T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Sol_3 UZAYININ GEOMETRİSİ VE Sol_3 UZAYINDA EĞRİLER

Lütfü SİZER

YÜKSEK LİSANSTEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR - 2013

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Sol_3 UZAYININ GEOMETRİSİ VE Sol_3 UZAYINDA EĞRİLER

Lütfü SİZER

YÜKSEK LİSANSTEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Prof. Dr. Levent KULA

KIRŞEHİR - 2013

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Levent KULA
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Bülent ALTUNKAYA
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Sol-3 Uzayının Geometrisi ve Sol-3 Uzayında Eğriler

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölüm, çalışmanın esas kısmıdır. Bu bölümde, öncelikle Sol-3 grupları ve özellikleri verildi, ardından grup yapıları, Lie grup yapıları ve geodezikleri incelendi.

Üçüncü bölümde, Sol-3 uzayındaki eğrilerin helis olma karakterizasyonları incelendi.

Anahtar Kelimeler: Sol-3, Lie Grubu, Lie Cebiri, Helis, Geodezik

ABSTRACT

The Geometry Of Sol-3 Space And Curves In Sol-3 Space

This master thesis consist of four parts.

The first chapter, fundamental definitions and theorems used in our study are given.

In second chapter is original part of our study. In this chapter, firstly, Sol-3 groups and their properties are given, later group structures, Lie group structures and geodesics of these groups was examined.

Third chapter chapter, the characterizations to be helix of curves in Sol-3 are examined.

Keywords: Sol-3, Lie Group, Lie Algebra, Helix, Geodesic

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Levent KULA'ya teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bu süreçte bana yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT hocam ve değerli arkadaslarım Mesut ALTINOK ve Hülya BAŞEĞMEZ'e teşekkür ederim.

Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri birimi'ne (BAP[1])maddi ve manevi desteğinden ötürü teşekkür ederim.

Türkiye Bilimsel ve Teknoloji Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK[2]) maddi ve manevi desteğinden ötürü teşekkür ederim.

[1]Tezin yazarı FBA-11-23 numaralı proje ile desteklenmektedir.
[2]Tezin yazarı 110T695 numaralı proje ile desteklenmektedir.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$P(X)$	:	X kümesinin kuvvet kümesi
$M_n(\mathbb{R})$	:	Reel sayılar cismi üzerinde $n \times n$ tipinde matrislerin cümlesi
$[\tilde{g}_{ij}]$	:	i satırlı j sütunlu matris
$\left[\tilde{g}^{l,k}\right]$	:	$[\tilde{g}_{ij}]$ matrisinin inversi
$det\,[\tilde{g}_{ij}]$	:	$[\tilde{g}_{ij}]$ matrisinin determinantı
Γ_{ij}^{k}	:	Christoffel sembolü
$T_p(M)$	:	M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı
$\mathfrak{F}(M)$	:	Tanım kümesi M manifoldu olan reel değerli bütün düzgün (diferensiyellenebilir) fonksiyonların cümlesi
$\chi(M)$	:	M manifoldu üzerinde düzgün vektör alanlarının uzayı
$\chi^*(M)$	:	M manifoldu üzerinde düzgün $1-$formların uzayı
$\chi_L(G)$	:	G Lie grubu üzerindeki sol invaryant vektör alanlarının uzayı
D	:	Riemann konneksiyonu
∇	:	Levi- Civita konneksiyonu
$\tilde{\nabla}$	:	Sol_3 te Levi- Civita konneksiyonu
$[\ ,\ ]$	:	Lie operatörü
Sol_3	:	Sol_3 uzayı
Sol_M	:	Sol uzayının matris gösterimi

1 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, manifold, Lie grubu, Lie cebiri ve çalışmada gerekli olan bazı tanımlar, teoremler ve notasyonlar hatırlatılacaktır.

Tanım 1.1 X boş olmayan bir cümle ve τ ailesi de $P(X)$ kuvvet cümlesinin herhangi bir alt cümlesi olsun. Eğer $\tau \subset P(X)$ aşağıdaki özelikleri sağlarsa, τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

T1) $\varnothing, X \in \tau$ dur.

T2) τ dan alınan herhangi sayıda elemanın birleşimi τ ya aittir; yani, I (sonlu veya sonsuz) herhangi bir indis cümlesi olmak üzere, $\forall\ \{U_i\}_{i\in I} \in \tau$ için, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$ dur.

T3) τ dan alınan sonlu sayıda elemanların kesişimi τ ya aittir; yani, J sonlu indis cümlesi olmak üzere, $\forall\ \{U_i\}_{i\in J} \in \tau$ için, $\bigcap_{i\in J} U_i \in \tau$ dur [7].

Tanım 1.2 X, bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki $\forall\ x, y \in X$ için $x \in U,\ y \in V$ ve $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir [7].

Tanım 1.3 X ve Y iki topolojik uzay olsun. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için,

(i) f sürekli,

(ii) f^{-1} ters fonksiyonu mevcut,

(iii) f^{-1} sürekli,

ise f fonksiyonuna X den Y ye bir homeomorfizm denir [7].

Tanım 1.4 $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \in \mathbb{R}^n$ ve $1 \leqslant i \leqslant n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_i : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ p \quad &\longrightarrow u_i(p) = u_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_i \end{aligned}$$

fonksiyonlarına $\mathbb{R}^n$ in doğal koordinat fonksiyonları veya Öklidyen koordinat fonksiyonları ve $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ sistemine de Öklidyen koordinat sistemi denir [9].

Tanım 1.5 $\mathbb{R}^n$ in bir U açığından reel sayılara tanımlı bir f fonksiyonunun her mertebeden kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f ye düzgündür denir.

$$f_{i_1 \dots i_q} = \frac{\partial^{i_q} f}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_q}}, \quad 1 \leqslant i_l \leqslant n, \quad 1 \leqslant l \leqslant q$$

kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f ye $C^{(q)}$ sınıfındandır denir. M den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün düzgün fonksiyonların cümlesi bir halkadır ve bu halka $\mathfrak{F}(M)$ veya $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ ile gösterilir [9].

Tanım 1.6 S bir topolojik uzay olsun. S nin bir U açığından $\mathbb{R}^n$ in bir $\xi(U)$ açık cümlesine giden ξ homeomorfizmine $n-$boyutlu bir koordinat sistemi veya harita denir.

$$\xi : U \subset S \longrightarrow \xi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

olmak üzere, $\forall\ p \in U$ için,

$$\xi(p) = \{x_1(p), ..., x_n(p)\}$$

dir. Burada $x_i = u_i \circ \xi : U \subset S \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına S topolojik uzayında ξ nin koordinat fonksiyonları denir [9].

Tanım 1.7 S üzerinde $n-$boyutlu koordinat sistemleri olan ξ ve η dönüşümlerinin düzgün kesişmesi için gerek ve yeter şart $\eta \circ \xi^{-1}$ ve $\xi \circ \eta^{-1}$ düzgün olmasıdır [9].

Açıkça, $\xi : U \subset S \to \xi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ve $\eta : V \subset S \to \eta(V) \subset \mathbb{R}^n$ ise, o zaman $\xi \circ \eta^{-1} : \xi(U \cap V) \longrightarrow \eta(U \cap V)$ şeklinde tanımlıdır ve ters fonksiyonu olan $\eta \circ \xi^{-1}$ de onun tersi yönde tanımlıdır.

Tanım 1.8 Bir S topolojik uzayı üzerinde, $n-$boyutlu bir $\mathcal{A}$ atlası S deki $n-$boyutlu koordinat sistemlerinin aşağıdaki önermeleri sağlayan kolleksiyonudur:

$A1)$ S nin her bir noktası $\mathcal{A}$ daki en az bir koordinat sisteminin tanım bölgesinde bulunur.

$A2)$ $\mathcal{A}$ daki herhangi iki koordinat sistemi düzgün kesişirler. Yani, $\forall\ \xi, \eta \in \mathcal{A}$ için

$$\xi \text{ ve } \eta \text{ düzgün kesişirler} \Leftrightarrow \ \eta \circ \xi^{-1} \text{ ve } \xi \circ \eta^{-1} \text{ düzgündür}$$

[9].

Tanım 1.9 $\mathcal{A}$, S topolojik uzayı üzerinde $n-$boyutlu bir atlas olsun. $\mathcal{A}$ nın her bir koordinat sistemiyle düzgün kesişen S deki her koordinat sistemi yine $\mathcal{A}$ nın elemanı oluyorsa, bu $\mathcal{A}$ atlasına $n-$boyutlu tam atlas denir [9].

Tanım 1.10 M Hausdorff uzayı üzerinde $n-$boyutlu bir tam atlas varsa bu uzaya $n-$boyutlu düzgün (diferensiyellenebilir) manifold denir [9].

Bu tezde, manifold deyince düzgün manifold anlaşılacaktır.

Tanım 1.11 M ve N iki manifold ve $\phi : M \to N$ düzgün bir dönüşüm olmak üzere $\phi^{-1} : N \to M$ ters dönüşümü de düzgün ise ϕ ye bir diffeomorfizm denir [9].

Teorem 1.12 M, $n-$boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda, $\xi : U \subset M \to \xi(U) \subset \mathbb{R}^n$ koordinat sistemi bir diffeomorfizmdir [9].

Teorem 1.13 M bir manifold olsun. N, M nin bir açık alt kümesi ise N, M nin bir alt manifoldudur ve N ye M nin açık alt manifoldu denir [1].

Tanım 1.14 M bir manifold olsun. $p \in M$ için,

$$\begin{aligned} v_p : \mathfrak{F}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \quad &\longrightarrow v_p(f) \end{aligned}$$

reel değerli fonksiyonu aşağıdaki önermeleri sağlıyorsa, v_p ye $p \in M$ de bir tanjant vektör denir:

(i) v_p, R-lineerdir. Yani, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere,

$$v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$$

dir.

(ii) v_p, Leibniz kuralını sağlar. Yani, $p \in M$ ve $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere,

$$v_p(fg) = v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g)$$

dir [9].

M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki bütün tanjant vektörlerinin cümlesi,

$$T_p(M) = \{v_p : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R} | v_p, R - \text{lineer ve Leibniz kuralını sağlar}\}$$

ile gösterilir. $T_p(M)$ cümlesi üzerinde

$$\begin{array}{rcl} + : T_P(M) \times T_P(M) & \longrightarrow & T_P(M) \\ (v_p \ \ , \ \ u_p) & \longrightarrow & v_p + u_p \end{array}$$

$$(v_p + u_p)(f) = v_p(f) + u_p(f), \quad \forall f \in \mathfrak{F}(M) \tag{1.1}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} : \mathbb{R} \times T_P(M) & \longrightarrow & T_P(M) \\ (c \ \ , \ \ v_p) & \longrightarrow & cv_p \end{array}$$

$$(cv_p)(f) = cv_p(f), \quad \forall f \in \mathfrak{F}(M) \tag{1.2}$$

biçiminde tanımlanan toplama ve skalerle çarpım işlemleriyle birlikte bir reel vektör uzayı olur. $T_p(M)$ vektör uzayına M nin p noktasındaki tanjant uzayı denir [9].

Tanım 1.15 M bir manifold ve $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p \in M$ de bir koordinat sistemi olsun. $f \in \mathfrak{F}(M)$ ise

$$\partial_i|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u_i}(\xi(p)), \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $u_1, u_2, \ldots, u_n$ $\mathbb{R}^n$ in doğal koordinat fonksiyonlarıdır ve $p \in M$ için $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ birer tanjant vektördür [9].

Teorem 1.16 M bir manifold ve $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$, $p \in M$ de bir koordinat sistemi olsun. $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_2}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ cümlesi $T_p(M)$ nin bir bazıdır [9].

Tanım 1.17 $\phi : M \to N$ düzgün dönüşüm olsun. $p \in M$, $v_p \in T_p(M)$ ve $g \in \mathfrak{F}(N)$ için,

$$\phi_{*p}(v_p)(g) = d\phi_p(v_p)(g) = v_p(g \circ \phi) \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlı

$$\phi_{*p} = d\phi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\phi(p)}(N)$$

lineer fonksiyonuna $p \in M$ de ϕ nin diferensiyel dönüşümü denir [9].

Lemma 1.18 $\phi : M^m \to N^n$ bir düzgün dönüşüm olsun. Eğer $\xi = (x_1, x_2, ...x_m)$, $p \in M$ noktasında bir koordinat sistemi ve $\eta = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\phi(p) \in N$ noktasında bir koordinat sistemi ise

$$d\phi_p(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y_i \circ \phi)}{\partial x_j}(p)\frac{\partial}{\partial y_i}|_{\phi(p)}, \quad (1 \leq j \leq m)$$

dir.

Koordinat fonksiyonlarına bağlı olarak $d\phi_p$ nin matrisi

$$\left(\frac{\partial(y_i \circ \phi)}{\partial x_j}(p)\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$$

dir ve p noktasında ξ, η ya göre ϕ nin Jacobian matrisi olarak adlandırılır [9].

Lemma 1.19 $\phi : M \to N$ ve $\psi : N \to P$ düzgün dönüşümler ise $\forall p \in M$ için,

$$d(\psi \circ \phi)_p = d\psi_{\phi(p)} \circ d\phi_p$$

dir [9].

Tanım 1.20 I, $\mathbb{R}$ nin açık bir aralığı olmak üzere, diferensiyellenebilen bir

$$\alpha : \ I \to M$$

dönüşümüne, M manifoldunda bir *eğri* denir [9].

Tanım 1.21 $\alpha : I \to M$ bir eğri olsun. $\forall\ t \in I$ için

$$\alpha'(t) = d\alpha\left(\frac{d}{du}|_t\right) \in T_{\alpha(t)}(M)$$

dir [9].

Tanım 1.22 Yay parametreli

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset \mathbb{R} &\to Sol_3 \\ s \quad &\to \gamma(s) \end{aligned} \tag{1.4}$$

eğrisi verilsin. $\forall\ s \in I$ için $\gamma'(s)$ hız vektörü, sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa, γ eğrisine helis, $Sp\{U\}$ ya da bu helisin ekseni denir.

Tanım 1.23 Bir M manifoldu üzerindeki bir vektör alanı, manifoldun her noktasına o noktadaki tanjant uzayın bir elemanını karşılık getiren dönüşümdür. V, M üzerinde bir vektör alanı ve $f \in \mathfrak{F}(M)$ ise

$$(Vf)(p) = V_p(f), \quad \forall\ p \in M$$

ile tanımlı Vf, M üzerinde reel değerli bir fonksiyondur. Her $f \in \mathfrak{F}(M)$ için Vf düzgün bir fonksiyon ise V ye düzgündür denir. M üstünde tanımlanan tüm düzgün vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir. $f \in \mathfrak{F}(M)$ ve $V,\ W \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (fV)_p &= f(p)V_p, \qquad p \in M \\ (V+W)_p &= V_p + W_p \end{aligned}$$

işlemleriyle birlikte $\chi(M)$ kümesi $\mathfrak{F}(M)$ halkası üzerinde bir modüldür. Ayrıca $V,\ W \in \chi(M),\ \ f \in \mathfrak{F}(M)$ için $V+W \in \chi(M)$ ve $fV \in \chi(M)$ dir [9].

Tanım 1.24 $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $U \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi olsun. O zaman her $1 \leqslant i \leqslant n$ için her $p \in U$ ya $\partial_i|_p$ tanjant vektörünü karşılık getiren $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ düzgün vektör alanına ξ nin i. koordinat vektör alanı denir [9].

Tanım 1.25 $\chi(M)$, M üzerinde tanımlanan düzgün vektör alanlarının uzayı olmak üzere, $\chi(M)$ üzerinde bracket operatörü olarak bilinen,

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (V,W) \qquad &\to [V,W] \end{aligned}$$

işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise $\chi(M)$ vektör uzayına $[\ ,\ ]$ operatörü ile $\chi(M)$ üzerinde Lie cebiri denir;

(i) Bilineerlik özeliği; $\forall\ V, W, X \in \chi(M)$ ve $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} [aV + bW, X] &= a[V,X] + b[W,X], \\ [X, aV + bW] &= a[X,V] + b[X,W]. \end{aligned}$$

(ii) Antisimetrik (alterne) olma özeliği; $\forall\ V, W \in \chi(M)$ için;

$$[V,W] = -[W,V].$$

(iii) Jakobi özdeşliği; $\forall\ V, W, X \in \chi(M)$ olmak üzere;

$$[V,[W,X]] + [W,[X,V]] + [X,[V,W]] = 0$$

dır [9].

Tanım 1.26 M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ olsun. $T_p(M)$ nin cebirsel duali olan $T_p^*(M)$ uzayına M nin p noktasındaki kotanjant uzayı denir ve

$$T_p^*(M) = \{v^* | v^* : T_p(M) \to \mathbb{R},\ v^* \text{ lineer}\}$$

ile gösterilir. $T_p^*(M)$ nin her bir elemanına, $p \in M$ noktasında kotanjant vektör adı verilir [5].

Tanım 1.27 M manifoldunun her bir p noktasına $T_p^*(M)$ kotanjant uzayının bir elemanını karşılık getiren fonksiyona, M üstünde bir $1-$form denir. $1-$formların cümlesi $\chi^*(M)$ ile gösterilir.

Tanım 1.28 $f \in \mathfrak{F}(M)$ olsun. $p \in M,\ v_p \in T_p(M)$ için

$$(df)_p(v_p) = v_p(f) \tag{1.5}$$

eşitliğiyle tanımlanan

$$(df)_p : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun p noktasındaki diferensiyeli denir. M uzayının her bir p noktasına

$$df : p \longrightarrow (df)_p$$

fonksiyonunu karşılık getiren df fonksiyonuna f fonksiyonunun diferensiyeli denir. Açıkça df, M uzayı üstünde bir $1-$formdur [10].

$U \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun. df dönüşümünde f yerine x_i alınırsa, U üzerinde $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ koordinat $1-$formlarını elde edilir.

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

olduğu için $\chi(M)$ uzayının standart bazı olan

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} : 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$$

ile $\chi^*(M)$ uzayının standart bazı olan

$$\{dx_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

bazı, dual bazlardır [9].

Teorem 1.29 $\xi = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $p \in M$ de bir koordinat sistemi ise $\partial_1|_p, ..., \partial_n|_p$ koordinat vektörlerini $\forall v \in T_p(M)$ için bazlar cinsinden

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\partial_i|_p$$

şeklinde yazabiliriz [9].

Tanım 1.30 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ üzerinde Öklid metriği denir [8].

Tanım 1.31 M bir manifold, M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve düzgün fonksiyonların cümlesi de $\mathfrak{F}(M)$ olmak üzere,

$$\langle\ ,\ \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to \mathfrak{F}(M)$$

dönüşümü aşağıdaki önermeleri sağlıyorsa, bu dönüşüme M üzerinde Riemann metriği ya da metrik tensör denir:

(i) $\langle\ ,\ \rangle$ dönüşümü 2-lineerdir, yani $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle aX_1 + bX_2, Y\rangle &= a\langle X_1, Y\rangle + b\langle X_2, Y\rangle, \quad X_1, X_2, Y \in \chi(M), \\ \langle X, aY_1 + bY_2\rangle &= a\langle X, Y_1\rangle + b\langle X, Y_2\rangle, \quad X, Y_1, Y_2 \in \chi(M). \end{aligned}$$

(ii) $\langle\ ,\ \rangle$ dönüşümü simetriktir, yani

$$\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle, \qquad X, Y \in \chi(M).$$

(iii) $\langle\ ,\ \rangle$ dönüşümü pozitif tanımlıdır,

$$\langle X, X\rangle \geqslant 0, \ \ \langle X, X\rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0, \quad X \in \chi(M).$$

Üzerinde Riemann metriği tanımlanmış olan düzgün manifolda ise Riemann manifoldu denir ve $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ ile gösterilir [6].

Tanım 1.32 M, $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üstündeki düzgün vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) \qquad &\to D_X Y \end{aligned}$$

operatörü, $\forall\ f \in \mathfrak{F}(M)$ ve $X,\ Y,\ Z \in \chi(M)$ için,

D1) $\quad D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z,$

D2) $\quad D_{(X+Y)} Z = D_X Z + D_Y Z,$

D3) $\quad D_{fX}Y = fD_XY$,

D4) $\quad D_X(fY) = fD_XY + X[f]Y$,

önermelerini sağlıyor ise D ye M üzerinde bir lineer konneksiyon (afin konneksiyon) denir ve D_X ise X vektör alanı yönünde kovaryant türev olarak adlandırılır. Ayrıca,

D5) $\quad D_XY - D_YX = [X, Y]$ (sıfır torsiyon özeliği),

D6) $\quad X[\langle Y, Z\rangle] = \langle D_XY, Z\rangle + \langle Y, D_XZ\rangle$ (konneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği),

önermeleri de sağlanıyor ise D, M nin Riemann konneksiyonu ya da Levi-Civita konneksiyonu olarak adlandırılır ve D yerine genellikle ∇ sembolü kullanılır. Levi-Civita konneksiyonu genellikle

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_XY, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad -\langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle \end{aligned}$$

Koszul formülüyle karakterize edilir. (D5) özeliğine sahip D konneksiyonuna, simetrik konneksiyon da denir. Şu halde Levi-Civita konneksiyonu bir simetrik konneksiyondur [9].

Teorem 1.33 M, bir Riemann manifoldu olsun. O zaman, M üzerindeki metrik tensörün ifadesi;

$$\langle\ ,\ \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx_i \otimes dx_j$$

dir. Burada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ile M nin bir koordinat komşuluğundaki koordinat fonksiyonları gösterilmektedir [6].

Tanım 1.34 Bir M Riemann manifoldunda γ' vektör alanı paralel olan $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi geodeziktir. Yada ivme vektörü sıfır (γ'') olan eğrilerdir [9].

Tanım 1.35 M yüzeyi üstünde ∂_1, ∂_2 ile gösterdiğimiz vektör alanlarını göz önüne alalım. Bu iki vektör alanı, yüzeye teğet vektör alanlarıdır. Yüzeyin her bir noktasında, teğet uzayın bir tabanını verirler. Bundan dolayı $1 \leq i, j \leq 2$ için

$$\nabla_{\partial_j}\partial_i = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}\partial_k$$

olacak biçimde Γ_{ij}^k fonksiyonları vardır. Bu fonksiyonlara Christoffel fonksiyonları (veya Christoffel simgeleri) denir.

$[\partial_i, \partial_j] = 0$ olduğu için $(D5)$ ten $D_{\partial_i}(\partial_j) = D_{\partial_j}(\partial_i)$ dir. Dolayısıyla $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$ olarak yazılabilir[10].

Teorem 1.36 $x_1, x_2, ..., x_n$, $U \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi olsun. U da bir γ eğrisi M nin bir geodeziğidir gerek ve yeter koşul x_i koordinat fonksiyonu

$$\frac{d^2(x_k)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \qquad (1 \leq i, j, k \leq n)$$

geodezik denklemini sağlar [9].

İspat. M Riemann manifoldu üzerindeki

$$\begin{aligned} \gamma : I &\to M \\ t &\to \gamma(t) \end{aligned}$$

eğrisi için

$$\begin{aligned} \gamma'(t) = (d\gamma)_t(\frac{d}{du}|_t) &= \sum_{i=1}^n \frac{d(x_i \circ \gamma)}{du}|_t \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\gamma(t)} \\ &= \frac{d(x_1 \circ \gamma)}{du}|_t \frac{\partial}{\partial x_1}|_{\gamma(t)} + ... + \frac{d(x_n \circ \gamma)}{du}|_t \frac{\partial}{\partial x_n}|_{\gamma(t)} \\ &= (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), ..., \gamma_n'(t)) \end{aligned} \tag{1.6}$$

dir. Baz teoreminden dolayı, $Z \in \chi(\gamma)$ ise $\gamma(t)$ noktasında,

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n Z(t) x_i \partial_i|_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^n (Z(t)x_i)(t)\partial_i|_{\gamma(t)}$$

şeklinde yazılabilir. $Zx_i : I \to R$ bileşen fonksiyonları Z^i ile gösterilirse,

$$Z' = \sum_{i=1}^n \frac{dZ^i}{dt}\partial_i|_\gamma + \sum_{i=1}^n Z^i(\partial_i|_\gamma)$$

olup, burada $(\partial_i|_\gamma)' = D_{\gamma'}(\partial_i)$ olarak yazılabileceğinden,

$$Z' = \sum_{i=1}^n \frac{dZ^i}{dt}\partial_i|_\gamma + \sum_{i=1}^n Z^i D_{\gamma'}(\partial_i|_\gamma)$$

dir. (1.6) eşitliği Z' ifadesinde yerine yazılıp D nin lineerliğinden,

$$
\begin{aligned}
Z' &= \sum_{i=1}^{n} \frac{dZ^i}{dt}\partial_i|_\gamma + \sum_{i=1}^{n} Z^i D_{\sum_{i=1}^{n} \frac{d(x_i\circ\gamma)}{du}|_t \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\gamma(t)}}(\partial_i|_\gamma) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{dZ^i}{dt}\partial_i|_\gamma + \sum_{i=1}^{n} Z^i \sum_{j=1}^{n}(\frac{d(x_j\circ\gamma)}{du}|_t D_{\partial_j|_{\gamma(t)}}\partial_j|_\gamma) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{dZ^k}{dt}\partial_k|_\gamma + \sum_{i=1}^{n} Z^i \sum_{j=1}^{n}(\frac{d(x_j\circ\gamma)}{du}|_t \Gamma_{ji}^k\partial_k|_\gamma) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{dZ^k}{dt} + \sum_{j,i=1}^{n} \frac{d(x_j\circ\gamma)}{du}|_t Z^i\Gamma_{ji}^k\right)\partial_k|_\gamma
\end{aligned}
$$

yazılabilir. $Zx_k = Z^k = \frac{d(x_k\circ\gamma)}{dt}$ olduğundan,

$$
Z' = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d^2(x_k\circ\gamma)}{dt^2} + \sum_{j,i=1}^{n}\Gamma_{ji}^k \frac{d(x_i\circ\gamma)}{dt}\frac{d(x_j\circ\gamma)}{dt}\right)
$$

dir.

Özel olarak $Z=\gamma'$ alınırsa, $Z'=\gamma''$, γ eğrisinin ivmesi olarak adlandırılır. γ üzerindeki bir Z vektör alanı için $Z' = D_{\gamma'}Z$ yazılabilir. Ayrıca $\gamma'' = D_{\gamma'}(\gamma') = D_Z Z$ dir. Burada $\gamma''=0$ olması Z nin paralel olduğunu söylemektedir. O halde

$$
\frac{d^2(x_k\circ\gamma)}{dt^2} + \sum_{j,i=1}^{n}\Gamma_{ji}^k \frac{d(x_i\circ\gamma)}{dt}\frac{d(x_j\circ\gamma)}{dt} = 0
$$

dir. ■

Tanım 1.37 G bir grup, aynı zamanda düzgün bir manifold olsun. Bu durumda $\forall\ b\in G$ için ters eleman b^{-1} olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
h : G\times G &\to G \\
(a\ \ ,\ \ b) &\to h(a,b) = ab^{-1}
\end{aligned}
$$

dönüşümü düzgün ise, G ye bir Lie grubu denir [9].

Tanım 1.38 G bir Lie grubu ve $a\in G$ olsun.

$$
\begin{aligned}
L_a : G &\longrightarrow G \\
g &\longrightarrow L_a(g) = ag
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
R_a : G &\longrightarrow G \\
g &\longrightarrow R_a(g) = ga
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı diffeomorfizmlere, sırasıyla, $a \in G$ ile belirli sol çarpım (sol öteleme) ve sağ çarpım (sağ öteleme) denir [7, 6].

Tanım 1.39 G, bir Lie grubu ve $\forall\ a \in G$ için sol ve sağ çarpımlar, sırasıyla, L_a ve R_a olsun. $X \in \chi(G)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} dL_a = (L_a)_* : T_G(g) &\longrightarrow T_G(ag) \\ X_g &\longrightarrow (L_a)_*(X_g) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} dR_a = (R_a)_* : T_G(g) &\longrightarrow T_G(ga) \\ X_g &\longrightarrow (R_a)_*(X_g) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı dönüşümlere, sırasıyla, sol grup paralelizmi ve sağ grup paralelizmi denir [7, 6].

Tanım 1.40 G, bir Lie grubu ve G üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere, $\forall\ a, g \in G$ için;

$$(L_a)_*(X_g) = X_{ag}$$

ise X vektör alanına bir sol-invaryant vektör alanı denir.

Sol invaryant vektör alanları düzgündür. Vektör alanlarının alışılmış toplama ve skalerle çarpım işlemleri sol invaryant vektör alanlarının cümlesini bir vektör uzayı yapar. Bu vektör uzayı $\chi_L(G)$ ile gösterilir. $\chi_L(G)$ de $[\ ,\ ]$ parantez operatörü tanımlanarak $\chi_L(G)$ bir Lie cebiri olur. $\chi_L(G)$, $boyG = n$ (sonlu) boyutuna sahiptir [6, 9].

Teorem 1.41 $X \in \chi_L(G)$ elemanını $X_e \in T_e(G)$ vektör alanına dönüştüren,

$$:\ \chi_L(G) \longrightarrow T_e(G)$$

dönüşümü bir lineer izomorfizmdir. Bu izomorfizm $\chi_L(G) \cong T_e(G)$ biçiminde gösterilir. Burada e, G nin grup işlemine göre birim elemanıdır [9].

Tanım 1.42 G, Lie grubu üzerinde tanımlı $\langle\ ,\ \rangle$ metriği, $\forall\ a, b \in G$ ve $\forall\ u, v \in T_bG$ için,

$$\langle u, v\rangle_b = \langle (dL_a)_b u, (dL_a)_b v\ \rangle_{ab} \tag{1.7}$$

şartını sağlıyorsa $\langle\ ,\ \rangle$ metriğine sol invaryanttır denir. Benzer şekilde $\langle\ ,\ \rangle$ metriği $\forall\ a, b \in G$ ve $\forall\ u, v \in T_bG$ için,

$$\langle u, v\rangle_b = \langle (dR_a)_b u, (dR_a)_b v,\ \rangle_{ba} \tag{1.8}$$

şartını sağlıyorsa $\langle\ ,\ \rangle$ metriğine sağ invaryanttır denir. Hem sol invaryant hem de sağ invaryant olan bir Riemann metriğine bi-invaryant metrik denir [3].

Teorem 1.43 G, Lie grubu üzerindeki sol invaryant (sağ invaryant) metrikler ile G nin $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerindeki iç çarpımları arasında bijektif eşleme vardır.

İspat. G üzerindeki metrik sol invaryant ise o zaman $\forall\ a \in G$ ve $\forall\ u, v \in T_aG$ için,

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_a &= \langle d(L_a \circ L_{a^{-1}})_a u, d(L_a \circ L_{a^{-1}})_a v\rangle_a \\
&= \langle d(L_a)_e((dL_{a^{-1}})_a u), (dL_a)_e((dL_{a^{-1}})_a v)\rangle_a \\
&= \langle (dL_{a^{-1}})_a u, (dL_{a^{-1}})_a v\rangle_e
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

Bu eşitlik metriğin $\mathfrak{g} = T_eG$ ye kısıtlaması ile tam olarak ifade edilebilir. Tersine, $\mathfrak{g}$ üzerindeki iç çarpım $\langle\ ,\ \rangle$ olsun ve $\forall\ g \in G$ ve $\forall\ u, v \in T_gG$ için,

$$\langle u, v\rangle_g = \langle (dL_{g^{-1}})_g u, (dL_{g^{-1}})_g v\rangle \tag{1.9}$$

dir. Açık olarak $\langle\ ,\ \rangle_g$ iç çapım ailesi, G üzerindeki Riemann metriğini verir. Sol invaryantlığı ispatlamak için zincir kuralı ve sol ötelemelerin grup izomorfizmleri oluşu kullanılacaktır. $\forall\ a, b \in G$ ve $\forall\ u, v \in T_bG$ için,

$$\begin{aligned}
\langle (dL_a)_b u, (dL_a)_b v\rangle_{ab} &= \langle (dL_{(ab)^{-1}})_{ab}((dL_a)_b u), (dL_{(ab)^{-1}})_{ab}((dL_a)_b v)\rangle_e \\
&= \langle d(L_{(ab)^{-1}} \circ L_a)_b u, d(L_{(ab)^{-1}} \circ L_a)_b v\rangle_e \\
&= \langle d(L_{b^{-1}a^{-1}} \circ L_a)_b u, d(L_{b^{-1}a^{-1}} \circ L_a)_b v\rangle_e \\
&= \langle (dL_{b^{-1}})_b u, (dL_{b^{-1}})_b v\rangle_e \\
&= \langle u, v\rangle_b
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

G üzerindeki sağ invaryant metrik için de benzer hesaplamalar yapılarak, $\forall\ u, v \in T_gG$ ve $\forall\ g \in G$ için,

$$\langle u, v\rangle_g = \langle (dR_{g^{-1}})_g u, (dR_{g^{-1}})_g v\rangle \tag{1.10}$$

elde edilir[3]. ■

Tanım 1.44 Bileşenleri reel sayı olan bütün $n \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $M_n(\mathbb{R})$ ile gösterilir yani,

$$M_n(\mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}]_{n\times n} |\ a_{ij} \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$

dir.

Tanım 1.45 $(G,\cdot)$ ve $(G^{'},*)$ iki grup ve $f: G \longrightarrow G'$ bir fonksiyon olsun. $\forall\, a,b \in G$ için ,

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$$

ise f ye G den G' ye bir grup homomorfizmi denir [4].

2 Sol_3 UZAYI

Bu bölümde, Sol_3 ün Lie grup yapısı incelendi.

İlk olarak,

$$Sol_3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

cümlesini $(m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3) \in Sol_3$ için

$$(m_1, m_2, m_3) * (n_1, n_2, n_3) = (m_1 + e^{-m_3} n_1, m_2 + e^{m_3} n_2, m_3 + n_3) \tag{2.1}$$

işlemi ile birlikte ele alalım.

Teorem 2.1 $(Sol_3, *)$ cümlesi bir gruptur.

İspat.
G1) Kapalılık özelliği:
$\forall\ M = (m_1, m_2, m_3),\ N = (n_1, n_2, n_3) \in Sol_3$ için
$M * N = (m_1, m_2, m_3) * (n_1, n_2, n_3) = (m_1 + e^{-m_3} n_1, m_2 + e^{m_3} n_2, m_3 + n_3) \in Sol_3$ dır.
G2) Birleşme özelliği:
$\forall\ M = (m_1, m_2, m_3),\ N = (n_1, n_2, n_3),\ R = (r_1, r_2, r_3) \in Sol_3$ olsun

$$\begin{aligned} M * (N * R) &= (m_1, m_2, m_3) * (n_1 + e^{-n_3} r_1, n_2 + e^{n_3} r_2, n_3 + r_3), \\ &= (m_1 + e^{-m_3}(n_1 + e^{-n_3} r_1), m_2 + e^{m_3}(n_2 + e^{n_3} r_2), \\ &\quad m_3 + n_3 + r_3), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} (M * N) * R &= (m_1 + e^{-m_3} n_1, m_2 + e^{m_3} n_2, m_3 + n_3) * (r_1, r_2, r_3), \\ &= (m_1 + e^{-m_3} n_1 + e^{-m_3 - n_3} r_1, m_2 + e^{m_3} n_2 + e^{m_3 + n_3} r_2, \\ &\quad m_3 + n_3 + r_3) \end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.2) ve (2.3) eşitliklerinden birleşme özelliği sağlanır.
G3) Birim eleman özelliği:
$\forall\ M \in Sol_3$ için $M * e = e * M = M$ olacak şekilde $\exists\ e \in Sol_3$ vardır:
$e = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ için

$$M * e = (m_1 + e^{-m_3} \varepsilon_1, m_2 + e^{m_3} \varepsilon_2, m_3 + \varepsilon_3) = (m_1, m_2, m_3)$$

olur. Buradan,

$$
\begin{aligned}
m_3 + \varepsilon_3 = m_3 &\Rightarrow \varepsilon_3 = 0, \\
m_1 + e^{-m_3}\varepsilon_1 = m_1 &\Rightarrow \varepsilon_1 = 0, \\
m_2 + e^{m_3}\varepsilon_2 = m_2 &\Rightarrow \varepsilon_2 = 0,
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca,

$$e * M = (\varepsilon_1 + e^{-\varepsilon_3}m_1, \varepsilon_2 + e^{\varepsilon_3}m_2, \varepsilon_3 + m_3) = (m_1, m_2, m_3)$$

olur. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_3 + m_3 = m_3 &\Rightarrow \varepsilon_3 = 0, \\
\varepsilon_1 + e^{-\varepsilon_3}m_1 = m_1 &\Rightarrow \varepsilon_1 = 0, \\
\varepsilon_2 + e^{\varepsilon_3}m_2 = m_2 &\Rightarrow \varepsilon_2 = 0
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $e = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (0, 0, 0) \in Sol_3$ dir.

G4) Ters eleman özelliği:

$\forall\ M = (m_1, m_2, m_3) \in Sol_3$, $S = (s_1, s_2, s_3) \in Sol_3$ için
$M * S = S * M = e$ olacak şekilde $s \ \in Sol_3$ vardır:

$$
\begin{aligned}
M * S &= (m_1, m_2, m_3) * (s_1, s_2, s_3), \\
&= (m_1 + e^{-m_3}s_1, m_2 + e^{m_3}s_2, m_3 + s_3) = (0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$
\begin{aligned}
m_3 + s_3 = 0 &\Rightarrow s_3 = -m_3, \\
m_1 + e^{-m_3}s_1 = 0 &\Rightarrow s_1 = -m_1e^{m_3}, \\
m_2 + e^{m_3}s_2 = 0 &\Rightarrow s_2 = -m_2e^{-m_3}
\end{aligned}
$$

dır. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
S * M &= (s_1, s_2, s_3) * (m_1, m_2, m_3), \\
&= (s_1 + e^{-s_3}m_1, s_2 + e^{s_3}m_2, s_3 + m_3) = (0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$
\begin{aligned}
s_3 + m_3 = 0 &\Rightarrow s_3 = -m_3, \\
s_1 + e^{-s_3}m_1 = 0 &\Rightarrow s_1 = -m_1e^{m_3}, \\
m_2 + e^{m_3}s_2 = 0 &\Rightarrow s_2 = -m_2e^{-m_3}
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $S=(s_1,s_2,s_3)=(-m_1e^{m_3},-m_2e^{-m_3},-m_3)\in Sol_3$ dir.
Bu özelliklerle birlikte $(Sol_3,*)$ cümlesi bir gruptur.

$\forall\ M,N\in Sol_3$ için

$$M*N=(m_1+e^{-m_3}n_1,m_2+e^{m_3}n_2,m_3+n_3), \tag{2.4}$$

$$N*M=(n_1+e^{-n_3}m_1,n_2+e^{n_3}m_2,n_3+m_3), \tag{2.5}$$

ifadelerinden (2.4) ve (2.5) eşitlikleri eşit olmadığından dolayı değişme özelliği sağlanmamaktadır. Yani değişmeli grup değildir. ■

Teorem 2.2 $M_3(\mathbb{R})$ nin

$$Sol_M=\left\{S=\begin{bmatrix} e^{-m_3} & 0 & m_1\\ 0 & e^{m_3} & m_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}: m_1,m_2,m_3\in\mathbb{R}\right\}$$

biçiminde tanımlanan alt cümlesi matris çarpım işlemi altında bir gruptur.

İspat.

$$S_1=\begin{bmatrix} e^{-m_3} & 0 & m_1\\ 0 & e^{m_3} & m_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ S_2=\begin{bmatrix} e^{-n_3} & 0 & n_1\\ 0 & e^{n_3} & n_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ S_3=\begin{bmatrix} e^{-r_3} & 0 & r_1\\ 0 & e^{r_3} & r_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\in Sol_M$$

olsun.

G1) Kapalılık Özeliği:

$$\begin{aligned} S_1S_2 &= \begin{bmatrix} e^{-m_3} & 0 & m_1\\ 0 & e^{m_3} & m_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-n_3} & 0 & n_1\\ 0 & e^{n_3} & n_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} e^{-(m_3+n_3)} & 0 & m_1+e^{-m_3}n_1\\ 0 & e^{m_3+n_3} & m_2+e^{m_3}n_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\in Sol_M \end{aligned}$$

dır.

G2) Birleşme Özeliği: $S_1(S_2S_3) = (S_1S_2)S_3$ eşitliği sağlanır:

$$S_1(S_2S_3) = \begin{bmatrix} e^{-m_3} & 0 & m_1 \\ 0 & e^{m_3} & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e^{-n_3} & 0 & n_1 \\ 0 & e^{n_3} & n_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-r_3} & 0 & r_1 \\ 0 & e^{r_3} & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-m_3} & 0 & m_1 \\ 0 & e^{m_3} & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-(n_3+r_3)} & 0 & n_1 + e^{-n_3}r_1 \\ 0 & e^{n_3+r_3} & n_2 + e^{n_3}r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-(m_3+n_3+r_3)} & 0 & m_1 + n_1e^{-m_3} + e^{-(m_3+n_3)}r_1 \\ 0 & e^{m_3+n_3+r_3} & m_2 + n_2e^{m_3} + e^{m_3+n_3}r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$(S_1S_2)S_3 = \left(\begin{bmatrix} e^{-m_3} & 0 & m_1 \\ 0 & e^{m_3} & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-n_3} & 0 & n_1 \\ 0 & e^{n_3} & n_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e^{-r_3} & 0 & r_1 \\ 0 & e^{r_3} & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-(m_3+n_3)} & 0 & m_1 + n_1e^{-m_3} \\ 0 & e^{m_3+n_3} & m_2 + n_2e^{m_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-r_3} & 0 & r_1 \\ 0 & e^{r_3} & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-(m_3+n_3+r_3)} & 0 & m_1 + n_1e^{-m_3} + e^{-(m_3+n_3)}r_1 \\ 0 & e^{m_3+n_3+r_3} & m_2 + n_2e^{m_3} + e^{m_3+n_3}r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup, $S_1(S_2S_3) = (S_1S_2)S_3$ eşitliği sağlanır.

G3) Birim eleman: 3×3 tipindeki her kare matris için

$$S\ I_3 = I_3\ S = S$$

olduğundan, Sol_M grubunun birim elemanı I_3 birim matrisidir.

G4) Ters eleman: $\forall\ S = \begin{bmatrix} e^{-m_3} & 0 & m_1 \\ 0 & e^{m_3} & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in Sol_M$ matrisi için

$$S^{-1}\ S = S\ S^{-1} = I$$

olacak şekilde bir tek $S^{-1} = \begin{bmatrix} e^{m_3} & 0 & -m_1e^{m_3} \\ 0 & e^{-m_3} & -m_2e^{-m_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in Sol_M$ vardır.

Sol_M cümlesi matris çarpma işlemi ile birlikte bir gruptur, fakat değişmeli grup değildir. ■

Teorem 2.3

$$\varphi : Sol_M = \left\{ A = \begin{bmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow (Sol_3, *)$$

dönüşümünü $A \in Sol_M$ için $\varphi(A) = (x, y, z)$ olacak şekilde tanımlayalım. φ bir grup izomorfizmidir.

İspat.

φ **birebirdir:** $A_1, A_2 \in Sol_M$ için $\varphi(A_1) = \varphi(A_2) \Rightarrow A_1 = A_2$ olduğu gösterilmelidir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} e^{-z_1} & 0 & x_1 \\ 0 & e^{z_1} & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} e^{-z_2} & 0 & x_2 \\ 0 & e^{z_2} & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in Sol_M$$

olsun. Bu durumda;

$$\varphi(A_1) = (x_1, y_1, z_1) = b_1 \quad \text{ve} \quad \varphi(A_2) = (x_2, y_2, z_2) = b_2$$

olup,

$$\begin{aligned} \varphi(A_1) = \varphi(A_2) &\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2\ ) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2) \\ &\Rightarrow A_1 = A_2 \end{aligned}$$

bulunur.

φ **örtendir:** $\forall\ b = (x, y, z) \in Sol_3$ için $\varphi(A) = b$ olacak şekilde $A = \begin{bmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in Sol_M$ vardır.

φ **grup homomorfizmidir:**

$$A_1 = \begin{bmatrix} e^{-z_1} & 0 & x_1 \\ 0 & e^{z_1} & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} e^{-z_2} & 0 & x_2 \\ 0 & e^{z_2} & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in Sol_M$$

olmak üzere,

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} e^{-z_1-z_2} & 0 & x_1 + e^{-z_1x_2} \\ 0 & e^{z_1+z_2} & y_1 + e^{z_1y_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned} \varphi(K_1K_2) &= \varphi\left(\begin{bmatrix} e^{-z_1-z_2} & 0 & x_1 + e^{-z_1x_2} \\ 0 & e^{z_1+z_2} & y_1 + e^{z_1y_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x_1 + x_2e^{-z_1}, y_1 + y_2e^{z_1}, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(K_1) * \varphi(K_2) &= (x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) \\ &= (x_1 + x_2e^{-z_1}, y_1 + y_2e^{z_1}, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

olup ,

$$\varphi(K_1K_2) = \varphi(K_1) * \varphi(K_2)$$

dir. O halde, Tanım 1.45 gereğince φ bir grup homomorfizmidir.
Dolayısıyla φ bir grup izomorfizmidir.

■

Teorem 2.4 $U = (u_1, u_2, u_3), \quad V = (v_1, v_2, v_3) \in \chi(Sol_3)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \chi(Sol_3) \times \chi(Sol_3) &\to \mathfrak{F}(Sol_3) \\ (U, V) &\to \tilde{g}(U, V) : Sol_3 \to \mathbb{R} \\ & \qquad P = (p_1, p_2, p_3) \to (\tilde{g}(U, V))(P) = e^{2p_3}u_1v_1 + e^{-2p_3}u_2v_2 + u_3v_3 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\tilde{g}$, Sol_3 de bir Riemann metriğidir.

İspat. Tanım 1.31 gereğince $\tilde{g}$ nın simetri, bilineer ve pozitif tanımlılık özelliklerini sağladığı gösterilmelidir.
(i) Simetri özelliği: $U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \chi(Sol_3)$ için,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(U, V) &= e^{2x_3}u_1v_1 + e^{-2x_3}u_2v_2 + u_3v_3 \\ &= e^{2x_3}v_1u_1 + e^{-2x_3}v_2u_2 + v_3u_3 \\ &= \tilde{g}(V, U) \end{aligned}$$

olduğundan simetri özelliği sağlanır.
(ii) **Bilineerlik özelliği**: $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(aU+bV,Y) &= e^{2x_3}(au_1+bv_1)y_1 + e^{-2x_3}(au_2+bv_2)y_2 + (au_3+bv_3)y_3 \\
&= ae^{2x_3}u_1y_1 + be^{2x_3}v_1y_1 + ae^{-2x_3}u_2y_2 + be^{-2x_3}v_2y_2 + au_3y_3 + bv_3y_3 \\
&= a(e^{2x_3}u_1y_1 + e^{-2x_3}u_2y_2 + u_3y_3) + b(e^{2x_3}v_1y_1 + e^{-2x_3}v_2y_2 + v_3y_3) \\
&= a\tilde{g}(U,Y) + b\tilde{g}(V,Y), \\
\tilde{g}(Y,aU+bV) &= e^{2x_3}y_1(au_1+bv_1) + e^{-2x_3}y_2(au_2+bv_2) + y_3(au_3+bv_3) \\
&= ae^{2x_3}y_1u_1 + be^{2x_3}y_1v_1 + ae^{-2x_3}y_2u_2 + be^{-2x_3}y_2v_2 + ay_3u_3 + y_3bv_3 \\
&= a(e^{2x_3}y_1u_1 + e^{-2x_3}y_2u_2 + y_3u_3) + b(e^{2x_3}y_1v_1 + e^{-2x_3}y_2v_2 + y_3v_3) \\
&= a\tilde{g}(Y,U) + b\tilde{g}(Y,V)
\end{aligned}
$$

olduğundan bilineerlik özelliği sağlanır.
(iii) **Pozitif tanımlılık özelliği**: $\forall\ U \in \chi(Sol_3)$ için,

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(U,U) &= e^{2x_3}u_1u_1 + e^{-2x_3}u_2u_2 + u_3u_3 \\
&= e^{2x_3}u_1^2 + e^{-2x_3}u_2^2 + u_3^2
\end{aligned}
$$

olduğudan $\tilde{g}(U,U) \geq 0$ dir.

$$\tilde{g}(U,U) = 0 \Rightarrow \tilde{g}(U,U) = e^{2x_3}u_1^2 + e^{-2x_3}u_2^2 + u_3^2 = 0$$

olduğundan $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ dir. O halde $\tilde{g}$, Sol_3 de bir Riemann metriğidir.

Böylece Sol_3, $\tilde{g}$ metriği ile birlikte bir Riemann manifoldudur. ■

Teorem 2.5 $M, N \in Sol_3$ için

$$
\begin{aligned}
h : Sol_3 \times Sol_3 &\to Sol_3 \\
(M,N) &\to h(M,N) = M * N^{-1}
\end{aligned}
$$

dönüşümü düzgündür.

İspat. $M = (m_1, m_2, m_3), N = (n_1, n_2, n_3) \in Sol_3$ için

$$
\begin{aligned}
h(M,N) = M * N^{-1} &= (m_1,m_2,m_3) * (n_1,n_2,n_3)^{-1}, \\
&= (m_1,m_2,m_3) * (-n_1e^{n_3}, -n_2e^{-n_3}, -n_3), \\
&= (m_1 + e^{-m_3}(-n_1e^{n_3}), m_2 + e^{m_3}(-n_2e^{-n_3}), m_3 - n_3), \\
&= (m_1 - e^{n_3-m_3}n_1, m_2 - e^{m_3-n_3}n_2, m_3 - n_3) \in Sol_3,
\end{aligned}
$$

dır. Bulunan bu fonksiyon polinom ve üstel fonksiyonlardan oluştuğu için h işlemi düzgündür. ■ Teorem (2.4) ve (2.5) den dolayı Sol_3 bir Lie grubudur.

Teorem 2.6 $V_1 = e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}$, $V_2 = e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}$, $V_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \in \chi(Sol_3)$ vektör alanları, Sol_3 Lie grup işlemine göre sol invaryantdır [2].

İspat. Tanım 1.38 den $M, N \in Sol_3$ için sol öteleme

$$\begin{aligned} L_M : Sol_3 &\rightarrow Sol_3 \\ N &\rightarrow L_M(N) = (m_1 + e^{-m_3}n_1, m_2 + e^{m_3}n_2, m_3 + n_3) \end{aligned}$$

şeklindedir. X, sol invaryant vektör alanı olsun. $x_i, i.$ koordinat fonksiyonu ve X_e de X vektör alanın $e = (0,0,0)$ birim noktasındaki değeri olmak üzere,

$$(dL_M)_e(X_e) = X_M = \sum_{i=1}^{3} X_M^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_M$$

dır. Burada X_M^i bileşenleri,

$$X_M^i = (dL_M)_e(X_e)[x_i] = X_e[x_i \circ L_M] \quad 1 \leq i \leq 3$$

olur.

$$(x_1 \circ L_M)(N) = x_1(L_M(N)) = x_1[M * N] = m_1 + e^{-m_3}n_1 = x_1(M) + e^{-x_3(M)}x_1(N),$$
$$(x_1 \circ L_M)(N) = x_1(M) + e^{-x_3(M)}x_1(N) \Rightarrow x_1 \circ L_M = x_1(M) + e^{-x_3(M)}x_1,$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$(x_2 \circ L_M)(N) = x_2(L_M(N)) = x_2[M * N] = m_2 + e^{m_3}n_2 = x_2(M) + e^{x_3(M)}x_2(N),$$
$$(x_2 \circ L_M)(N) = x_2(M) + e^{x_3(M)}x_2(N) \Rightarrow x_2 \circ L_M = x_2(M) + e^{x_3(M)}x_2,$$

ve

$$(x_3 \circ L_M)(N) = x_3(L_M(N)) = x_3[M * N] = m_3 + n_3 = x_3(M) + x_3(N),$$
$$(x_3 \circ L_M)(N) = x_3(M) + x_3(N) \Rightarrow x_3 \circ L_M = x_3(M) + x_3,$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} X_M^1 &= X_e[x_1 \circ L_M] = X_e[x_1(M) + e^{-x_3(M)}x_1] = X_e[e^{-x_3(M)}x_1] = e^{-x_3(M)}X_e^1, \\ X_M^2 &= X_e[x_2 \circ L_M] = X_e[x_2(M) + e^{x_3(M)}x_2] = X_e[e^{x_3(M)}x_2] = e^{x_3(M)}X_e^2, \\ X_M^3 &= X_e[x_3 \circ L_M] = X_e[x_3(M) + x_3] = X_e[x_3] = X_e^3, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$X_e^1 = \xi_1, \quad X_e^2 = \xi_2, \quad X_e^3 = \xi_3$$

olarak alınırsa,

$$X_e = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_e + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_e + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_e$$

ve

$$X_M = X_M^1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_M + X_M^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_M + X_M^3 \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_M$$

dir. Dolayısıyla;

$$X_M^1 = e^{-x_3(M)}\xi_1, \quad X_M^2 = e^{x_3(M)}\xi_2, \quad X_M^3 = \xi_3,$$

olarak bulunur. Buradan da,

$$X = e^{-x_3}\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e^{x_3}\xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

elde edilir. Ayrıca

$$V_1 = e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad V_2 = e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad V_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{2.6}$$

olduğundan

$$X = \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2 + \xi_3 V_3$$

formunda yazabiliriz. O halde X sol invaryant vektör alanıdır. Böylece V_1, V_2, V_3 sol invaryant vektör alanıdır. ■

Teorem 2.7

$$\{V_1 = e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}, V_2 = e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}, V_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}\}$$

cümlesi, $\chi(Sol_3)$ uzayının $\tilde{g}$ metriğine göre ortonormal bir bazıdır.

İspat. $\{V_1, V_2, V_3\}$ cümlesi lineer bağımsızdır:
$\forall c_i \in \mathbb{R}$ için,

$$\sum_{i=1}^{3} c_i V_i = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 = 0\\
&\Rightarrow c_1(e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}) + c_2(e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}) + c_3(\frac{\partial}{\partial x_3}) = 0\\
&\Rightarrow (c_1e^{-x_3}, c_2e^{x_3}, c_3) = (0,0,0)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$c_1e^{-x_3} = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

$$c_2e^{x_3} = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

$$c_3 = 0$$

bulunur. O halde $\{V_1, V_2, V_3\}$ cümlesi lineer bağımsızdır.
$U, V \in \chi(Sol_3)$ için, $\{V_1, V_2, V_3\}$ ortonormal bir bazdır:

$$\tilde{g}(U,V) = e^{2x_3}u_1v_1 + e^{-2x_3}u_2v_2 + u_3v_3$$

ise,

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(V_1, V_1) &= e^{2x_3}.e^{-x_3}.e^{-x_3} + e^{-2x_3}.0 + 0 \\
&= 1, \\
\tilde{g}(V_1, V_2) &= e^{2x_3}.e^{-x_3}.0 + e^{-2x_3}.0.e^{x_3} + 0. \\
&= 0, \\
\tilde{g}(V_1, V_3) &= e^{2x_3}.e^{-x_3}.0 + e^{-2x_3}.0 + 0.1 \\
&= 0, \\
\tilde{g}(V_2, V_1) &= e^{2x_3}.0.e^{-x_3} + e^{-2x_3}.e^{x_3}.0 + 0 \\
&= 0, \\
\tilde{g}(V_2, V_2) &= e^{2x_3}.0 + e^{-2x_3}.e^{x_3}.e^{x_3} + 0 \\
&= 1, \\
\tilde{g}(V_2, V_3) &= e^{2x_3}.0 + e^{-2x_3}.e^{x_3}.0 + 0.1 \\
&= 0, \\
\tilde{g}(V_3, V_1) &= e^{2x_3}.0.e^{-x_3} + e^{-2x_3}.0 + 1.0 \\
&= 0, \\
\tilde{g}(V_3, V_2) &= e^{2x_3}.0 + e^{-2x_3}.0.e^{x_3} + 1.0 \\
&= 0, \\
\tilde{g}(V_3, V_3) &= e^{2x_3}.0 + e^{-2x_3}.0 + 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

dır. Dolayısıyla $\{V_1, V_2, V_3\}$ ortonormal bir bazdır. ■

Teorem 2.8 Sol_3 uzayında $\tilde{g}$ metriğine göre

$$\psi = \{V_1 = e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad V_2 = e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad V_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}\}$$

ortonormal bazının dual bazı;

$$\{W_1 = e^{x_3}dx_1, \quad W_2 = e^{-x_3}dx_2, \quad W_3 = dx_3\}$$

dir.

İspat. $f_1, f_2, f_3 \in \mathfrak{F}(Sol_3)$ için

$$W_1 = f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3$$

olsun. Tanım(1.28) dan

$$W_i(V_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i, j \leq 3$$

dir. Böylece,

$$W_1(V_j) = \delta_{1j} \Rightarrow \begin{cases} W_1(V_1) = 1 \\ W_1(V_2) = 0 \\ W_1(V_3) = 0 \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} W_1(V_1) &= (f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3)(e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}), \\ &= f_1e^{-x_3}dx_1(\frac{\partial}{\partial x_1}) + f_2e^{-x_3}dx_2(\frac{\partial}{\partial x_1}) + f_3e^{-x_3}dx_3(\frac{\partial}{\partial x_1}), \\ &= f_1e^{-x_3} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$W_1(V_1) = 1 \Rightarrow f_1e^{-x_3} = 1 \Rightarrow f_1 = e^{x_3}$$

dir.

$$\begin{aligned} W_1(V_2) &= (f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3)(e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}), \\ &= f_1e^{x_3}dx_1(\frac{\partial}{\partial x_2}) + f_2e^{x_3}dx_2(\frac{\partial}{\partial x_2}) + f_3e^{x_3}dx_3(\frac{\partial}{\partial x_2}), \\ &= f_2e^{x_3}. \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$W_1(V_2) = 0 \Rightarrow f_2e^{x_3} = 0 \Rightarrow f_2 = 0$$

olarak elde edilir. Son olarak da,

$$\begin{aligned} W_1(V_3) &= (f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3)(\frac{\partial}{\partial x_3}), \\ &= f_1dx_1(\frac{\partial}{\partial x_3}) + f_2dx_2(\frac{\partial}{\partial x_3}) + f_3dx_3(\frac{\partial}{\partial x_3}), \\ &= f_3 \end{aligned}$$

$$W_1(V_3) = 0 \Rightarrow f_3 = 0$$

dır. O halde

$$W_1 = f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3 = e^{x_3}dx_1$$

olarak elde edilir.

$$W_2 = g_1dx_1 + g_2dx_2 + g_3dx_3$$

$$W_2(V_j) = \delta_{2j} \Rightarrow \begin{cases} W_2(V_1) = 0 \\ W_2(V_2) = 1 \\ W_2(V_3) = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
W_2(V_1)=0 &\Rightarrow (g_1dx_1+g_2dx_2+g_3dx_3)(e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_1})=0\\
&\Rightarrow g_1e^{-x_3}dx_1(\frac{\partial}{\partial x_1})+g_2e^{-x_3}dx_2(\frac{\partial}{\partial x_1})+g_3e^{-x_3}dx_3(\frac{\partial}{\partial x_1})=0\\
&\Rightarrow g_1e^{-x_3}=0\\
&\Rightarrow g_1=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_2(V_2)=1 &\Rightarrow (g_1dx_1+g_2dx_2+g_3dx_3)(e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2})=1\\
&\Rightarrow g_1e^{x_3}dx_1(\frac{\partial}{\partial x_2})+g_2e^{x_3}dx_2(\frac{\partial}{\partial x_2})+g_3e^{x_3}dx_3(\frac{\partial}{\partial x_2})=1\\
&\Rightarrow g_2e^{x_3}=1\\
&\Rightarrow g_2=e^{-x_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_2(V_3)=0 &\Rightarrow (g_1dx_1+g_2dx_2+g_3dx_3)(\frac{\partial}{\partial x_3})=0\\
&\Rightarrow g_1dx_1(\frac{\partial}{\partial x_3})+g_2dx_2(\frac{\partial}{\partial x_3})+g_3dx_3(\frac{\partial}{\partial x_3})=0\\
&\Rightarrow g_3=0
\end{aligned}
$$

dır. O halde

$$W_2=g_1dx_1+g_2dx_2+g_3dx_3=e^{-x_3}dx_2$$

olarak elde edilir.

$$W_3=h_1dx_1+h_2dx_2+h_3dx_3$$

$$W_3(V_j)=\delta_{3j}\Rightarrow\begin{cases}W_3(V_1)=0\\W_3(V_2)=0\\W_3(V_3)=1\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
W_3(V_1)=0 &\Rightarrow (h_1dx_1+h_2dx_2+h_3dx_3)(e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_1})=0\\
&\Rightarrow h_1e^{-x_3}dx_1(\frac{\partial}{\partial x_1})+h_2e^{-x_3}dx_2(\frac{\partial}{\partial x_1})+h_3e^{-x_3}dx_3(\frac{\partial}{\partial x_1})=0\\
&\Rightarrow h_1e^{-x_3}=0\\
&\Rightarrow h_1=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_3(V_2) = 0 &\Rightarrow (h_1 dx_1 + h_2 dx_2 + h_3 dx_3)(e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}) = 0 \\
&\Rightarrow h_1 e^{x_3} dx_1(\frac{\partial}{\partial x_2}) + h_2 e^{x_3} dx_2(\frac{\partial}{\partial x_2}) + h_3 e^{x_3} dx_3(\frac{\partial}{\partial x_2}) = 0 \\
&\Rightarrow h_2 e^{x_3} = 0 \\
&\Rightarrow h_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_3(V_3) = 1 &\Rightarrow (h_1 dx_1 + h_2 dx_2 + h_3 dx_3)(\frac{\partial}{\partial x_3}) = 1 \\
&\Rightarrow h_1 dx_1(\frac{\partial}{\partial x_3}) + h_2 dx_2(\frac{\partial}{\partial x_3}) + h_3 dx_3(\frac{\partial}{\partial x_3}) = 1 \\
&\Rightarrow h_3 = 1
\end{aligned}
$$

dır. Ohalde

$$W_3 = h_1 dx_1 + h_2 dx_2 + h_3 dx_3 = dx_3$$

olarak elde edilir. ■

Teorem 2.9 x_1, x_2, x_3 Sol_3 ün koordinat fonksiyonları olmak üzere

$$\tilde{g} = (e^{x_3} dx_1)^2 + (e^{-x_3} dx_2)^2 + (dx_3)^2$$

olup, $\tilde{g}$ metriğine karşılık gelen $[\tilde{g}_{ij}]$ matrisi

$$[\tilde{g}_{ij}] = \begin{bmatrix} e^{2x_3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir ve $[\tilde{g}_{ij}]$ matrisinin tersi olan $\left[\tilde{g}^{l,k}\right]$ matrisi ise

$$\left[\tilde{g}^{l,k}\right] = \begin{bmatrix} e^{-2x_3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. Tanım 1.33 e göre $\forall\ U = (u_1, u_2, u_3), \quad V = (v_1, v_2, v_3) \in \chi(Sol_3)$ için bu vektör alanları metriğe uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
(e^{x_3} dx_1)^2(U, V) &= (e^{x_3} dx_1) \otimes (e^{x_3} dx_1)(U, V) \\
&= (e^{x_3} dx_1)(U)(e^{x_3} dx_1)(V), \\
&= e^{x_3} u_1 e^{x_3} v_1, \\
&= e^{2x_3} u_1 v_1
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}(e^{-x_3}dx_2)^2(U,V) &= (e^{-x_3}dx_2)\otimes(e^{-x_3}dx_2)(U,V)\\ &= (e^{-x_3}dx_2)(U)(e^{-x_3}dx_2)(V),\\ &= e^{-x_3}u_2e^{-x_3}v_2,\\ &= e^{-2x_3}u_2v_2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(dx_3)^2(U,V) &= (dx_3)\otimes(dx_3)(U,V)\\ &= (dx_3)(U)(dx_3)(V)\\ &= u_3v_3\end{aligned}$$

değerleri elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(U,V) &= \{(e^{2x_3}dx_1)^2+(e^{-2x_3}dx_2)^2+(dx_3)^2\}\\ &= e^{2x_3}u_1v_1+e^{-2x_3}u_2v_2+u_3v_3\end{aligned}$$

olur. Bu metriğe karşılık gelen matris $[\tilde{g}_{ij}]$ ise

$$[\tilde{g}_{ij}] = \begin{bmatrix} e^{2x_3} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2x_3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2.7}$$

olup,

$$\det[\tilde{g}_{ij}] = 1 \neq 0$$

bulunur.

$$\left[\tilde{g}^{l,k}\right] = \begin{bmatrix} e^{-2x_3} & 0 & 0\\ 0 & e^{2x_3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

olup burada $\left[\tilde{g}^{l,k}\right]$, $[\tilde{g}_{ij}]$ matrisinin tersidir. ∎

2.3 Sol_3 Uzayında Geodezikler

Bu bölümde Sol_3 uzayının geodezikleri verilecektir.

Teorem 2.10

$$\tilde{g} = e^{2x_3}dx_1^2 + e^{-2x_3}dx_2^2 + dx_3^2$$

metriğinin Sol_3 uzayında Riemann konneksiyonunun kovaryant türevlerine ait matrisi;

$$\tilde{\nabla} = \begin{pmatrix} \tilde{\nabla}_{V_1}V_1 & \tilde{\nabla}_{V_1}V_2 & \tilde{\nabla}_{V_1}V_3 \\ \tilde{\nabla}_{V_2}V_1 & \tilde{\nabla}_{V_2}V_2 & \tilde{\nabla}_{V_2}V_3 \\ \tilde{\nabla}_{V_3}V_1 & \tilde{\nabla}_{V_3}V_2 & \tilde{\nabla}_{V_3}V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_3 & 0 & V_1 \\ 0 & V_3 & -V_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

şeklindedir. Burada $V_1,\ V_2$ ve V_3 vektör alanları

$$V_1 = e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad V_2 = e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad V_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{2.10}$$

dır. [2].

İspat. V_1, V_2, V_3 vektör alanları için bracket operatörü,

$$[V_1, V_2] = 0, \quad [V_1, V_3] = V_1, \ [V_2, V_3] = -V_2$$

şeklindedir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [V_1, V_2] &= \nabla_{V_1}V_2 - \nabla_{V_2}V_1, \\ &= (0,0,0) - (0,0,0), \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [V_2, V_3] &= \nabla_{V_2}V_3 - \nabla_{V_3}V_2, \\ &= (0,0,0) - (0, e^{x_3}, 0), \\ &= (0, -e^{x_3}, 0). \\ &= -V_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [V_1, V_3] &= \nabla_{V_1}V_3 - \nabla_{V_3}V_1, \\ &= (0,0,0) - (-e^{-x_3}, 0, 0), \\ &= (e^{-x_3}, 0, 0). \\ &= V_1 \end{aligned}$$

dir.
Bulunan bu bracket operatörleri ile Tanım(1.32) deki Koszul formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\nabla}_{V_1} V_1, V_3\rangle &= \frac{1}{2}\left\{\langle [V_1, V_1], V_3\rangle - \langle [V_1, V_3], V_1\rangle + \langle [V_3, V_1], V_1\rangle\right\},\\ &= \frac{1}{2}\left\{\langle 0, V_3\rangle - \langle V_1, V_1\rangle - \langle V_1, V_1\rangle\right\},\\ &= -1,\end{aligned}$$

bulunur.(2.6) den $V_3 \neq 0$ olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\nabla}_{V_1} V_1, V_3\rangle = -1 &\Rightarrow -\tilde{\nabla}_{V_1} V_1 = V_3\\ &\Rightarrow \tilde{\nabla}_{V_1} V_1 = -V_3\end{aligned}$$

dır. Benzer hesaplamalarla,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\nabla}_{V_1} V_2, V_3\rangle &= \frac{1}{2}\left\{\langle [V_1, V_2], V_3\rangle - \langle [V_2, V_3], V_1\rangle + \langle [V_3, V_1], V_2\rangle\right\},\\ &= \frac{1}{2}\left\{\langle 0, V_3\rangle + \langle V_2, V_1\rangle - \langle V_1, V_2\rangle\right\},\\ &= 0,\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\langle \tilde{\nabla}_{V_1} V_2, V_3\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{\nabla}_{V_1} V_2 = 0$$

dir. Diğer kovaryant türevler de benzer hesaplamalar sonucu,

$$\begin{aligned}&\tilde{\nabla}_{V_1} V_1 = -V_3\ ,\ \tilde{\nabla}_{V_1} V_2 = 0\ ,\ \tilde{\nabla}_{V_1} V_3 = V_1,\\ &\tilde{\nabla}_{V_1} V_1 = 0\ \ ,\tilde{\nabla}_{V_1} V_2 = V_3\ ,\ \tilde{\nabla}_{V_1} V_3 = -V_2,\\ &\tilde{\nabla}_{V_3} V_1 = 0\ ,\tilde{\nabla}_{V_3} V_2 = 0,\ \tilde{\nabla}_{V_3} V_3 = 0,\end{aligned}$$

olarak elde edilir. ■

Teorem 2.11 $\{x_1, x_2, x_3\}$, Sol_3 de koordinat sistemi olmak üzere, Sol_3 uzayının geodezik denklemleri,

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + 2\frac{dx_1(t)}{dt}\frac{dx_3(t)}{dt} &= 0,\\ \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} - 2\frac{dx_2(t)}{dt}\frac{dx_3(t)}{dt} &= 0,\\ \frac{d^2x_3(t)}{dt^2} - e^{2x_3(t)}\frac{dx_1(t)}{dt}\frac{dx_1(t)}{dt} + e^{-2x_3(t)}\frac{dx_2(t)}{dt}\frac{dx_2(t)}{dt} &= 0\end{aligned}$$

dir[11].

İspat. (2.7) ve (2.8) de verilen $[\tilde{g}_{ij}]$ ve $\left[\tilde{g}^{l,k}\right]$ matrisleri Christoffel sembollerinde kullanılırsa,

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right) g^{lk}$$

$i = 1, j = 3, k = 1$ için

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^{1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x_1}\right) g^{11} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x_2}\right) g^{21} \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x_3}\right) g^{31} \\
&= \frac{1}{2} 2e^{2x_3}e^{-2x_3} \\
&= 1 \\
&= \Gamma_{31}^{1}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$\Gamma_{23}^{2} = \Gamma_{32}^{2} = -1,$$

$$\Gamma_{11}^{3} = -e^{2x_3},$$

$$\Gamma_{22}^{3} = e^{2x_3}$$

olarak hesaplanır.

Böylece bu bulduklarımızı aşağıdaki geodezik denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{d^2(x_k)}{dt^2} + \Gamma_{ij}^{k}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + \Gamma_{13}^{1}\frac{dx_1(t)}{dt}\frac{dx_3(t)}{dt} + \Gamma_{31}^{1}\frac{dx_3(t)}{dt}\frac{dx_1(t)}{dt} &= 0, \\
\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} + \Gamma_{23}^{2}\frac{dx_2(t)}{dt}\frac{dx_3(t)}{dt} + \Gamma_{32}^{2}\frac{dx_3(t)}{dt}\frac{dx_2(t)}{dt} &= 0, \\
\frac{d^2x_3(t)}{dt^2} + \Gamma_{11}^{3}\frac{dx_1(t)}{dt}\frac{dx_1(t)}{dt} + \Gamma_{22}^{3}\frac{dx_2(t)}{dt}\frac{dx_2(t)}{dt} &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bunları düzenlersek,

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + 2\frac{dx_1(t)}{dt}\frac{dx_3(t)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} - 2\frac{dx_2(t)}{dt}\frac{dx_3(t)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2x_3(t)}{dt^2} - e^{2x_3(t)}\frac{dx_1(t)}{dt}\frac{dx_1(t)}{dt} + e^{-2x_3(t)}\frac{dx_2(t)}{dt}\frac{dx_2(t)}{dt} = 0$$

olur. Burada gösterim kolaylığından yukarıdaki ifadeler

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1\dot{x}_3 &= 0, \qquad (2.11)\\
\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_2\dot{x}_3 &= 0,\\
\ddot{x}_3 + e_3^{2x}(\dot{x}_1)^2 + e^{-2x_3}(\dot{x}_2)^2 &= 0,
\end{aligned}
$$

biçiminde gösterilebilir. ■

Şimdi bu diferensiyel denklem sistemi bir Cauchy problemi olarak çözülürse.

$$
\begin{aligned}
x_1(0) &= 0, \qquad (2.12)\\
x_2(0) &= 0,\\
x_3(0) &= 0,
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(0) &= u, \qquad (2.13)\\
\dot{x}_2(0) &= v,\\
\dot{x}_3(0) &= w.
\end{aligned}
$$

$u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$ ve $t = 0$ ın bir komşuluğunda $\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1\dot{x}_3 = 0 \Rightarrow \frac{\ddot{x}_1}{\dot{x}_1} = -2\dot{x}_3$ ve $\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_2\dot{x}_3 = 0 \Rightarrow \frac{\ddot{x}_2}{\dot{x}_2} = 2\dot{x}_3$ olur.
$\dot{x}_1 = p$ olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{p}}{p} = -2\dot{x}_3 &\Rightarrow \ln p = -2x_3 + c_1\\
&\Rightarrow \dot{x}_1 = e^{-2x_3+c_1}\\
&\Rightarrow \dot{x}_1(0) = e^{-2x_3(0)+c_1}\\
&\Rightarrow \dot{x}_1(0) = e^{c_1} = u\\
&\Rightarrow \dot{x}_1 = e^{-2x_3}e^{c_1}\\
&\Rightarrow \dot{x}_1 = ue^{-2x_3}
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde $\dot{x}_2 = ve^{2x_3}$ olarak bulunur. Bulunan bu $\dot{x}_1$ ve $\dot{x}_2$ ifadelerinin integralleri alınırsa,

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= u\int_0^t e^{-2x_3(\tau)}d\tau,\\
x_2(t) &= v\int_0^t e^{2x_3(\tau)}d\tau.
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bulunan $\dot{x}_1$ ve $\dot{x}_2$ leri (2.11) de yerlerine yazılırsa

$$
\ddot{x}_3 - e^{2x_3}(ue^{-2x_3})^2 + e^{-2x_3}(ve^{2x_3})^2 = 0,
$$

$$\ddot{x}_3 - u^2 e^{-2x_3} + v^2 e^{2x_3} = 0, \tag{2.14}$$

olur. Şimdide (2.14) denkleminin her iki tarafı $2\dot{x}_3(\neq 0)$ ile çarpılıp daha sonra integral alınırsa,

$$2\dot{x}_3\ddot{x}_3 - u^2 2\dot{x}_3 e^{-2x_3} + v^2 2\dot{x}_3 e^{2x_3} = 0,$$

$$\dot{x}_3^2 = -u^2 e^{-2x_3} - v^2 e^{2x_3} + c^2, \tag{2.15}$$

elde edilir. Başlangıç şartları kullanılırsa,

$$w^2 = -u^2 - v^2 + c^2$$

olur. Genelliği bozmaksızın $c^2 = 1$ alınabilir. (2.15) ifadesinin her iki tarafının karekökü alınıp daha sonra t ye göre integrali alınırsa,

$$\frac{dx_3}{\mp\sqrt{1 - u^2 e^{-2x_3} - v^2 e^{2x_3}}} = dt$$

sınırlı sayıdaki basit fonksiyonların terimleri, eliptik integral ile çözümleri ifade edilmeyebilir. w nun işaretine bağlı olarak karekök ifadesi sırasıyla $+$ yada $-$ alınabilir.

Eğer $u \neq 0, v \neq 0$ ve $w = 0$ ise (2.15) ve $u^2 + v^2 = 1$ den tüm u, v ler için $\dot{x}_3^2 = -u^2 e^{-2x_3} - v^2 e^{2x_3} + 1$ sağlanacağından özel olarak $u = v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ seçilirse

$$\begin{aligned} \dot{x}_3^2 &= -\left(\frac{e^{-2x_3} + e^{2x_3}}{2}\right) + 1, \\ &= -\cosh(2x_3) + 1 \end{aligned}$$

dir. Böylece $x_3 = \dot{x}_3 = 0$ bulunur. Ohalde

$$\begin{aligned} x_1(t) &= ut, \\ x_2(t) &= vt, \\ x_3(t) &= 0, \end{aligned}$$

olur.

Eğer $u \neq 0, v = 0$ $(u^2 = 1 - w^2)$ için, $\dot{x}_2(t)$ yi $c(t)e^{2x_3(t)}$ formatında yazılabileceği görülebilir. (2.11) in ikinci denkleminden

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= e^{2x_3 + c_1}, \\ &= c(t)e^{2x_3}, \end{aligned}$$

yazılabilir. $v = 0$ ve $\dot{x}_1 = ue^{-2x_3}$ den

$$\ddot{x}_3 - u^2 e^{-2x_3} = 0$$

elde edilir. Bu standart yolla çözülürse, geodeziğin bir parametrik sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u\frac{\sinh t}{\cosh t + w \sinh t}, \\ x_2(t) &= 0, \\ x_3(t) &= \ln(\cosh t + w \sinh t). \end{aligned}$$

Benzer şekilde, eğer $u = 0$ ve $v \neq o$ $(1 = v^2 + w^2)$ alınırsa

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0, \\ x_2(t) &= v\frac{\sinh t}{\cosh t - w \sinh t}, \\ x_3(t) &= -\ln(\cosh t - w \sinh t), \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak $u = 0$, $v = 0$ ve $w = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(t)e^{-2x_3(t)}, \\ \dot{x}_2 &= b(t)e^{2x_3(t)}, \end{aligned}$$

ifadelerinin çözümü için (2.11) in birinci ve ikinci denklemlerinde $a(t) = 0 = b(t)$ alınırsa $x_1(t) = x_2(t) = 0$ olur. Daha sonra (2.11) in üçüncü denkleminden kolaylıkla görülebilirki $\ddot{x}_3 = 0$, böylece $x_3(t) = t$ dir. O halde geodeziklerin denklem sistemi

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0, \\ x_2(t) &= 0, \\ x_3(t) &= t, \end{aligned}$$

olur [11].

3 Sol_3 UZAYINDA EĞRİLER

Bu bölümde $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to Sol_3$ yay parametreli eğrisi için helis olma karakterizasyonu verildi.

Tanım 3.1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to Sol_3$ yay parametreli, diferensiyellenebilir ve düzlemsel olmayan bir eğri olsun. $\{T, N, B\}$ ise Sol_3 te γ boyunca ortonormal çatı alanı olsun. T birim teğet, N birim aslinormal, B birim binormal vektör alanı olmak üzere,

$$T = \gamma' \quad , \quad N = \frac{\tilde{\nabla}_T T}{|\tilde{\nabla}_T T|} \quad , \quad B = T \times N$$

dir. Burada T, N, B vektörlerine γ eğrisinin Frenet vektörleri, $\{T,\ N,\ B\}$ kümesine de Frenet çatısı denir. Buna göre, $\kappa = |\tilde{\nabla}_T T| \neq 0$, γ nın geodezik eğriliği ve τ da onun geodezik torsiyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_T T &= && \kappa N && \\ \tilde{\nabla}_T N &= -\kappa T && && +\tau B \\ \tilde{\nabla}_T B &= && -\tau N && \end{aligned} \tag{3.1}$$

Frenet denklemlerini elde ederiz. Burada $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı $\chi_L(Sol_3)$ nin $\{X = V_1, Y = V_2, Z = V_3\}$ bazı cinsinden

$$\begin{aligned} T &= T_1 X + T_2 Y + T_3 Z, \\ N &= N_1 X + N_2 Y + N_3 Z, \\ B &= B_1 X + B_2 Y + B_3 Z, \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir .

Ayrıca T, N, B vektör alanlarına ait $\tilde{\nabla}_T T, \tilde{\nabla}_T N, \tilde{\nabla}_T B$ kovaryant türevlerini (2.9) denklemini kullanarak aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_T T &= \tilde{\nabla}_{T_1X+T_2Y+T_3Z}(T_1X+T_2Y+T_3Z),\\
&= T_1(\tilde{\nabla}_X(T_1X+T_2Y+T_3Z)) + T_2(\tilde{\nabla}_Y(T_1X+T_2Y+T_3Z))\\
&+ T_3(\tilde{\nabla}_Z(T_1X+T_2Y+T_3Z)),\\
&= T_1((\tilde{\nabla}_X T_1)X + T_1(\tilde{\nabla}_X X) + (\tilde{\nabla}_X T_2)Y + T_2(\tilde{\nabla}_X Y) + (\tilde{\nabla}_X T_3)Z + T_3(\tilde{\nabla}_X Z))\\
&+ T_2((\tilde{\nabla}_Y T_1)X + T_1(\tilde{\nabla}_Y X) + (\tilde{\nabla}_Y T_2)Y + T_2(\tilde{\nabla}_Y Y) + (\tilde{\nabla}_Y T_3)Z + T_3(\tilde{\nabla}_Y Z))\\
&+ T_3((\tilde{\nabla}_Z T_1)X + T_1(\tilde{\nabla}_Z X) + (\tilde{\nabla}_Z T_2)Y + T_2(\tilde{\nabla}_Z Y) + (\tilde{\nabla}_Z T_3)Z + T_3(\tilde{\nabla}_Z Z)),\\
&= (T_1(\tilde{\nabla}_X T_1) + T_2(\tilde{\nabla}_Y T_1) + T_3(\tilde{\nabla}_Z T_1))X + (T_1(\tilde{\nabla}_X T_2) + T_2(\tilde{\nabla}_Y T_2) + T_3(\tilde{\nabla}_Z T_2))Y\\
&+ (T_1(\tilde{\nabla}_X T_3) + T_2(\tilde{\nabla}_Y T_3) + T_3(\tilde{\nabla}_Z T_3))Z - T_1^2 Z + T_1T_3X + T_2^2 Z - T_2T_3Y,\\
&= T_1^{'}X + T_2^{'}Y + T_3^{'}Z + T_1T_3X - T_2T_3Y + (-T_1^2 + T_2^2)Z,\\
&= (T_1^{'} + T_1T_3)X + (T_2^{'} - T_2T_3)Y + (T_3^{'} - T_1^2 + T_2^2)Z \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_T N &= \tilde{\nabla}_{T_1X+T_2Y+T_3Z}(N_1X+N_2Y+N_3Z),\\
&= T_1(\tilde{\nabla}_X(N_1X+N_2Y+N_3Z)) + T_2(\tilde{\nabla}_Y(N_1X+N_2Y+N_3Z))\\
&+ T_3(\tilde{\nabla}_Z(N_1X+N_2Y+N_3Z)),\\
&= T_1((\tilde{\nabla}_X N_1)X + N_1(\tilde{\nabla}_X X) + (\tilde{\nabla}_X N_2)Y + N_2(\tilde{\nabla}_X Y) + (\tilde{\nabla}_X N_3)Z + N_3(\tilde{\nabla}_X Z))\\
&+ T_2((\tilde{\nabla}_Y N_1)X + N_1(\tilde{\nabla}_Y X) + (\tilde{\nabla}_Y N_2)Y + N_2(\tilde{\nabla}_Y Y) + (\tilde{\nabla}_Y N_3)Z + N_3(\tilde{\nabla}_Y Z))\\
&+ T_3((\tilde{\nabla}_Z N_1)X + N_1(\tilde{\nabla}_Z X) + (\tilde{\nabla}_Z N_2)Y + N_2(\tilde{\nabla}_Z Y) + (\tilde{\nabla}_Z N_3)Z + N_3(\tilde{\nabla}_Z Z)),\\
&= (T_1(\tilde{\nabla}_X N_1) + T_2(\tilde{\nabla}_Y N_1) + T_3(\tilde{\nabla}_Z N_1))X + (T_1(\tilde{\nabla}_X N_2) + T_2(\tilde{\nabla}_Y N_2) + T_3(\tilde{\nabla}_Z N_2))Y\\
&+ (T_1(\tilde{\nabla}_X N_3) + T_2(\tilde{\nabla}_Y N_3) + T_3(\tilde{\nabla}_Z N_3))Z - T_1N_1Z + T_1N_3X + T_2N_2Z - T_2N_3Y,\\
&= N_1^{'}X + N_2^{'}Y + N_3^{'}Z - T_1N_1Z + T_1N_3X - T_2N_3Y + T_2N_2Z,\\
&= (N_1^{'} + T_1N_3)X + (N_2^{'} - T_2N_3)Y + (N_3^{'} - T_1N_1 + T_2N_2)Z \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_T B &= \tilde{\nabla}_{T_1X+T_2Y+T_3Z}(B_1X + B_2Y + B_3Z),\\
&= T_1(\tilde{\nabla}_X(B_1X + B_2Y + B_3Z)) + T_2(\tilde{\nabla}_Y(B_1X + B_2Y + B_3Z))\\
&+ T_3(\tilde{\nabla}_Z(B_1X + B_2Y + B_3Z)),\\
&= T_1((\tilde{\nabla}_X B_1)X + B_1(\tilde{\nabla}_X X) + (\tilde{\nabla}_X B_2)Y + B_2(\tilde{\nabla}_X Y) + (\tilde{\nabla}_X B_3)Z + B_3(\tilde{\nabla}_X Z))\\
&+ T_2((\tilde{\nabla}_Y B_1)X + B_1(\tilde{\nabla}_Y X) + (\tilde{\nabla}_Y B_2)Y + B_2(\tilde{\nabla}_Y Y) + (\tilde{\nabla}_Y B_3)Z + B_3(\tilde{\nabla}_Y Z))\\
&+ T_3((\tilde{\nabla}_Z B_1)X + B_1(\tilde{\nabla}_Z X) + (\tilde{\nabla}_Z B_2)Y + B_2(\tilde{\nabla}_Z Y) + (\tilde{\nabla}_Z B_3)Z + B_3(\tilde{\nabla}_Z Z)),\\
&= (T_1(\tilde{\nabla}_X B_1) + T_2(\tilde{\nabla}_Y B_1) + T_3(\tilde{\nabla}_Z B_1))X + (T_1(\tilde{\nabla}_X B_2) + T_2(\tilde{\nabla}_Y B_2) + T_3(\tilde{\nabla}_Z B_2))Y\\
&+ (T_1(\tilde{\nabla}_X B_3) + T_2(\tilde{\nabla}_Y B_3) + T_3(\tilde{\nabla}_Z B_3))Z - T_1B_1Z + T_1B_3X + T_2B_2Z - T_2B_3Y,\\
&= B_1'X + B_2'Y + B_3'Z - T_1B_1Z + T_1B_3X - T_2B_3Y + T_2B_2Z,\\
&= (B_1' + T_1B_3)X + (B_2' - T_2B_3)Y + (B_3' - T_1B_1 + T_2B_2)Z \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.2 $\gamma : I \to Sol_3$, birim hızlı geodezik olmayan bir eğri olsun. Eğer T, $V = T_1X + T_2Y - T_3Z$ vektör alanı ile sabit açı yapıyorsa, γ eğrisi bir helistir ve γ nın parametrik denklemi;

$$\begin{aligned}
\gamma(t) = (&\frac{2e^{c_1 - t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(a\sin(b+at) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos[b+at]\right)}{1+2a^2-\cos\theta} + c_2,\\
&-\frac{2e^{c_1 + t\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(a\cos(b+at) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin[b+at]\right)}{1+2a^2-\cos\theta} + c_3,\\
&\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)t + c_1)
\end{aligned}$$

dır. Burada a, b, c_1, c_2, c_3 integral sabitleridir ve θ sabit açıdır.

İspat. Sol_3 uzayında bir γ eğrisi, κ eğriliği, τ torsiyonu ve $\{T, N, B\}$ Frenet çatısıyla birlikte bir uzay eğrisi olsun. T, N, B vektör alanlarının kovaryant türevleri (3.2), (3.3) ve (3.4) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_T T &= (T_1' + T_1T_3)X + (T_2' - T_2T_3)Y + (T_2^2 - T_1^2 + T_3'),\\
\tilde{\nabla}_T N &= (N_1' + T_1N_3)X + (N_2' - T_2N_3)Y + (T_2N_2 - T_1N_1 + N_3'), \qquad (3.5)\\
\tilde{\nabla}_T B &= (B_1' + T_1B_3)X + (B_2' - T_2B_3)Y + (T_2B_2 - T_1B_1 + B_3')
\end{aligned}$$

dir.

Kabul edelim ki γ nın tanjant vektörleri, V vektörü ile sabit açı yapsın. Yani;

$$\langle V, T\rangle = \cos\theta = sbt = c^2, \qquad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \qquad (3.6)$$

olsun. Böylece

$$\begin{aligned}\langle V, T\rangle &= \langle T_1X + T_2Y - T_3Z, T_1X + T_2Y + T_3Z\rangle \\ &= T_1^2 + T_2^2 - T_3^2 = c^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

olur. $T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \cos t \cos \frac{\theta}{2}, \\ T_2(t) &= \sin t \cos \frac{\theta}{2}, \\ T_3(t) &= \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde, $\langle T, Z\rangle = \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c^2)} = \text{sbt}$ olduğundan γ, Sol_3 uzayında bir helistir. Ayrıca, genelliği bozmaksızın

$$t = as + b$$

alabiliriz. Burada a, b sabittirler. Dolayısıyla

$$T(s) = \cos(as+b)(\cos\frac{\theta}{2})\ X + \sin(as+b)(\cos\frac{\theta}{2})\ Y + (\sin\frac{\theta}{2})\ Z \tag{3.8}$$

yazılabilir. (2.10) ve (3.8) denklemlerini kullanırsak

$$T = (e^{-\gamma_3}\cos(as+b)\cos\frac{\theta}{2}, e^{\gamma_3}\sin(as+b)\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}), \tag{3.9}$$

olarak elde edilir. Yani,

$$\frac{d\gamma_3}{ds} = \sin\frac{\theta}{2},$$

dır. Bu ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$\gamma_3(s) = (\sin\frac{\theta}{2})s + c_1$$

olur. Benzer şekilde

$$\gamma_1(s) = \frac{2e^{c_1 - s\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(a\sin(b+as) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos[b+as]\right)}{1+2a^2-\cos\theta} + c_2$$

ve

$$\gamma_2(s) = -\frac{2e^{c_1 + s\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(a\cos(b+as) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin[b+as]\right)}{1+2a^2-\cos\theta} + c_3$$

olarak bulunur. Burada a, b, c_1, c_2 ve c_3 integral sabitleridir.

Frenet formüllerinden N, B, κ ve τ

$$\kappa(s) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\theta}{2})\sqrt{7 - \cos\theta + \cos(4s)(1+\cos\theta) - 8\sin(2s)\sin(\frac{\theta}{2})}, \tag{3.10}$$

$$
\begin{aligned}
N(s) = {} & \frac{1}{\kappa}(2\cos\frac{\theta}{2}(-2\sin s + 2\cos s\sin(\frac{\theta}{2}))X \\
& + 4\cos\frac{\theta}{2}(\cos s - \sin s\sin(\frac{\theta}{2}))Y \\
& + (4\cos^2\frac{\theta}{2}\cos(2s)))Z),
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
B(s) = {} & \frac{1}{\kappa}(4\cos\frac{\theta}{2}(\cos^2 s\cos\theta\sin s - \sin^3 s + \cos s\sin\frac{\theta}{2})X \\
& + 4\cos\frac{\theta}{2}(-\sin^2 s\cos\theta\cos s + \cos^3 s - \sin s\sin\frac{\theta}{2})Y \\
& + (4\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}(1 - 2\cos s\sin s\sin\frac{\theta}{2}))Z),
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau(s) = {} & \frac{1}{\kappa^2}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin(2s) \\
& (15 + \cos(4s) - 2\sin(2s)(\cos\theta\sin(2s) + 6\sin\frac{\theta}{2}))
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

şeklinde bulunur. ■

Teorem 3.3 $\beta : I \to Sol_3$, birim hızlı geodezik olmayan bir eğri ve U sabit bir vektör olsun. Eğer uzay eğrisi $D_T U$ vektör alanıyla sabit bir açı yaparsa, β nın parametrik denklemi;

$$
\begin{aligned}
\beta(t) = {} & (\int \cos^2\theta\cosh[2(at+b)]e^{-\int\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2[2(at+b)]}dt}dt + c_1, \\
& \int \cos\theta\sin\theta\cosh[2(at+b)]e^{\int\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2[2(at+b)]}dt}dt + c_2, \\
& \int\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2[2(at+b)]}dt + c_3)
\end{aligned}
$$

olur. Burada a, b, c_1, c_2, c_3 integral sabitleridir ve θ sabit açıdır.

İspat. Sol_3 uzayında β eğrisi, κ eğriliği, τ torsiyonu ve $\{T, N, B\}$ Frenet çatısıyla birlikte bir uzay eğrisi ve U bir sabit vektör olsun. T, N, B ve U vektör alanlarının kovaryant türevleri (3.2), (3.3) ve (3.4) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_T T &= (T_1' + T_1T_3)X + (T_2' - T_2T_3)Y + (T_2^2 - T_1^2 + T_3') \\
\tilde{\nabla}_T N &= (N_1' + T_1N_3)X + (N_2' - T_2N_3)Y + (T_2N_2 - T_1N_1 + N_3') \\
\tilde{\nabla}_T B &= (B_1' + T_1B_3)X + (B_2' - T_2B_3)Y + (T_2B_2 - T_1B_1 + B_3')
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

dir. Ayrıca

$$
\tilde{\nabla}_T U = T_1u_3X - T_2u_3Y + (-T_1u_1 + T_2u_2)Z \tag{3.15}
$$

dır. Burada $U = (u_1, u_2, u_3)$ ve $T = (T_1, T_2, T_3)$ dır. Eğer $U = Z$ seçilirse (3.15) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T Z = T_1 X - T_2 Y \tag{3.16}$$

elde edilir.

Böylece,

$$\langle \tilde{\nabla}_T Z, \tilde{\nabla}_T Z \rangle = \langle T_1 X - T_2 Y, T_1 X - T_2 Y \rangle = T_1^2 + T_2^2 \tag{3.17}$$

dır.

$$V = \frac{\tilde{\nabla}_T Z}{|\tilde{\nabla}_T Z|} = \frac{T_1 X - T_2 Y}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}} \tag{3.18}$$

olmak üzere β eğrisinin tanjant vektörü, V vektörü ile sabit açı yapıyor ise

$$\langle V, T \rangle = \cos\theta = sbt = c^2, \qquad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}), \tag{3.19}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \langle V, T \rangle &= \langle \frac{T_1 X - T_2 Y}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}, T_1 X + T_2 Y + T_3 Z \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}} (T_1^2 - T_2^2) = c^2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

bulunur. Eğer T tanjant vektörü hesaplanırsa

$$\left(\frac{T_1}{(T_1^2 + T_2^2)^{\frac{1}{4}}} \right)^2 - \left(\frac{T_2}{(T_1^2 + T_2^2)^{\frac{1}{4}}} \right)^2 = c^2$$

eşitliğinden

$$\frac{T_1}{(T_1^2 + T_2^2)^{\frac{1}{4}}} = c \cosh t, \quad \frac{T_2}{(T_1^2 + T_2^2)^{\frac{1}{4}}} = c \sinh t$$

alınırsa

$$T_1 = c(T_1^2 + T_2^2)^{\frac{1}{4}} \cosh t, \quad T_2 = c(T_1^2 + T_2^2)^{\frac{1}{4}} \sinh t$$

olur. Buradan

$$T_1^2 + T_2^2 = c^2 (T_1^2 + T_2^2)^{\frac{1}{2}} (\cosh^2 t + \sinh^2 t)$$

ve

$$T_1^2 + T_2^2 = c^2 (T_1^2 + T_2^2)^{\frac{1}{2}} \cosh 2t = c^4 \cosh^2 2t$$

elde edilir. $T_1^2+T_2^2+T_3^2=1$ olduğundan

$$\begin{aligned} T_1 &= c^2\cos\theta\cosh 2t, \\ T_2 &= c^2\sin\theta\cosh 2t, \\ T_3 &= \pm\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2 2t} \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \beta(t) = (&\int \cos^2\theta\cosh[2(at+b)]e^{-\int\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2[2(at+b)]}dt}dt+c_1, \\ &\int \cos\theta\sin\theta\cosh[2(at+b)]e^{\int\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2[2(at+b)]}dt}dt+c_2, \\ &\int \sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2[2(at+b)]}dt+c_3) \end{aligned}$$

olur. Frenet formüllerinden N, B, κ ve τ

$$\begin{aligned} \kappa = &(\cos^4\theta(\cosh(2t)\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2(2t)}+2\sin(2t))^2 \\ &+\cos^4\theta\cosh^2(2t)(\cos(2\theta)\cos(2t)+\frac{2\sinh(2t)}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2(2t)}})^2 \\ &+(\cos\theta\cosh(2t)\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2(2t)}\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta\sinh(2t))^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = &\frac{1}{\kappa}(\cos^2\theta(\cosh(2t)\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2(2t)}+2\sinh(2t))X \\ &+\cos\theta\sin\theta(-\cosh(2t)\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2(2t)}+2\sinh(2t))Y \\ &+\cos^2\theta\cosh^2(2t)(-\cos(2\theta)\cos(2t)-\frac{2\sinh(2t)}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2(2t)}})Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = &\frac{1}{\kappa}(\cos\theta\sin\theta(\cos(2t)-2\cos^4\theta\cosh^3(2t)-\frac{2\sinh(2t)}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2(2t)}})X \\ &+\frac{1}{2}\cos^2\theta(2\cosh(2t)-\cosh^3(2t)\sin(2\theta)+\frac{4\sinh(2t)}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2(2t)}})Y \\ &-\cos^3\theta\cosh^2(2t)\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2(2t)}\sin\theta Z) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tau = {} & \frac{1}{\kappa^2}\frac{1}{-1+\cos^2\theta\cos^2(2t)}\cos^3\theta\sin\theta(8\cosh^2(2t) \\
& - 6\cos^2\theta\cosh^4(2t)+\cos^4\theta(-3+\cos(4\theta))\cosh^6(2t) \\
& + 8\cos^8\theta\cosh^8(2t)\sin\theta \\
& + 12\cos^2\theta\cos(2\theta)\cosh^3(2t)\sqrt{1-\cos^2\theta\cosh^2(2t)}\sinh(2t) \\
& - 8\sinh^2(2t)+8\cos^2\theta\sinh^2(4t))
\end{aligned}
$$

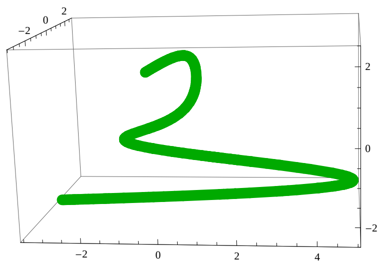
şeklinde bulunur. ■

3.1 Örnekler

Örnek 3.4 Teorem (3.2) de $\theta = \frac{\pi}{4}$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ve $a = 1$, $b = 0$ seçilirse γ eğrisi

$$\gamma(t) = (\frac{2e^{-t\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\sin(t) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos[t]\right)}{3 - \frac{1}{\sqrt{2}}},$$
$$-\frac{2e^{t\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos(t) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin[t]\right)}{3 - \frac{1}{\sqrt{2}}},$$
$$t\sin\left(\frac{\pi}{4}\right))$$

olur ve Şekil (3.1) gösterilmiştir. γ eğrisinin teğetler, asli normaller ve binormal



Şekil 3.1: Sol_3 te γ eğrisi.

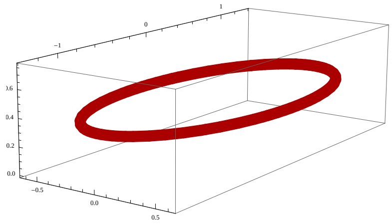
göstergelerinin denklemleri, sırasıyla,

$$T(s) = (e^{-\sin\frac{\pi}{8}}\cos(s)\cos\frac{\pi}{8}, e^{\sin\frac{\pi}{8}}\sin(s)\cos\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{8}),$$

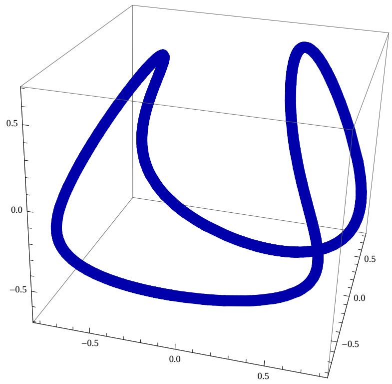
$$N(s) = \left(\frac{e^{\frac{\sqrt{2}\cos(2s)}{\sqrt{7+\cos(4s)-4\sqrt{2}\sin(2s)}}}\left(\sqrt{2}\cos(s) - 2\sin(s)\right)}{\sqrt{7+\cos(4s)-4\sqrt{2}\sin(2s)}},\right.$$
$$\frac{e^{-\frac{\sqrt{2}\cos(2s)}{\sqrt{7+\cos(4s)-4\sqrt{2}\sin(2s)}}}\left(2\cos(s) + \sqrt{2}\sin(s)\right)}{\sqrt{7+\cos(4s)-4\sqrt{2}\sin(2s)}},$$
$$\left.-\frac{\sqrt{2}\cos(2s)}{\sqrt{7+\cos(4s)-4\sqrt{2}\sin(2s)}}\right),$$

$$B(s) = \left(-\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+\cos(4s)}}}(\cos(2s)sin(s))}{\sqrt{3+\cos(4s)}}, \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+\cos(4s)}}}(\cos(s)+\cos(3s))}{\sqrt{2}\sqrt{3+\cos(4s)}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+\cos(4s)}}\right)$$

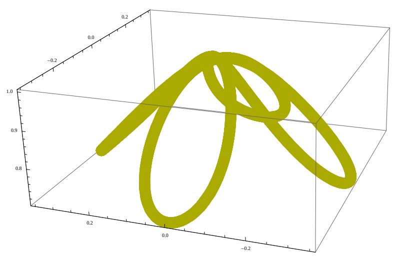
dir ve bunların şekilleri, sırasıyla, Şekil (3.2), Şekil (3.3), Şekil (3.4) de gösterilmiştir. Ayrıca,



Şekil 3.2: Sol_3 te γ eğrisinin teğetler göstergesi.



Şekil 3.3: Sol_3 te γ eğrisinin asli normaller göstergesi.



Şekil 3.4: Sol_3 te γ eğrisinin binormaller göstergesi.

$$\kappa(s)=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{8})\sqrt{7-\cos\frac{\pi}{4}+\cos(4s)(1+\cos\frac{\pi}{4})-8\sin(2s)\sin(\frac{\pi}{8})},$$

ve

$$\tau(s)=\frac{4\cos^4(\frac{\pi}{8})\sin(2s)(15+\cos(4s)-2\sin(2s)(\cos(\frac{\pi}{4})\sin(2s)+6\sin(\frac{\pi}{8})))}{\cos^2(\frac{\pi}{8})(7-\cos\frac{\pi}{4}+\cos(4s)(1+\cos\frac{\pi}{4})-8\sin(2s)\sin(\frac{\pi}{8}))}$$

dir.

Örnek 3.5 Teorem (3.2) de $\theta=\frac{\pi}{3}$, $c_1=c_2=c_3=0$ ve $a=1$, $b=0$ seçilirse β eğrisi

$$\begin{aligned}\beta(t)=(&e^{-\int\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}dt}\int\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh(2t)dt,\\ &e^{\int\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}dt}\int\cos(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3})\cosh(2t)dt,\\ &\int\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)dt})\end{aligned}$$

olur. β eğrisinin teğetler, asli normaller ve binormaller göstergelerinin denklemleri, sırasıyla,

$$T(t)=\left(\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh(2t),\cos(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3})\cosh(2t)\pm\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}\right),$$

$$\begin{aligned}N(t)=\Bigg(&\frac{1}{\kappa}e^{-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)(-\cos(\frac{2\pi}{3})\cos(2t)-\frac{2\sinh(2t)}{\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}})}\\ &(\cos^2(\frac{\pi}{3})(\cosh(2t)\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}+2\sinh(2t)),\\ &e^{\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)(-\cos(\frac{2\pi}{3})\cos(2t)-\frac{2\sinh(2t)}{\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}})}\\ &\cos(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3})(-\cosh(2t)\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}+2\sinh(2t)),\\ &\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)(-\cos(\frac{2\pi}{3})\cos(2t)-\frac{2\sinh(2t)}{\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}}))\Bigg),\end{aligned}$$

$$B(t) = \Bigg(\frac{1}{\kappa}e^{\cos^3(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}\sin(\frac{\pi}{3})}$$

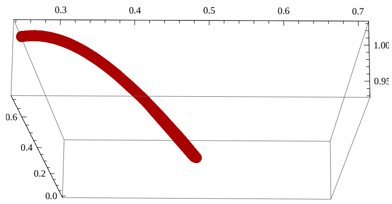
$$(\cos(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3})(\cos(2t) - 2\cos^4(\frac{\pi}{3})\cosh^3(2t) - \frac{2\sinh(2t)}{\sqrt{1-\cos^2(\frac{2\pi}{3})\cosh^2(2t)}}),$$

$$\frac{1}{2}e^{-\cos^3(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}\sin(\frac{\pi}{3})}$$

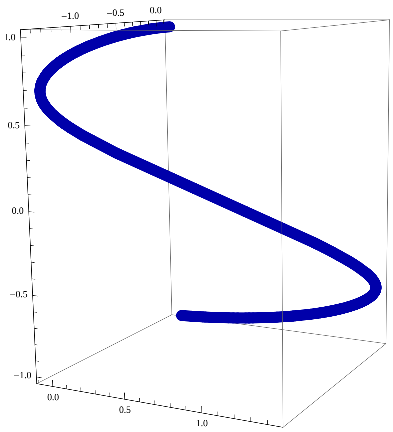
$$\cos^2(\frac{\pi}{3})(2\cosh(2t) - \cosh^3(2t)\sin(\frac{2\pi}{3}) + \frac{4\sinh(2t)}{\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}}),$$

$$-\cos^3(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}\sin(\frac{\pi}{3}))\Bigg)$$

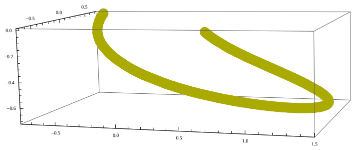
dir ve bunların şekilleri, sırasıyla, Şekil 3.5, Şekil 3.6, Şekil 3.7 de ve Sol_3 küresi üzerinde ki görüntüsü Şekil 3.8 de gösterilmiştir. Ayrıca,



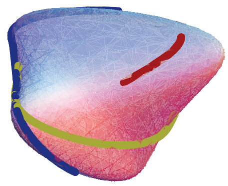
Şekil 3.5: Sol_3 te β eğrisinin teğetler göstergesi.



Şekil 3.6: Sol_3 te β eğrisinin asli normaller göstergesi.



Şekil 3.7: Sol_3 te β eğrisinin binormaller göstergesi.



Şekil 3.8: Sol_3 te β eğrisinin küresel göstergesi.

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) = & (\cos^4(\frac{\pi}{3})(\cosh(2t)\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)} + 2\sin(2t))^2 \\
& + \cos^4(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)(\cos(\frac{2\pi}{3})\cos(2t) + \frac{2\sinh(2t)}{\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}})^2 \\
& + (\cos(\frac{\pi}{3})\cosh(2t)\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}\sin(\frac{\pi}{3}) - 2\cos(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3})\sinh(2t))^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\tau(t) = & \frac{1}{\kappa^2}\frac{1}{-1+\cos^2(\frac{\pi}{3})\cos^2(2t)}\cos^3(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3})(8\cosh^2(2t) \\
& - 6\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^4(2t) + \cos^4(\frac{\pi}{3})(-3+\cos(4(\frac{\pi}{3})))\cosh^6(2t) \\
& + 8\cos^8(\frac{\pi}{3})\cosh^8(2t)\sin(\frac{\pi}{3}) \\
& + 12\cos^2(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{2\pi}{3})\cosh^3(2t)\sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{3})\cosh^2(2t)}\sinh(2t) \\
& - 8\sinh^2(2t) + 8\cos^2(\frac{\pi}{3})\sinh^2(4t))
\end{aligned}
$$

dir.

KAYNAKLAR

[1] Boothby, W. M., *An Inroduction to Differentiable Manifolds and Riemann Geometry*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Lopez, R.; Munteanu, M.I., *On The Geometry of Constant Angle Surfaces In Sol-3.* Departamento De Geometria Topologia. Universidad De Granada, Spain, No.11, 2010.

[3] Gallier, J., *Notes on Differential Geometry and Lie Groups*, Department of Computer and Information Science University of Pennsylvania, Chapter 18, 503-504, May, 2010.

[4] Çallıalp, F., *Örneklerle Soyut Cebir*, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2001.

[5] Hacısalihoğlu, H. H., *Diferensiyel Geometri*, *Cilt 1*, Hacısalihoğlu Yayınları, 2000.

[6] Hacısalihoğlu, H. H., *Diferensiyel Geometri*, *Cilt 3*, Hacısalihoğlu Yayınları, 2004.

[7] Hacısalihoğlu, H. H., *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş.* Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1980.

[8] Koçak, M., *Genel Topolojiye Giriş I*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 2004.

[9] O'Neill, B., *Semi Riemannian Geometry with Application to Relativity.* Academic-Press, New York, 1983.

[10] Sabuncuoğlu, A., *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2004.

[11] Bölcskei, A.; Szilagyi, B., *Frenet Formulas and Geodesics in Sol Geometry*, Beitrage zur Algebra und Geometrie Contributions to Algebra and Geometry, Vol.48, No.2, pp. 411-421, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Diyarbakır da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Muş Gazi İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini Muş Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesinde tamamladıktan sonra 2006 yılında Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2010 yılında bu bölümden mezun oldu ve aynı yıl Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde Yüksek Lisans eğitimine başladı.