ ifadesine eşdeğerdir. Sonuç olarak maksimal diyadik küp $Q_{4^{-n}\lambda,j} \supset Q$ olacak şekilde j-ler vardır.$Q\cap R \neq Q$ ve $|R| \leq |Q|$ ise (4.7) ifadesi $R \subset 3Q \subset 3Q_{4^{-n}\lambda,j}$ ifadesini belirtir. (4.4) den de

$$\alpha(\lambda) \leq w(\{x|M^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{A}\}) + C(2A^{-1})^\delta \alpha(2^{-n-1}\lambda) \tag{4.8}$$

olur. $N > 0$ için (4.5) ile $\int_0^\infty p_0\lambda^{p_0-1}\beta(\lambda)d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n}[Mf(x)]^{p_0}w(x)dx$ eşitliğini uygularsak aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\begin{aligned}
I_N &= \int_0^N P\lambda^{P-1}\alpha(\lambda)d\lambda \\
&\leq \int_0^N P\lambda^{P-1}\beta(\lambda)d\lambda \\
&\leq PP_0^{-1}N^{P-P_0}\int_0^N P_0\lambda^{P_0-1}\beta(\lambda)d\lambda \\
&\leq PP_0^{-1}N^{P-P_0}\int_{\mathbb{R}^n}(Mf(x))^{P_0}w(x)dx \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan (4.8) den

$$\begin{aligned}
I_N &\leq \int_0^N P\lambda^{P-1}w(\{x : M^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{A}\})d\lambda \\
&+ C(2A^{-1})^\delta\int_0^N P\lambda^{P-1}\alpha(2^{-n-1}\lambda)d\lambda \\
&= \int_0^N P\lambda^{P-1}w(\{x : M^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{A}\})d\lambda \\
&+ C2^{(n+1)p}(2A^{-1})^\delta\int_0^{2^{-n-1}N} p\lambda^{p-1}\alpha(\lambda)d\lambda \\
&\leq \int_0^N P\lambda^{P-1}w(\{x : M^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{A}\})d\lambda \\
&+ C2^{(n+1)p}(2A^{-1})^\delta I_N
\end{aligned}$$

dir. Şimdi

$$C2^{(n+1)p}(2A^{-1})^\delta = \frac{1}{2}$$

olsun. $A > 0$ alırsak,

$$I_N \leq 2 \int_0^N P\lambda^{P-1} w(\{x : M^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{A}\}) d\lambda$$

olur. N, $\infty$ iken

$$\int_0^\infty P\lambda^{P-1}\alpha(\lambda)d\lambda \leq 2 \int_0^\infty P\lambda^{P-1} w(\{x | M^\sharp f(x) > \frac{\lambda}{A}\}) d\lambda$$

olur. Bu da (4.6) ile birlikte

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} [Mf(x)]^p w(x)dx &= \int_0^\infty P\lambda^{P-1}\beta(\lambda)d\lambda \leq C_1 \int_0^\infty P\lambda^{P-1}\alpha\left(\frac{\lambda}{C_2}\right) d\lambda \\
&= C \int_0^\infty P\lambda^{P-1}\alpha(\lambda)d\lambda \\
&\leq C \int_0^\infty P\lambda^{P-1} w(\{x | M^\sharp f(x) > \lambda\})d\lambda \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} (M^\sharp f(x))^p w(x)dx
\end{aligned}$$

olur. ■

**Teorem 4.2** Kabul edelim ki $\Omega$ (3.12) ve (3.13) şartını sağlasın ve sıfırıncı dereceli homojen sınırlı bir fonksiyon olsun. Böylece $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ için f nin bağımsız bir C sabiti vardır öyleki

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_\Omega f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx \tag{4.9}$$

dir.

**İspat.**

$w \in A_p$ için $1 < s < p$ vardır öyleki; $w \in A_{\frac{p}{s}}$ dir. İlk olarak kompakt destekli sınırlanmış fonksiyon olan f-nin şartları altında (4.9) gösterilecektir. Sonuç olarak $M(T_\Omega f)(x) \in L_p(w)$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $T_\Omega f \in L_p(w)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Genelliği bozmaksızın $supp(f) \subset \{y :| y |< R\}$ kabul edilebilir.Eğer $|x| > 2R$ ise $|x - y| \geq |x| - |y| > \frac{x}{2}$ dir. Böylece

$$|T_\Omega f(x)| \leq \int_{y \leq R} \frac{|\Omega(x-y)|}{| x - y |^n} |f(y)|dy \leq \frac{C}{|x|^n} \|f\|_\infty \tag{4.10}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |T_\Omega f(x)|^p w(x)dx &= \int_{|x| \leq 2R} |T_\Omega f(x)|^p w(x)dx \\
&+ \int_{|x| > 2R} |T_\Omega f(x)|^p w(x)dx \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Bazı $\epsilon > 0$ lar için Hölder Eşitsizliği ifade ederki,

$$I_1 \leq \left( \int_{|x| \leq 2R} |T_\Omega f(x)|^{\frac{p(1+\epsilon)}{\epsilon}} dx \right)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \left( \int_{|x| \leq 2R} w(x)^{1+\epsilon} dx \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}$$

dır. Böylece $T_\Omega$ nın $L_q$ sınırlılığı ifade ederki yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafının ilk parçası sınırlıdır.Çünkü $\epsilon$ yeteri kadar küçük alınırsa w Hölder Eşitsizliğini sağlar. $I_2$ nin sınırlılığını görmek için $A_p$ ağırlığının aşağıdaki özelliğine ihtiyaç vardır. Eğer $w \in A_p$,$(1 \leq p \leq \infty)$ ise C-nin w-ya bağlı olduğu fakat a-nın olmadığı yerlerde $a > 1$ ve herhangi $Q \subset \mathbb{R}^n$ küpü için

$$w(aQ) \leq Ca^{np}w(Q) \tag{4.11}$$

dır. Aslında herhangi $f \in L^p(w)$ ve $\lambda > 0$ için

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx$$

dir. Şimdi $f \geq 0$ ve Q küpü alınırsa $\int_Q f(y)dy > 0$ dır. Böylece bütün $0 < \lambda < f_Q$ lar için $Q \subset \{x|M(f\chi Q)(x) > \lambda\}$ olur. Böylece

$$(Q) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_Q |f(x)|^p w(x)dx$$

dir. Bu yüzden

$$w(Q)\lambda^p \leq C\int_Q |f(x)|^p w(x)dx$$

dir. Şimdi $\lambda \to f_Q$ olsun.Bu durumda

$$w(Q)(f_Q)^p \leq C\int_Q |f(x)|^p w(x)dx$$

olur. Eğer ölçülebilir küme olan $S \subset Q$ ile $f = \chi S$ alınırsa yukarıdaki eşitlik

$$w(Q)\left(\frac{|S|}{|\ Q\ |}\right)^p \leq Cw(S)$$

olur. $Q$, $aQ$ ile ve $S$, $Q$ ile yerdeğiştirdiğinde yukarıdaki formül (4.11) i sağlar. (4.11) deki Q küpünün yerine bir yuvar alırsak eşitsizlik yine sağlanır. Şimdi $I_2$ ye bakılırsa, $w \in A_p$ için $1 < q < p$ vardır öyleki $w \in A_q$ olur.(4.10) ve (4.11) den

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^kR<|x|\leq 2^{k+1}R}\frac{w(x)}{|x|^{np}}dx \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}(2^kR)^{-np}w(B(0,2^{k+1R})) \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}(2^kR)^{-np}C(2^{k+1}R)^{nq}w(B(0,1)) \\
&\leq C(n,R,w) < \infty
\end{aligned}$$

olur. $T_\Omega f \in L^p(w)$ olduğu gösterildi. Bu nedenle $M(T_\Omega f) \in L^p(w)$ dır. Eğer $f$ kompakt desteğiyle sınırlr bir fonksiyon ise lemma (3.13) ve lemma (4.1) in uygulanmasından

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |T_\Omega f(x)|^p w(x)dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}(M(T_\Omega f(x)))^p w(x)dx \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}(M^\sharp(T_\Omega f(x)))^p w(x)dx \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}(M(|f|^s)(x))^{\frac{p}{s}}w(x)dx \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}(|f(x)|)^p w(x)dx
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak kompakt desteğiyle sınırlı olan fonksiyonların kümesi $L^p(w)$ da yoğun olduğu için $T_\Omega$, $L^p(w)$ ya sürekli genişletilmiş olabilir.

■

**Teorem 4.3** Kabul edelim ki $\Omega$, teorem (4.2) ve $w \in A_1$ şartlarını sağlasın. Böylece $\lambda > 0$ ve $f \in L^1(w)$ için bir C sabiti vardır öyleki

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n | \ |T_\Omega f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x) dx$$

dir.

**İspat.** Teorem (3.1) deki (1,1) in zayıf tipi olan $T_\epsilon$ kesilmiş operatörüne benzerdir. f ve $\lambda$ nın Calderon-Zygmund ayrışmasını kullanırsak, $f + g$ ve $\{Q_k\}$ küplerinin örtüşmeyen bir serisine sahip oluruz. Burada

$$\begin{aligned} w(\{x||T_\Omega f(x)| > \lambda\}) &\leq w(\{x||T_\Omega g(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) + w(\{x||T_\Omega b(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

dir. Sırasıyla $I_1$ ve $I_2$ tahmini verilecek. $w \in A_1 \subset A_2$ ve $T_\Omega$,$L^2(w)$ üzerinde sınırlı olduğu için

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{4}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^n} |T_\Omega g(x)|^2 w(x) dx \\ &\leq \frac{4C}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 w(x) dx \\ &\leq \frac{2^n 4C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| w(x) dx \end{aligned}$$

dir. Calderon-Zygmund ayrışmasındaki g-nin tanımından

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bigsqcup Q_k} |f(x)| w(x) dx + \frac{C}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k} \frac{1}{Q_k} \int_{Q_k} |f(y)| dy w(x) dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bigsqcup Q_k} | f(x) | w(x) dx + \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k} |f(y)| \frac{w(Q_k)}{| Q_k |} dy \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bigsqcup Q_k} | f(x) | w(x) dx + \frac{C}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k} |f(y)| w(y) dy \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} | f(x) | w(x) dx \end{aligned}$$

dir. Her $Q_k$ için $B_k^*$,merkezi $Q_k$ ile aynı ve çapı $Q_k$ nın 16 katı olan bir küme olsun. Böylece (4.11) den

$$\begin{aligned} w(\bigsqcup_k B_k^*) &\leq \sum_k w(B_k^*) \\ &\leq C \sum_k w(Q_k) \leq C \sum_k \frac{w(Q_k)}{Q_k} Q_k \\ &\leq C \sum_k \frac{w(Q_k)}{Q_k} \frac{1}{\lambda} \int_{Q_k} |f(y)| dy \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k} f(y) w(y) dy \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| w(y) dy \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak,

$$w(x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigsqcup_k B_k^* : |T_\Omega b(x)| > \frac{\lambda}{2})$$

tahmini verilecek. $C_k$ ile $Q_k$ nın merkezini göstermektedir. Her k için, $\int_{Q_k} b_k(x)dx = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigsqcup_k B_k^* : |T_\Omega b(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_k \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_k^*} |T_\Omega b_k(x)| w(x)dx \\ &= \frac{C}{\lambda} \sum_k \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_k^*} \left| \int_{Q_k} \left[ \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} - \frac{\Omega(x-c_k)}{|x-c_k|^n} \right] b_k(y)dy \right| w(x)dx \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k} |b_k(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_k^*} \left| \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} - \frac{\Omega(x-c_k)}{|x-c_k|^n} \right| w(x)dx \right) dy \end{aligned}$$

dir. $A_1$ in özelliğinden herhangi $y \in Q_k$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_k^*} \left| \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} - \frac{\Omega(x-c_k)}{|x-c_k|^n} \right| w(x)dx \leq CMw(y) \leq Cw(y) \tag{4.12}$$

ifadesi elde edilir. Böylece (4.12) ten

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigsqcup_k B_k^* : |T_\Omega b(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k} |b_k(y)| w(y)dy \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} (|f(y)| + |g(y)|) w(y)dy \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| w(y)dy \end{aligned}$$

elde edilir.

■

# KAYNAKLAR


**[1]** Calderon, A.P., Zygmund, A., On the existence of certain singular integrals, Acta Math., 88(1952)

**[2]** Calderon, A.P., Zygmund, A., A note on the interpolation of sublinear operators, Amer. J. Math., 78(1956)

**[3]** Calderon, A.P., Zygmund, A., On singular integrals, Amer. J. Math., 78(1956), 289-309

**[4]** Calderon, A.P., Zygmund, A., A note on singular integrals, Studia Math., 65(1979), 77-87

**[5]** Calderon, A.P., Weiss, M., Zygmund, A., On the existence of singular integrals, Proc. Symposia Pure Math., Amer. Math. Soc., 10(1967)

**[6]** Lu,S., Ding,Y., Yan,D., Singular Integrals and Related Topics, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 2006

**[7]** Stein, E.M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1970)

**[8]** Stein, E.M., Harmonic Analysis: real variable methods, orthogonality,and oscillatory integrals, Princeton University Press, (1993)

**[9]** Muckenhoupt, B., Wheeden, R., Weighted norm inequalities for singular and fractional integrals, Trans.Amer. Math. Soc.,161(1971)

**[10]** Garcia-Cuerva, J., Rubio de Francia, J.L., Weighted norm inequalities and related topics, Amsterdam, North-Holland, 1985.

**[11]** Duoandikoetxea, J., Fourier Analysis, Graduate Studies in Math.,Vol.29, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2001

**[12]** Kreyzig, E. 1989. Introductory functional anlaysis with applications. John Wiley and Sons, 704 p., U.S.A.

**[13]** Neri, U. 1971. Singular integrals. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag,272 p., New York.

**[14]** Rudin, W. 1973. Functional analysis. McGraw-Hill Book Company, 397 p., U.S.A.

**[15]** Sadosky, C. 1979. Interpolation of operators and singular integrals. Marcel Dekker Inc., 375 p., New York.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Hayrullah ASLAN

Doğum Tarihi : 10.01.1989

Doğum Yeri : Adıyaman

Ünvanı : Yüksek Lisans Öğrencisi

Anabilim Dalı : Matematik

**Eğitim Durumu**

| | | |
|---|---|---|
| Orta Öğrenimi | : | Gerger Lisesi, 2003-2006. |
| Lisans | : | Erciyes Üniversitesi, Fen Fakültesi, |
| | : | Matematik Bölümü, 2007-2011. |
| Yüksek Lisans | : | Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, |
| | : | Matematik Anabilim Dalı, Aralık 2013 |