T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SPLICED DİZİLERİN TOPLANABİLMESİ

Kemal FİDAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2021

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SPLICED DİZİLERİN TOPLANABİLMESİ

Kemal FİDAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Emre TAŞ

KIRŞEHİR / 2021

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Kemal FİDAN

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-nin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Çalışmalarım süresince hiçbir desteğini esirgemeyen yanımda olan ve bu tez konusunu bana veren kıymetli Hocam Doç. Dr. Emre TAŞ'a ve çalışmalarım sırasında sürekli yanımda olup madden ve manen desteklerini esirgemeyen aileme, ayrıca bu süreçte az ya da çok emeği geçen herkese teşekkür ederim.

Temmuz, 2021 Kemal FİDAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Kısaltmalar	**Açıklama**
ω	: Reel veya kompleks tüm diziler uzayı
Ax	: x dizisinin A dönüşümü
ω_A	: A dönüşümü mevcut tüm diziler uzayı
c_A	: A toplanabilir tüm diziler uzayı
$\delta(E)$	: E kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta_A(E)$	: E kümesinin A-yoğunluğu
∂G	: G kümesinin sınırı

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SPLICED DİZİLERİN TOPLANABİLMESİ

Kemal FİDAN

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematİk Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Emre TAŞ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, temel kavramlar tanıtılıp bunlara ilişkin bazı sonuçlar hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde, sonlu ve sonsuz spliced diziler kavramı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, spliced dizi kavramının bir genişlemesi incelenmiştir.

Son bölümde ise spliced dizilerin A-dağılımsal yakınsaklığı incelenmiştir.

Temmuz 2021, 43 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Spliced diziler, İstatistiksel yakınsaklık, A-dağılımsal yakınsaklık, Matris toplanabilmesi.

ABSTRACT

MSc THESIS

SUMMABILITY OF SPLICED SEQUENCES

Kemal FİDAN

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emre TAŞ

This thesis consists of five chapters. The first chapter has been devoted to the introduction.

In chapter two, the basic concepts have been recalled and some results concerning these concepts have also been considered.

In chapter three, the concepts of finite and infinite spliced sequences have been examined.

In chapter four, an extension of the concept of spliced sequences has been examined.

In the final chapter, A-distributional convergence of spliced sequences has been examined.

July 2021, 43 Pages.

Keywords: Spliced sequences, Statistical convergence, A-distributional convergence, Matrix summability.

1. GİRİŞ

Toplanabilme teorisi matematikte önemli bir yer tutmaktadır. Bu teorinin temel amacı ıraksak bir diziye bir limit karşılık getirebilmektir. Bu amaçla çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu bağlamda Osikiewicz [11] tarafından 2005 yılında spliced dizi kavramı ortaya atılmıştır. Aslında spliced dizi kavramı, sınırlı ıraksak bir diziyi toplayabilecek regüler bir matris olup olmadığına ilişkin yeni bir bakış açısı ortaya koymaktadır. 2014 yılında Ünver ve arkadaşları [14] tarafından topolojik uzaylarda spliced dizilerin A-dağılımsal yakınsaklığı çalışılmıştır. 2016 yılında Yurdakadim ve Ünver [16] tarafından spliced dizi kavramının bir genişlemesi verilmiş olup toplanabilme matrisleri yardımıyla elde edilen dönüşüm dizisinin çekirdeğine ilişkin ve Lebesgue integrali yardımıyla spliced dizilere ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca spliced dizilerin toplanabilmesi ve noktaların yoğunluğu kavramı bazı matematikçiler tarafından çalışılmıştır [1], [4], [5], [7].

Bu tez, [11], [14], [16] çalışmalarında elde edilen sonuçların bir derlemesi niteliğindedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanacağımız bazı temel tanım ve kavramları vereceğiz.

Tanım 2.1. ω, reel ya da kompleks terimli tüm dizilerin uzayı ve $E \subseteq \omega$ alt vektör uzayı olmak üzere E uzayına bir dizi uzayı denir. Bir E dizi uzayından reel ya da kompleks cisme tanımlı lineer bir f fonksiyoneline toplanabilme metodu denir. Eğer E yakınsak diziler uzayını içeriyor ve $\lim x = L$ olduğunda $f(x) = L$ oluyorsa f fonksiyoneline regüler toplanabilme metodu denir.

Tanım 2.2. $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise

$$(Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

olmak üzere $Ax := \{(Ax)_n\}$ dizisine x dizisinin A dönüşüm dizisi denir [15]. A dönüşüm dizisi mevcut olan tüm dizilerin uzayı ω_A ile gösterilir.

Şimdi

$$c_A := \{x \in \omega_A : \{(Ax)_n\}\ dizisi\ yakınsak\}$$

kümesini tanımlayalım. Eğer $f : c_A \to K$ fonksiyonelini $f(x) = \lim_n (Ax)_n$ şeklinde tanımlarsak f bir toplanabilme metodudur. Eğer $\lim_n (Ax)_n = L$ ise x dizisi L değerine $A-toplanabilirdir$ denir. Eğer A matrisi keyfi yakınsak bir diziyi, limitini de koruyarak yakınsak bir diziye dönüştürüyor ise A matrisine regüler matris denir. Regüler matrisler aşağıdaki teorem ile karakterize edilirler.

Teorem 2.3. (Silverman-Toeplitz) Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul;

(i) $\|A\| := \sup\limits_{n} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$
(ii) $a_k := \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, $k = 1, 2, ...$ için
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$
olmasıdır [3].

Örneğin

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}\ , 1 \ \leq \ k \ \leq \ n \\ 0\ , \qquad k > n \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan birinci mertebeden $C_1 = (c_{nk})$ Cesàro matrisi regülerdir.

Şimdi de özel durumda bir dizinin klasik yakınsaklık kavramını ihtiva eden bir toplanabilme metodu verelim.

Tanım 2.4. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k:\ |x_k - L| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A-$istatistiksel$ yakınsaktır denir ve $\mathrm{st}_A - \lim x = L$ ile gösterilir [6], [9].
st_A ile A-$istatistiksel$ yakınsak dizilerin uzayını göstereceğiz.

Şimdi bir $\varepsilon > 0$ için $E_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ dersek χ_{E_ε} bu kümenin karakteristik fonksiyonu olmak üzere st_A-$\lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} (A\chi_{E_\varepsilon}(k))_n = 0$ olmasıdır. Burada $A - istatistiksel$ yakınsaklık tanımında A matrisi yerine C_1 Cesàro matrisi alınırsa, istatistiksel yakınsaklık elde edilir. Diğer taraftan $\delta_A(E) = \lim \sum\limits_{k\in E} a_{nk}$ mevcut ise E kümesi $A - yoğunluğa$ sahiptir diyeceğiz [8]. O halde $\mathrm{st}_A - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\delta_A(E_\varepsilon) = 0$ olmasıdır.

Burada özel olarak A matrisi birim matris alınırsa klasik yakınsaklık elde edilir.

Örnek 2.5.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} \ , \ k = m^2 \\ 1 \ \ , \ k \neq m^2 \end{cases} (m = 1, 2, 3, ...)$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel yakınsaklığını inceleyelim. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 1\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 1\}| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla x dizisi 1 değerine istatistiksel yakınsaktır.
Böylece

$$\{k \in \mathbb{N} : |x_k - 1| \geq \varepsilon\} = \left\{k = m^2 : m \in \mathbb{N}\right\}$$

olduğundan

$$\delta\left(\left\{k = m^2 : m \in \mathbb{N}\right\}\right) = 0$$

olup her $\varepsilon > 0$ ve hemen her k için $|x_k - 1| < \varepsilon$ (yani $\{k \in \mathbb{N} : \ |x_k - 1| \geq 0\}$ sıfır yoğunluklu)olduğundan $st - limx = 1$ bulunur.

Burada istatistiksel yakınsaklık ile alışılmış yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olabileceği sorusu akla gelebilir. Hemen belirtelim ki alışılmış anlamda yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat Örnek 2.5. 'den görüleceği gibi sınırsız ıraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilmektedir.

3. SONLU VE SONSUZ SPLICED DİZİLER

Osikiewicz [11] tarafından 2005 yılında spliced dizi kavramı ortaya atılmıştır. Aslında spliced dizi kavramı, sınırlı ıraksak bir diziyi toplayabilecek regüler bir matris olup olmadığına ilişkin yeni bir bakış açısı ortaya koymaktadır.

3.1. SONLU SPLICED DİZİLER

Bu bölümde sonlu spliced diziler incelenecektir. Öncelikle olarak bazı temel kavramları hatırlatalım.
$t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ olması $\lim\limits_{n\to\infty} (Ax)_n = tL$ olmasını gerektiriyorsa A matrisi t-çarpımsaldır denir.

$A := (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $E := \{v(j)\}$, doğal sayıların sonsuz bir altkümesi olsun. $d_{n,k} = a_{n,v(k)}$ olmak üzere $A^{[E]} := (d_{n,k})$ matrisine kolon altmatrisi denir.

Şimdi de kolon altmatrisi ve çarpımsallık arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1. A negatif olmayan regüler bir matris ve $E := \{v(j)\}$, doğal sayıların sonsuz bir altkümesi olsun. $\delta_A(E)$ mevcut ise $A^{[E]}$, $\delta_A(E)$-çarpımsaldır. Karşıt olarak $A^{[E]}$, t-çarpımsal ise $\delta_A(E)$ mevcuttur ve t değerine eşittir [11].

İspat. $A^{[E]}$, A matrisinin kolon altmatrisi olduğundan Teorem 2.3. in (i) ve (ii) şartlarını şartlarını sağlar. Ayrıca her bir n için

$$\left(A^{[E]}e\right)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,v(k)} = \sum_{k\in E} a_{n,k}$$

olur. Dolayısıyla $\delta_A(E)$ mevcut ise $A^{[E]}$, $\delta_A(E)$-çarpımsaldır. Karşıt olarak $A^{[E]}$, t-çarpımsal ise

$$t = \lim_{n\to\infty} \left(A^{[E]}e\right)_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in E} a_{n,k} = \delta_A(E)$$

elde edilir. ■

Tanım 3.2. M, sabit pozitif bir tamsayı olsun. Doğal sayıların bir $M-parçalanması$

$$\bigcup_{i=1}^{M} K_i = \mathbb{N} \text{ ve } \forall i \neq r \text{ için } K_i \cap K_r = \varnothing$$

olacak biçimdeki $i = 1, 2, ..., M$ için $K_i = \{v_i(j)\}$ sonsuz kümelerinden oluşur [11].

Tanım 3.3. $i = 1, ..., M$ için $\gamma^i = (\gamma_j^{(i)})_{j=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{j\to\infty} \gamma_j^{(i)} = \rho^{(i)}$ olacak biçimde yakınsak bir kompleks dizi olsun. $n \in K_i$ ise en az bir j için $n = v_i(j)$ oluyorsa x dizisine $\{K_1, K_{2,...,}K_M\}$ $M-$ $parçalanması$ üzerinde $\gamma^1, ..., \gamma^{(M)}$ dizilerinin $M - spliced$ dizisi denir. Yani $x_n = x_{v_i(j)} = \gamma_j^{(i)}$ olur [11].

Bir $M - spliced$, en çok M tane limit noktasına sahip olan sınırlı bir dizidir.

Karşıt olarak x dizisi $\rho^{(1)}, ..., \rho^{(M)}$ biçiminde farklı M tane limit noktasına sahip sınırlı bir dizi ise açıkça görüleceği gibi bir $\{K_1, K_{2,...,}K_M\}$ $M-$ $parçalanması$ mevcuttur öyleki $x, \{K_1, K_{2,...,}K_M\}$ üzerinde bir $M - spliced$ dizisidir. Tabiki bu $M - parçalanması$ tek değildir.
Örneğin, $M = 2$ olsun. $K_1 = \{2j-1\}_{j=1}^{\infty}$ ve $K_2 = \{2j\}_{j=1}^{\infty}$ parçalanmasını göz önüne alalım. $\gamma^{(1)} = (\gamma_n^{(1)})_{n=1}^{\infty}$, $\gamma^{(2)} = (\gamma_n^{(2)})_{n=1}^{\infty}$ iki yakınsak kompleks dizi olsun. $\{K_1, K_2\}$ 2-parçalanması üzerinde $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ dizilerinin 2-spliced x dizisi

$$x_n = \begin{cases} \gamma_j^{(1)} & , n = 2j-1 \\ \gamma_j^{(2)} & , \quad n = 2j \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Yani $x = \{\gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \gamma_3^{(1)}, \gamma_3^{(2)}, ...\}$ elde edilir [10].

Teorem 3.4. A, negatif olmayan regüler bir matris olsun ve $\{K_1, K_{2,...,}K_M\}$ M-$parçalanmasını$ gözönüne alalım. Her $i = 1, 2, ...M$ için $\delta(K_i)$ mevcut ise $\sum\limits_{i=1}^{M} \delta_A(K_i) = 1$ gerçeklenir [10].

İspat. $e = (1, 1, ...)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n\to\infty} (Ae)_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{M} a_{n,k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{k\in E_i} a_{n,k} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M} \delta_A (K_i) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır. ■

Tanım 3.5. A, regüler bir matris olsun ve $\{K_1, K_2, ..., K_M\}$ sabitlenmiş bir M-*parçalanmasını* gözönüne alalım. Eğer $\{K_1, K_2, ..., K_M\}$ M-*parçalanması* üzerindeki her M-spliced x dizisi A-*toplanabilirse* A matrisi $\{K_1, K_2, ..., K_M\}$ üzerinde splicing özelliğine sahiptir denir [11].

Teorem 3.6. A, $\{K_1, K_2, ..., K_M\}$ üzerinde splicing özelliğine sahip negatif olmayan regüler bir matris olması için gerek ve yeter şart $i = 1, 2, ...M$ için $\delta_A(K_i)$ yoğunluklarının mevcut olmasıdır [11].

İspat. Her bir $i = 1, ..., M$ için $\delta_A (K_i)$ mevcut olduğunu kabul edelim ve x, $\{K_1, ..., K_M\}$ M-parçalanışı üzerinde bir M-spliced dizi olsun. Bu durumda verilen bir n için

$$\begin{aligned} (Ax)_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{k\in K_i} a_{nk} x_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{nv_i(j)} x_{v_i(j)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{nv_i(j)} \gamma_j^{(i)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M} \left(A^{[K_i]} \gamma^{(i)} \right)_n \end{aligned}$$

olur. Teorem 3.1. gereğince $A^{[K_i]}$, $\delta_A(K_i)$ −çarpımsal olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(Ax)_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{M}\left(A^{[K_i]}\gamma^{(i)}\right)_n = \sum_{i=1}^{M}\lim_{n\to\infty}\left(A^{[K_i]}\gamma^{(i)}\right)_n \\ &= \sum_{i=1}^{M}\delta_A(K_i)\,\Gamma^{(i)}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece x dizisi $\sum_{i=1}^{M}\delta_A(K_i)\,\Gamma^{(i)}$ değerine A-toplanabilirdir ve dolayısıyla A, $\{K_1,...,K_M\}$ üzerinde splicing özelliğine sahiptir. ■

Teorem 3.7. A, regüler bir matris olsun. Herhangi bir M için A matrisinin $\{K_1,K_2,...,K_M\}$ üzerinde splicing özelliğine sahip olmayacak biçimde en az bir $\{K_1,K_2,...,K_M\}$ M-*parçalanması* mevcuttur [10].

İspat. Steinhaus, regüler bir matrisin toplayamayacağı terimleri 0 ve 1'lerden oluşan en az bir dizinin mevcut olduğunu göstermiştir [13]. Dolayısıyla sabit bir M için $K_1=\{n : x_n=1\}$ ve $K_2,...,K_M$ kümeleri ayrık sonsuz ve $\bigcup_{i=2}^{M}K_i=\mathbb{N}\backslash K_1$ olacak biçimde $\{K_1,K_2,...,K_M\}$ M-*parçalanmasını* gözönüne alalım. O halde x dizisinin kendisi $\{K_1,K_2,...,K_M\}$ üzerinde $\gamma_1^{(1)},...,\gamma_1^{(M)}$ dizilerinin bir spliced dizisi olarak düşünülebilir. Burada $\gamma_1^{(1)}=(1,1,...)$ ve $i\neq 1$ için $\gamma^{(i)}=(0,0,...)$ biçimindedir. Dolayısıyla x, bir $M-spliced$ dizisi olup A-*toplanabilir* değildir. ■

3.2. SONSUZ SPLICED DİZİLER

Bu bölümde sonsuz spliced diziler incelenecektir.

Tanım 3.8. $\mathbb{N}$ üzerinde bir $\infty-par$*çalanı*ş, $\mathbb{N}=\cup_{i=1}^{\infty}E_i$ ve $i\neq k$ için $E_i\cap E_k=\varnothing$ olacak biçimde sayılabilir sonsuz sayıda $E_i=\{v_i(j)\}_{j=1}^{\infty}$, $i\in\mathbb{N}$ sonsuz kümelerini içerir [11].

Tanım 3.9. $\{E_i\}$, $\mathbb{N}$ kümesinin sabit bir $\infty-par$*çalanışı* olsun. $i\in\mathbb{N}$ için $\lim_{j\to\infty}\gamma_j^{(i)}=\Gamma^{(i)}$ olacak biçimde bir $\gamma^{(i)}=(\gamma_j^{(i)})_{j=1}^{\infty}$ yakınsak kompleks dizi olsun. $\{E_i\}$ $\infty-par$*çalanışı* üzerinde $\gamma^{(i)}, i\in\mathbb{N}$ dizilerinin $\infty-spliced$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanan x dizisidir. Eğer $n\in E_i$ ise bazı j için $n=v_i(j)$ olup $x_n=x_{v_i(j)}=\gamma_j^{(i)}$ olsun [11].

Bir $\infty - spliced$ dizinin sınırlı olmak zorunda olmadığını vurgulayalım. Ayrıca eğer $\Gamma^{(i)}$, sonsuz sayıda i için farklıysa x sayılabilir sayıda limit noktalarına sahip olacaktır.

Tanım 3.10. A, regüler bir matris olsun ve sabit bir $\{E_i\}$ $\infty - parçalanışını$ göz önüne alalım. Eğer $A, \{E_i\}$ $\infty - parçalanışı$ üzerinde her sınırlı x $\infty - spliced$ dizisini toplar ise A, $\{E_i\}$ üzerinde splicing özelliğine sahiptir denir [11].

Teorem 3.11. Negatif olmayan bir A regüler matrisi, $\{E_i\}$ $\infty - parçalanışı$ üzerinde splicing özelliğine sahipse her i için $\delta_A(E_i)$ mevcuttur. Tersine her i için $\delta_A(E_i)$ mevcut ve $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_A(E_i) = 1$ ise A matrisi, $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax)_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_A(E_i)\Gamma^{(i)}$ olmak üzere $\{E_i\}$ üzerinde splicing özelliğine sahiptir [11].

İspat. A matrisinin $\{E_i\}$ üzerinde splicing özelliğine sahip olduğunu kabul edelim. Teorem 3.6. nın ispatına benzer şekilde her i için $\delta_A(E_i)$ mevcut olduğu kolaylıkla görülür. Tersine her i için $\delta_A(E_i)$ yoğunluklarının mevcut olduğunu, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_A(E_i) = 1$ kabul edelim ve x, $\{E_i\}$ üzerinde bir sınırlı sonsuz spliced olsun. Verilen bir n için

$$\begin{aligned}
(Ax)_n &:= \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k\in E_i} a_{n,k}x_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)}x_{v_i(j)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)}\gamma_j^{(i)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(A^{[E_i]}\gamma^{(i)}\right)_n
\end{aligned}$$

olacaktır. Sabit bir n için $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ve $g_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarını$f_n(i) = \left(A^{[E_i]}\gamma^{(i)}\right)_n$

ve $g_n(i) = M\left(A^{[E_i]}e\right)_n$ biçiminde tanımlayalım. Burada $M = \|x\|_\infty = \sup\limits_j |x_j|$ ve $e = (1, 1, 1, ...)$ biçimindedir.

Verilen bir i için $A^{[E_i]}$, $\delta_A(E_i)$ çarpanıyla çarpımsal olduğu için

$$f(i) := \lim_{n\to\infty} f_n(i) = \lim_{n\to\infty}\left(A^{[E_i]}\gamma^{(i)}\right)_n = \delta_A(E_i)\Gamma^{(i)}$$

ve

$$g(i) := \lim_{n\to\infty} g_n(i) = \lim_{n\to\infty} M\left(A^{[E_i]}e\right)_n = M\delta_A(E_i)$$

olur. Eğer μ, sayma ölçüsü olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}} g_n(i)\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} M\left(A^{[E_i]}e\right)_n \\
&= M\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(A^{[E_i]}e\right)_n \\
&= M\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k\in E_i} a_{n,k}\right) = M\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}
\end{aligned}$$

elde edilir. A regüler ve $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_A(E_i) = 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}} g_n(i)\,d\mu = M\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = M.1 = M\sum_{i=1}^{\infty}\delta_A(E_i) = \int_{\mathbb{N}} g_n(i)\,d\mu$$

olup

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}} g_n(i)\,d\mu = \int_{\mathbb{N}}\lim_{n\to\infty} g_n(i)\,d\mu \tag{3.1}$$

elde edilir. Ayrıca her n için

$$|f_n(i)| = \left|\left(A^{[E_i]}\gamma^{(i)}\right)_n\right| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_{i(j)}}\gamma_j^{(i)}\right| \le M\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_{i(j)}} = M(A^{[E_i]}e)_n = g_n(i) \tag{3.2}$$

bulunur. Böylece (3.1) ve (3.2) göz önüne alınarak Lebesgue yakınsaklık teoremi gereğince

$$\lim_{n\to\infty}(Ax)_n = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{\infty} A^{[E_i]}\gamma^{(i)})_n = \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}(A^{[E_i]}\gamma^{(i)})_n = \sum_{i=1}^{\infty}\delta_A(E_i)\,\Gamma^{(i)}$$

elde edilir. Bu nedenle x dizisi, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_A(E_i)\,\Gamma^{(i)}$ değerine $A-toplanabilirdir$ ve sonuç olarak A, $\{E_i\}$ üzerinde splicing özelliğine sahiptir. ■

Örnek 3.12. Her $i \in \mathbb{N}$ için $E_i = \{2^{i-1}(2j-1)\}_{j=1}^{\infty}$ olsun. Verilen bir i için E_i sonsuzdur ve $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ olur. $i \neq k$ için $E_i \cap E_k = \varnothing$ olduğunu görmek için aksini kabul edelim. Yani $E_i \cap E_k \neq \varnothing$ olacak biçimde $i, k \in \mathbb{N}$ indislerinin mevcut olduğunu kabul edelim. Bir

$n \in E_i \cap E_k$ mevcuttur ve sonuç olarak

$$n = 2^{i-1}(2j_0 - 1) = 2^{k-1}(2j_1 - 1)$$

olacak biçimde j_0 ve j_1 seçebiliriz. Genelliği bozmaksızın $k > i$ kabul edebiliriz. Bu durumda

$$2j_0 - 1 = 2^{k-i}(2j_1 - 1)$$

olur. Fakat bu denklemin sağ tarafı bir çift sayı olmasına rağmen sol tarafı tek sayıdır. Bu ise çelişkidir. Bu nedenle $i \neq k$ için $E_i \cap E_k = \varnothing$ gerçeklenir. Her i için

$$\delta(E_i) = \lim_{j\to\infty} \frac{j}{2^{i-1}(2j-1)} = \frac{1}{2^i}$$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $\{E_i\}$, her i için $\delta(E_i) = \frac{1}{2^i}$ ve $\sum_{i=1}^{\infty}\delta(E_i) = 1$ olacak biçimde $\mathbb{N}$ kümesinin bir $\infty - par\c{c}alan\imath\c{s}\imath d\imath r.$

Örnek 3.13. $\mathbb{N}$ kümesinin bir $\infty-par\c{c}alan\imath\c{s}\imath n\imath$ oluşturalım. E_1 karelerin kümesi, E_2 kareler $+1$ in kümesi, E_3 kareler $+2$ nin kümesi olsun. E_4 kümesi önceden kullanılan terimler çıkarılarak kareler $+3$ ün kümesidir. Tümevarımdan E_i kümesi, önceden kullanılan terimler çıkarılarak kareler $+i-1$ in kümesi olacaktır. Yani $[\![\frac{i}{2}]\!]$, $\frac{i}{2}$ sayısının tam değeri olmak üzere $i > 1$ için $E_i = \{j^2 + (i-1)\}_{j=[\![\frac{i}{2}]\!]}^{\infty}$ olur. Bu yorumdan her i için E_i sonsuzdur ve $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ ve $i \neq k$ için $E_i \cap E_k = \varnothing$ biçimindedir. Ayrıca $\delta(E_1) = \lim\limits_{j\to\infty} \frac{j}{j^2} = 0$ ve $i > 1$ için $\delta(E_i) = \lim\limits_{j\to\infty} \frac{j}{j^2+(i-1)} = 0$ olur. Bu nedenle $\{E_i\}$, her i için $\delta(E_i) = 0$ olmak üzere $\mathbb{N}$ kümesinin bir $\infty - par\c{c}alan\imath$şıdır.

Örnek 3.14. $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, $[0,1]$ aralığındaki rasyonel sayılar kümesini göstersin ve x, aşağıdaki gibi tanımlanan dizi olsun:

Her $n \in \mathbb{N}$ için $n = 2^{i-1}(2j-1)$ olacak biçimde i, j tamsayılarının bir tek çifti mevcuttur. $x_n = r_i$ olsun. x dizisinin $C_1 - toplanabilir$ olduğunu gösterelim.

Her i için $\gamma^{(i)}$, r_i sabit dizisi ve $E_i = \{2^{i-1}(2j-1)\}_{j=1}^{\infty}$ olmak üzere $\{E_i\}$ $\infty - par\c{c}alan\imath$şı üzerinde $\gamma^{(i)}$ dizilerinin bir sınırlı $\infty - spliced$'ı olduğu görülebilir. Örnek 3.12. den her i

için $\delta\left(E_i\right)=\frac{1}{2^i}$ ve $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta\left(E_i\right)=1$ dir. Bu nedenle Teorem 3.11. kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty}\left(C_1 x\right)_n=\sum_{i=1}^{\infty}\delta\left(E_i\right)\Gamma^{(i)}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}r_i<\infty$$

elde edilir. Bu da x dizisinin $C_1-toplanabilir$ olduğunu söyler.

4. SONLU VE SONSUZ SPLICED DİZİLERİN GENİŞLEMESİ ÜZERİNE

$A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olmak üzere aşağıdaki seriler ve limit mevcut olduğu sürece

$$\chi(A) := \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k a_k$$

olsun. A matrisi konservatif (yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştüren matrislere konservatif matris denir.) ise $\chi(A)$ mevcut olduğu bilinmektedir. [3].

Teorem 4.1. $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi ve $\chi(A)$ mevcut olsun. Her $k \geq q$ için $a_{nk} \geq 0$ olacak biçimde bir q tamsayısı mevcut ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ serisi yakınsak olduğu sürece

$$\liminf_n (Ax)_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k + \chi(A) \liminf_n x_n$$

ve

$$\limsup_n (Ax)_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k + \chi(A) \limsup_n x_n$$

gerçeklenir [12].

İspat. $l = \liminf_n x_n > -\infty$ olduğunu kabul edelim. İspatı tamamlamak için keyfi $\varepsilon > 0$ sayı olmak üzere her $k \geq N$ için $x_k \geq l - \varepsilon$ ve $a_{n,k} \geq 0$ olacak biçimde bir N tamsayısının mevcut olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $r \geq N$ ise

$$(Ax)_n = (l - \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} + \sum_{k=1}^{r} a_{n,k}(x_k - l + \varepsilon) + \sum_{k=r+1}^{\infty} a_{n,k}(x_k - l + \varepsilon)$$

yazabiliriz. Üçüncü seri negatif değildir ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = t,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{r} a_{n,k}(x_k - l + \varepsilon) = \sum_{k=1}^{r} a_k(x_k - l + \varepsilon)$$

olup dolayısıyla

$$\liminf_{n}(Ax)_n \geq (l-\varepsilon)\big(t - \sum_{k=1}^{r} a_k\big) + \sum_{k=1}^{r} a_k x_k$$

elde edilir. $r \geq N$ keyfi olduğundan

$$\liminf_{n}(Ax)_n \geq (l-\varepsilon)\chi(A) + \sum_{k=1}^{r} a_k x_k$$

olur. Bu da ilk eşitsizliğin ispatını tamamlar. Ikinci eşitsizlik için ilk eşitsizlikte x yerine $-x$ almak yeterlidir. ■

Lemma 4.2. $A = (a_{nk})$, negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi $K := \{v_j\}$, $\mathbb{N}$ kümesinin sonsuz bir altkümesi ve $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi olsun. $\delta_A(K)$ mevcut ise

$$\liminf_{n}\left(A^{[K]}x\right)_n \geq \delta_A(K)\liminf_{n} x_n \tag{4.1}$$

ve

$$\limsup_{n}\left(A^{[K]}x\right)_n \leq \delta_A(K)\limsup_{n} x_n \tag{4.2}$$

gerçeklenir [16].

İspat. A matrisi regüler olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k := \lim_n a_{nk} = 0$ olup her $n, k \in \mathbb{N}$ için $b_{nk} = a_{n,v_k}$ olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için $b_k = 0$ olur. Teorem 4.1. gereğince

$$\begin{aligned}
\liminf_n \left(A^{[K]}x\right)_n &\geq \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k + \chi\left(A^{[K]}\right) \liminf_n x_n \\
&= \chi\left(A^{[K]}\right) \liminf_n x_n \\
&= \left(\lim_n \sum_k b_{nk} - \sum_k b_k\right) \liminf_n x_n \\
&= \left(\lim_n \sum_k a_{n,v_k}\right) \liminf_n x_n \\
&= \left(\lim_n \sum_{k \in K} a_{nk}\right) \liminf_n x_n \\
&= \delta_A(K) \liminf_n x_n
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1) eşitsizliğinde x yerine $-x$ alınırsa (4.2) eşitsizliğinin ispatı elde edilir. ■

Şimdi sonlu spliced dizi kavramını genişleten M^*-spliced dizi kavramını verelim.

Tanım 4.3. $\{K_i : i = 1, 2, ..., M\}$, $\mathbb{N}$ kümesinin sabitlenmiş bir M-parçalanışı ve $i = 1, 2, ..., M$ için $x^{(i)} = \left(x_j^{(i)}\right)$ sınırlı bir dizi olsun. Eğer $k \in K_i$ ise bazı j ler için $k = v_i(j)$ olur. $x_k = x_{v_i(j)} = x_j^{(i)}$ olacak biçimde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisine $\{K_i : i = 1, 2, ..., M\}$ üzerinde M^*-spliced dizisi denir [16].

Osikiewicz, M-spliced dizileri yakınsak dizileri kullanarak tanımlamıştı. Ancak Yurdakadim ve Ünver, sınırlı dizileri kullanarak tanımlamıştır. Her M-spliced dizisi, M^*-spliced dizidir. Ayrıca her M^*-spliced dizi sınırlıdır.

Sıradaki teorem M^*-spliced dizilerini kullanarak Ax dönüşüm dizisinin çekirdeğine ilişkin bir tahmin verir.

Teorem 4.4. A, negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi ve $\{K_i = \{v_i(j)\} : i = 1, 2, ..., M\}$, $\mathbb{N}$ kümesinin bir M-parçalanışı olsun. Her $i = 1, 2, ..., M$,için $\delta_A(K_i)$ mevcut ise $\{K_i\}$ üzerinde her M^*-spliced x dizisi için

$$\liminf_n (Ax)_n \geq \sum_{i=1}^{M} \delta_A(K_i)\, \alpha_i \tag{4.3}$$

ve

$$\limsup_{n} (Ax)_n \leq \sum_{i=1}^{M} \delta_A (K_i) \beta_i \tag{4.4}$$

gerçeklenir. Burada $\alpha_i = \liminf_{j} x_j^{(i)}$ ve $\beta_i = \limsup_{j} x_j^{(i)}$ biçimindedir [16].

İspat. Her $i = 1, 2, ..., M$ için $\delta_A (K_i)$ mevcut ve x, $\{K_i\}$ üzerinde bir M^*-spliced dizi olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için [11] de olduğu gibi

$$\begin{aligned} (Ax)_n &= \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{k \in K_i} a_{nk} x_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)} x_{v_i(j)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{M} a_{n,v_i(j)} x_j^{(i)} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{M} A^{[K_i]} x^{(i)} \right)_n \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Böylece (4.5) ve Lemma 4.2. gereğince

$$\begin{aligned} \liminf_{n} (Ax)_n &= \liminf_{n} \sum_{i=1}^{M} \left(A^{[K_i]} x^{(i)} \right)_n \\ &\geq \sum_{i=1}^{M} \liminf_{n} \left(A^{[K_i]} x^{(i)} \right)_n \\ &\geq \sum_{i=1}^{M} \delta_A (K_i) \alpha_i \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (4.3) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır. (4.3) eşitsizliğinde x yerine $-x$ alınırsa (4.4) elde edilir. ■

Herhangi bir $i = 1, 2, ..., M$ için $x^{(i)}$ yakınsak ise her $i = 1, 2, ..., M$ için $\gamma_i := \alpha_i = \beta_i$ olur. Dolayısıyla Teorem 4.4., Ax dönüşüm dizisinin çekirdeğinin $\left[\sum_{i=1}^{M} \delta_A (K_i) \alpha_i, \sum_{i=1}^{M} \delta_A (K_i) \beta_i \right]$ aralığını aşamayacağını gösterir ve [11] de Teorem 2.5 i genelleştirir.

Şimdi de sonsuz spliced dizi kavramını genişleten ∞^*-spliced dizi kavramını verelim.

Tanım 4.5. $\{K_i : i \in \mathbb{N}\}$, kümesinin sabitlenmiş bir ∞-parçalanışı ve $i \in \mathbb{N}$ için $x^{(i)} = \left(x_j^{(i)}\right)$ sınırlı bir dizi olsun. Eğer $k \in K_i$ ise bazı j ler için $k = v_i(j)$ olur. $x_k = x_{v_i(j)} = x_j^{(i)}$ olacak biçimde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisine $\{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ üzerinde ∞^*-spliced dizisi denir [16].

Osikiewicz tarafından tanımlanan ∞-spliced dizileri yakınsak diziler kullanılmıştır. Ancak Yurdakadim ve Ünver, sınırlı dizileri kullanarak tanımlamıştır. Her ∞-spliced dizisi, ∞^*-spliced dizisidir. Bir ∞^*-spliced dizisi sınırlı olmak zorunda değildir.

Aşağıdaki teorem, ∞^*-spliced dizilerini kullanarak Ax dönüşüm dizisinin çekirdeği için bir tahmin verir.

Teorem 4.6. A, negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi ve $\{K_i = \{v_i(j)\} : i \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N}$ kümesinin bir ∞-parçalanışı olsun. Her $i \in \mathbb{N}$, için $\delta_A(K_i)$ mevcut ve $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i) = 1$ ise $\{K_i\}$ üzerindeki herhangi bir ∞^*-spliced x dizisi için

$$\liminf_n (Ax)_n \geq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i)\,\alpha_i \tag{4.6}$$

ve

$$\limsup_n (Ax)_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i)\,\beta_i \tag{4.7}$$

gerçeklenir. Burada $\alpha_i = \liminf_j x_j^{(i)}$ ve $\beta_i = \limsup_j x_j^{(i)}$ biçimindedir [16].

İspat. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\delta_A(K_i)$ mevcut, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_A(K_i) = 1$ ve x, $\{K_i\}$ üzerinde bir ∞^*-spliced olsun. Bu durumda [11] de olduğu gibi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}(Ax)_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k\in K_i} a_{n,k}x_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)}x_{v_i(j)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,v_i(j)}x_j^{(i)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(A^{[K_i]}x^{(i)}\right)_n\end{aligned}$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ve $g_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ fonksiyonları

$$f_n(i) := \left(A^{[K_i]}x^{(i)}\right)_n \quad \text{ve} \quad g_n(i) := H\left(A^{[K_i]}e\right)_n$$

biçiminde tanımlansın. Burada $H := \sup\limits_k |x_k|$ ve $e = (1, 1, ...)$ biçimindedir. μ, sayma ölçüsü olsun. [11] Teorem1.2 gereğince

$$\lim_n g_n(i) = H\delta_A(K_i)$$

ve

$$\lim_n \int\limits_{\mathbb{N}} g_n(i)\, d\mu = \int\limits_{\mathbb{N}} \left(\lim_n g_n(i)\right) d\mu = H > 0 \tag{4.8}$$

olur. Ayrıca her $n, i \in \mathbb{N}$ için

$$|f_n(i)| \leq g_n(i)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için (4.8) ve Fatou lemmasından

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} \liminf_n (f_n + g_n)(i)\, d\mu &\leq \liminf_n \int_{\mathbb{N}} (f_n + g_n)(i)\, d\mu \\
&= \liminf_n \left(\int_{\mathbb{N}} f_n(i)\, d\mu + \int_{\mathbb{N}} g_n(i)\, d\mu \right) \\
&= \liminf_n \int_{\mathbb{N}} f_n(i)\, d\mu + \liminf_n \int_{\mathbb{N}} g_n(i)\, d\mu \\
&= \liminf_n \int_{\mathbb{N}} f_n(i)\, d\mu + H \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i) \\
&= \liminf_n \int_{\mathbb{N}} f_n(i)\, d\mu + H
\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Diğer taraftan (g_n), bir $i \in \mathbb{N}$ için yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} \liminf_n (f_n + g_n)(i)\, d\mu &= \int_{\mathbb{N}} \left(\liminf_n f_n(i) + \liminf_n g_n(i) \right) d\mu \\
&= \int_{\mathbb{N}} \liminf_n f_n(i)\, d\mu + \int_{\mathbb{N}} \liminf_n g_n(i)\, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{N}} \liminf_n f_n(i)\, d\mu + H \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i) \\
&= \int_{\mathbb{N}} \liminf_n f_n(i)\, d\mu + H
\end{aligned} \tag{4.10}$$

bulunur. Böylece (4.9) ve (4.10) dan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} \liminf_n f_n(i)\, d\mu &\leq \liminf_n \int_{\mathbb{N}} f_n(i)\, d\mu \\
&= \liminf_n \sum_{i=1}^{\infty} \left(A^{[K_i]} x^{(i)} \right)_n \\
&= \liminf_n (Ax)_n
\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Şimdi Lemma 4.2. i kullanarak

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{N}} \liminf_n f_n(i)\, d\mu &= \int\limits_{\mathbb{N}} \liminf_n \left(A^{[K_i]} x^{(i)}\right) d\mu \\ &\geq \int\limits_{\mathbb{N}} \delta_A(K_i)\, \alpha_i d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i)\, \alpha_i\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde ederiz. (4.11) ve (4.12) gereğince

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i)\, \alpha_i \leq \liminf_n (Ax)_n$$

elde edilir, bu da ispatı tamamlar. ■

Her bir $i \in \mathbb{N}$ için $x^{(i)}$ yakınsak ise her bir $i \in \mathbb{N}$ için $\gamma_i := \alpha_i = \beta_i$ olur. Dolayısıyla Teorem 4.6., Ax dönüşüm dizisinin çekirdeğinin $\left[\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i)\, \alpha_i, \sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i)\, \delta_i\right]$ aralığını aşamayacağını gösterir ve [11] de Teorem 3.4 ü genelleştirir.

4.1. LEBESGUE İNTEGRALİ YARDIMIYLA EŞİTSİZLİKLER

Ünver ve arkadaşları, Banach uzaylarında ∞-spliced dizilerinin A-limitlerinin Bochner integral gösterimini vermiştir. Bu kısımda Lebesgue integrali yardımıyla ∞^*-spliced dizilerinin A dönüşüm dizisinin üst limit ve alt limitleri için bazı eşitsizlikler vereceğiz. Bu sonuç [14] deki Önerme 2 yi genişletmektedir.

İlk olarak aşağıdaki tanımı hatırlatalım:

Tanım 4.7. $F(\mathbb{R}) = 1$ olacak biçimde $F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ bir küme fonksiyonu olsun. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de U_1,U_2, ... ayrık kümeler olmak üzere

$$F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} F(U_j)$$

koşulunu sağlayan F fonksiyonuna bir olasılık ölçüsü veya $\mathbb{R}$ üzerinde bir dağılım denir.

Teorem 4.8. $A=(a_{nk})$, satır toplamları 1 olan negatif olmayan regüler bir matris ve $\{K_i=\{v_i(j):i\in\mathbb{N}\}\}$, $\mathbb{N}$ kümesinin bir ∞-parçalanışı olsun. Eğer her $i\in\mathbb{N}$ için $\delta_A(K_i)$ mevcut ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_A(K_i)=1$ ise $\{K_i\}$ üzerindeki her sınırlı ∞^*-spliced x dizisi için

$$\liminf_n (Ax)_n \geq \int\limits_{\mathbb{R}} tdF$$

ve

$$\limsup_n (Ax)_n \leq \int\limits_{\mathbb{R}} tdG$$

gerçeklenir. Burada

$$F(U)=\sum_{\alpha_i\in U}\delta_A(K_i)$$
$$G(U)=\sum_{\beta_i\in U}\delta_A(K_i)$$

ve $\alpha_i=\liminf\limits_j x_j^{(i)}$, $\beta_i=\limsup\limits_j x_j^{(i)}$ biçimindedir [16].

İspat. Her $i\in\mathbb{N}$ için $\delta_A(K_i)$ mevcut olsun. Şimdi [14] daki Önerme 2 de olduğu gibi $s:X\to X$ fonksiyonu

$$s(t)=\begin{cases}\alpha_i\ , & t=\alpha_i,\ i\in\mathbb{N}\\ \theta\ , & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ve $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ise

$$f(t)=t$$

biçiminde tanımlansın. F dağılımına göre hemen hemen her yerde $f=s$ olur. Dolayısıyla

$$\int\limits_{\mathbb{R}} tdF=\int\limits_{\mathbb{R}} s(t)\,dF \tag{4.13}$$

elde edilir. Şimdi de (s_m) basit fonksiyonlar dizisini

$$s_m(t)=\begin{cases}\alpha_i \ , \ t=\alpha_i, \ i=1,2,...,m\\ \theta \ , \quad \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Her $m\in\mathbb{N}$ için

$$|s_{m(t)}-s(t)|=\begin{cases}|\alpha_i| \ , \quad t=\alpha_i, \ i>m\\ \theta \quad , \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla her $t\in X$ için $\lim\limits_{m\to\infty}|s_{m(t)}-s(t)|=0$ olur. Diğer taraftan spliced dizisi sınırlı olduğundan

$$\sup_{t\in X}|s_{m(t)}-s(t)|\leq\sup_{i>m}|\alpha_i|<H$$

olacak biçimde bir $H>0$ mevcuttur. Sınırlı yakınsaklık teoremi gereğince

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}|s_{m(t)}-s(t)|dF=\int\limits_{\mathbb{R}}\lim_{m\to\infty}|s_{m(t)}-s(t)|dF=0$$

elde edilir. Bu ise

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}}s(t)\,dF&=\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}s_{m(t)}dF=\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{m}I_{\{\alpha_i\}}(t)\,\alpha_i dF\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}F(\{\alpha_i\})\,\alpha_i=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\delta_A(K_i)\,\alpha_i\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\delta_A(K_i)\,\alpha_i\end{aligned}\tag{4.14}$$

olmasını gerektirir. (4.14) ve Teorem 4.6. gereğince

$$\liminf_n(Ax)_n\geq\int\limits_{\mathbb{R}}tdF$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\limsup_n(Ax)_n\geq\int\limits_{\mathbb{R}}tdG$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Her $i \in \mathbb{N}$ için $x^{(i)}$, yakınsak ise her bir $i \in \mathbb{N}$ için $\alpha_i = \beta_i$ olur. Buradan $H := F = G$ elde edilir. Böylece Teorem 4.8. gereğince

$$\int_{\mathbb{R}} tdH \leq \liminf_n (Ax)_n \leq \limsup_n (Ax)_n \leq \int_{\mathbb{R}} tdH$$

yani

$$\lim_n (Ax)_n = \int_{\mathbb{R}} tdH$$

bulunur. Bu ise reel durumda [14] daki Önerme 2 nin ispatını verir.

Bu teorem, bir Bochner integrali yardımıyla Banach latislere genişletilebilir.

5. SPLICED DİZİLERİN A-DAĞILIMSAL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde Hausdorff topolojik uzayında bir spliced dizinin A-dağılımsal yakınsaklığına ilişkin bazı sonuçlar verilecektir.

Şimdi bu bölümde kullanacağımız bazı tanımları verelim.

(X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $\sigma(\tau)$, bu uzayın altkümelerinin Borel sigma cebiri olsun. $F:\sigma(\tau)\to[0,1]$, $F(X)=1$ ve eğer G_1,G_2,... $\sigma(\tau)$ da ayrık kümeler olmak üzere

$$F\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}G_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}F(G_j)$$

olacak biçimde bir küme fonksiyonu olsun. Böyle bir fonksiyona bir olasılık ölçüsü veya bir dağılım adı verilir. (Bu tanım Tanım 4.7. nin topolojik uzaylardaki halidir.) $A=(a_{nk})$, satır toplamları 1 olan negatif olmayan regüler bir matris olsun. F, $\sigma(\tau)$ üzerinde bir olasılık ölçüsü olsun. X üzerindeki bir $x=(x_k)$ dizisi, eğer $F(\partial G)=0$ olacak biçimde her $G\in\sigma(\tau)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k:x_k\in G}a_{nk}=F(G)$$

gerçeklenir ise F ye A-dağılımsal yakınsaktır denir. Burada ∂G, G kümesinin sınırıdır. Aşağıdaki teorem A-dağılımsal yakınsaklığı karakterize etmektedir.

Teorem 5.1. X bir topolojik uzay olmak üzere $A=(a_{n,k})$, satır toplamları 1 olan negatif olmayan regüler bir matris, F bir dağılım fonksiyonu ve $x=(x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.[2]

(i) x, F dağılımına A-dağılımsal yakınsaktır.

(ii) Her kapalı V altkümesi için $\limsup\limits_{n}\sum\limits_{k:x_k\in V}a_{nk}\leq F(V)$,

(iii) Her açık U altkümesi için$\liminf\limits_{n}\sum\limits_{k:x_k\in U}a_{nk}\geq F(U)$.

Teorem 5.2. X, bir Hausdorff topolojik uzay, $A=(a_{nk})$ satır toplamları 1 olan negatif olmayan regüler bir matris ve $\{K_i=\{v_i(j)\}:i=1,2,...,M\}$, $\mathbb{N}$ kümesinin bir M-parçalanışı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

(i) Her $i=1,2,...,M$ için $\delta_A(K_i)$ mevcut

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{M} p_i = 1$ olacak biçimde $p_1,p_2,...,p_M \in [0,1]$ mevcut ve $\{K_i : i = 1,2,...,M\}$ üzerinde limit noktaları $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_M$ olan herhangi bir spliced dizi her $G \in \sigma(\tau)$ için $F(G) = \sum\limits_{1\leq i\leq M, \alpha_i\in G} p_i$ biçiminde tanımlanan $F : \sigma(\tau) \to [0,1]$ dağılımına A-dağılımsal yakınsaktır.

(iii) $\sum\limits_{i=1}^{M} p_i = 1$ olacak biçimde $p_1,p_2,...,p_M \in [0,1]$ mevcut ve $\{K_i : i = 1,2,...,M\}$ üzerinde $x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(M)}$ ın M-spliced dizileri her $G \in \sigma(\tau)$ için

$$F(G) = \sum_{1\leq i\leq M, \alpha_i\in G} p_i$$

biçiminde tanımlanan $F : \sigma(\tau) \to [0,1]$ dağılımına A-dağılımsal yakınsaktır. Burada her $i=1,2,...,M$ için $x^{(i)} = (\alpha_i,\alpha_i,...)$ dizisidir.

İspat. $(i) \implies (ii)$: Her $i = 1,2,...,M$ iç in $\delta_A(K_i)$ mevcut olduğunu kabul edelim. Her $i = 1,2,...,M$ için $p_i = \delta_A(K_i)$ olsun. $\{K_i : i = 1,2,...,M\}$, $\mathbb{N}$ kümesinin bir M-parçalanışı olduğundan

$$1 = \sum_{i=1}^{M} \delta_A(K_i) = \sum_{i=1}^{M} p_i$$

elde edilir. x, $\{K_i : i = 1,2,...,M\}$ üzerinde $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_M$ limit noktalarına sahip $x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(M)}$ ın M-spliced dizisi ve $x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(M)}$ ın M-spliced dizi ve V, kapalı bir küme olsun.

$Durum\ 1$: Her $i=1,2,...,M$ için $\alpha_i \notin V$ ise $F(V)=0$ ve

$$\begin{aligned}\sum_{k:x_k\in V} a_{nk} &= \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{k\,:\,x_k\in V\\ k\in K_i}} a_{nk}\\ &= \sum_{i=1}^{M} \sum_{k:x_j^{(i)}\in V} a_{n,v_i^{(j)}}\\ &= \sum_{i=1}^{M} \sum_{k:x_j^{(i)}\notin V^C} a_{n,v_i^{(j)}}\end{aligned}$$

elde edilir. $x^{(i)}$, α_i değerine yakınsak olduğundan $\sum\limits_{k:x_j^{(i)}\notin V^C} a_{n,v_i^{(j)}}$ toplamı her $i=1,2,...,M$ için sonludur. Ayrıca A regüler olduğundan her j için $\lim\limits_n a_{n,v_i^{(j)}} = 0$ olur. Böylece son eşitliğin sağ tarafı, $n \longrightarrow \infty$ iken sıfıra gider. Dolayısıyla

$$\limsup_n \sum_{k:x_k\in V} a_{nk} = F(V) = 0$$

elde edilir.

$Durum\ 2$: Bazı S ve R için $\{m(t)\}_{t=1}^{S} \cup \{l(t)\}_{t=1}^{R} = \{1,2,...,M\}$ olmak üzere $\alpha_{m(1)}, \alpha_{m(2)}, ..., \alpha_{m(S)} \in V$ ve $\alpha_{l(1)}, \alpha_{l(2)}, ..., \alpha_{l(S)} \notin V$ ise $F(V) = \sum\limits_{t=1}^{S} \delta_A\left(K_{m(t)}\right)$ ve

$$\begin{aligned}
\sum_{k:x_k\in V} a_{nk} &= \sum_{t=1}^{S} \sum_{\substack{k\,:\,x_k\in V \\ k\in K_{m(t)}}} a_{nk} + \sum_{t=1}^{R} \sum_{\substack{k\,:\,x_k\in V \\ k\in K_{l(t)}}} a_{nk} \\
&= \sum_{t=1}^{S} \sum_{\substack{k\,:\,x_k\in V \\ k\in K_{m(t)}}} a_{nk} + \sum_{t=1}^{R} \sum_{j:x_j^{(l(t))}\in V} a_{n,v_{l(t)}^{(j)}} \\
&\leq \sum_{t=1}^{S} \sum_{k\in K_{m(t)}} a_{nk} + \sum_{t=1}^{R} \sum_{j:x_j^{(l(t))}\notin V^C} a_{n,v_{l(t)}^{(j)}}
\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk parça $n \longrightarrow \infty$ iken $\sum\limits_{t=1}^{S} \delta_A\left(K_{m(t)}\right)$ değerine gider. Birinci duruma benzer şekilde her $t = 1,2,...,R$ için $\sum\limits_{j:x_j^{(l(t))}\notin V^C} a_{n,v_{l(t)}^{(j)}}$ toplamı sonludur. Ayrıca A regüler olduğundan her j için $\lim\limits_n a_{n,v_{l(t)}^{(j)}} = 0$ olur. Böylece son eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim, $n \longrightarrow \infty$ iken sıfıra gider. Dolayısıyla

$$\limsup_n \sum_{k:x_k\in V} a_{nk} \leq \sum_{t=1}^{S} \delta_A\left(K_{m(t)}\right) = F(V)$$

bulunur.

$Durum\ 3$: Eğer her $i = 1, 2, ..., M$ için $\alpha_i \in V$ ise $F(V) = 1$ ve açık olarak

$$\limsup_n \sum_{k:x_k \in V} a_{nk} \leq 1 = F(V)$$

elde edilir. Dolayısıyla bütün durumlarda herhangi bir kapalı V kümesi için

$$\limsup_n \sum_{k:x_k \in V} a_{nk} \leq F(V)$$

bulunur. Teorem 5.1. gereğince x dizisi, F ye A-dağılımsal yakınsaktır.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$: x, $\{K_1, K_2, ..., K_M\}$ üzerinde $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(M)}$ dizilerinin M-spliced dizisi olsun. Burada $i = 1, 2, ..., M$ için $x^{(i)} = \left(x_k^{(i)}\right)$ dizisi, her $k \in \mathbb{N}$

için $x_k^{(i)} = \alpha_i$ biçimindedir. Dolayısıyla hipotezden x, F ye A-dağılımsal yakınsaktır. X, bir Hausdorff topolojik uzayı olduğundan sabit bir i için $\alpha_i \in U_i$ ve $j \neq i$ koşulunu sağlayan j için $\alpha_j \notin U_i$ olacak biçimde açık bir U_i kümesi vardır. $F(U_i) = p_i$ olduğundan Teorem 5.1. gereğince

$$\liminf_n \sum_{k:x_k \in U_i} a_{nk} \geq p_i$$

elde edilir. Buradan

$$\liminf_n \sum_{k \in K_i} a_{nk} \geq p_i \tag{5.1}$$

olur.

Şimdi $V_i = \{\alpha_i\}$ olsun. X, Hausdorff topolojik uzayı olduğundan V_i, kapalı ve ayrıca $\alpha_i \in V_i$ ve $j \neq i$ olacak biçimdeki her j için $\alpha_j \notin V_i$ iken $F(V) = p_i$ olur. Burada X uzayının en az iki farklı noktaya sahip olduğunu ve α_i lerin farklı olduğunu kullanıyoruz. Böylece Teorem 5.1. gereğince

$$\limsup_n \sum_{k:x_k \in V_i} a_{nk} \leq p_i$$

elde edilir. Buradan

$$\limsup_n \sum_{k\in K_i} a_{nk} \leq p_i \tag{5.2}$$

bulunur. Dolayısıyla (5.1) ve (5.2) eşitsizliklerinden

$$p_i \leq \liminf_n \sum_{k\in K_i} a_{nk} \leq \limsup_n \sum_{k\in K_i} a_{nk} \leq p_i$$

elde edilir. O halde $\delta_A(K_i)$ mevcut ve p_i değerine eşittir. ■

Bilindiği gibi regüler bir toplanabilme matrisi ile tanımlanan yoğunluk, sigma toplamsallık özelliğine sahip değildir. Sıradaki sonuç sonsuz bir parçalanışın yoğunluğunun sigma toplamsallığı ile ilgilidir.

Teorem 5.3. X, Hausdorff topolojik uzayı, $A = (a_{nk})$ satır toplamları 1 olan negatif olmayan regüler bir matris ve $\{K_i = \{V_i(j)\} : i \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N}$ kümesinin bir sonsuz parçalanışı olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\delta_A(K_i)$ mevcut $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ olacak biçimde $i \in \mathbb{N}$ için $p_i \in [0,1]$ mevcut ve $\alpha_1, \alpha_2, ...$ limit noktalarına sahip $\{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ üzerindeki her ∞-spliced dizisi, her $G \in \sigma(\tau)$ için

$$F(G) = \sum_{\alpha_i \in G} p_i$$

biçiminde tanımlanan $F : \sigma(\tau) \longrightarrow [0,1]$ dağılım fonksiyonuna A-dağılımsal yakınsaktır.

İspat. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\delta_A(K_i)$ mevcut olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için $p_i = \delta_A(K_i)$ alalım öyle ki

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i$$

gerçeklensin. x, $\{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ üzerinde $\alpha_1, \alpha_2, ...$ limit noktalarına sahip $x^{(1)}, x^{(2)}, ...$ dizilerinin herhangi bir ∞-spliced dizisi ve V, kapalı bir küme olsun.

$Durum\ 1$: Her $i \in \mathbb{N}$ için $\alpha_i \notin V$ ise $F(V) = 0$ ve

$$\sum_{k:x_k \in V} a_{nk} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{k \,:\, x_k \in V \\ k \in K_i}} a_{nk} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j:x_j^{(i)} \notin V^C} a_{n,v_i(j)}$$

elde edilir. $f_n(i) := \sum_{j:x_j^{(i)} \notin V^C} a_{n,v_i(j)}$ ve $g_n(i) := \sum_{k \in K_i} a_{nk}$ olsun. Bu durumda her $i \in \mathbb{N}$ için

$$g(i) := \lim_n g_n(i) = \lim_n \sum_{k \in K_i} a_{nk} = \delta_A(K_i) \tag{5.3}$$

olur. μ, $\mathbb{N}$ üzerinde sayma ölçüsü ise [11] deki gibi

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_{\mathbb{N}} g_n(i)\, d\mu &= \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k \in K_i} a_{nk} \\
&= \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \\
&= 1 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} g_i \\
&= \int_{\mathbb{N}} g(i)\, d\mu
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|f_n(i)| = \sum_{j:x_j^{(i)} \notin V^C} a_{n,v_i(j)} = \sum_{\substack{k \,:\, x_k \notin V^C \\ k \in K_i}} a_{nk} \leq \sum_{k \in K_i} a_{nk} = g_n(i) \tag{5.4}$$

olur. Bu durumda (5.3), (5.4) ve Lebesgue yakınsaklık teoremi gereğince

$$\begin{aligned}\lim_n \sum_{k:x_k\in V} a_{nk} &= \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j:x_j^{(i)}\notin V^C} a_{n,v_i(j)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_n \sum_{j:x_j^{(i)}\notin V^C} a_{n,v_i(j)}\end{aligned} \tag{5.5}$$

bulunur. $x^{(i)}$, α_i değerine yakınsak olduğundan $\sum\limits_{j:x_j^{(i)}\notin V^C} a_{n,v_i(j)}$ toplamı sonlu sayıda terimden oluşur. Diğer taraftan A regüler olduğundan her j için $\lim\limits_n a_{n,v_i(j)} = 0$ olur. Böylece (5.5) eşitliğinden

$$\lim_n \sum_{k:x_k\in V} a_{nk} = 0$$

olup buradan

$$\limsup_n \sum_{k:x_k\in V} a_{nk} = 0 = F(V)$$

elde edilir.

Durum 2 : $\{m(t)\}_{t=1}^{\infty} \cup \{l(t)\}_{t=1}^{\infty} = \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha_{m(1)}, \alpha_{m(2)}, ... \in V$ ve $\alpha_{l(1)}, \alpha_{l(2)}, ... \notin V$ ise bu durumda $F(V) = \sum\limits_{t=1}^{\infty} \delta_A\left(K_{m(t)}\right)$ ve

$$\begin{aligned}\sum_{k:x_k\in V} a_{nk} &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\substack{k\,:\,x_k\in V \\ k\in K_{m(t)}}} a_{nk} + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\substack{k\,:\,x_k\in V \\ k\in K_{l(t)}}} a_{nk} \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\substack{k\,:\,x_k\in V \\ k\in K_{m(t)}}} a_{nk} + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j:x_j^{(l(t))}\in V} a_{n,v_{l(t)}(j)} \\ &\le \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k\in K_{m(t)}} a_{nk} + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j:x_j^{(l(t))}\in V} a_{n,v_{l(t)}(j)}\end{aligned} \tag{5.6}$$

gerçeklenir. $f_n(t) := \sum_{k\in K_{m(t)}} a_{nk}$ ve $g_n(t) := \sum_{k\in K_t} a_{nk}$ olsun. Bu durumda her $t\in\mathbb{N}$ için

$$g(t) := \lim_n g_n(t) = \lim_n \sum_{k\in K_t} a_{nk} = \delta_A(K_t)$$

olur. Birinci durumda olduğu gibi μ, sayma ölçüsü ise

$$\lim_n \int_{\mathbb{N}} g_n(t)\, d\mu = \lim_n \int_{\mathbb{N}} g(t)\, d\mu$$

elde edilir.

$$|f_n(t)| = \sum_{k\in K_{m(t)}} a_{nk} \leq \sum_{k\in K_{m(t)}} a_{nk} + \sum_{k\in K_{l(t)}} a_{nk} = \sum_{k\in K_t} a_{nk} = g_n(t)$$

olduğundan Lebesgue yakınsaklık teoremi gereğince

$$\begin{aligned}\lim_n \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k\in K_{m(t)}} a_{nk} &= \sum_{t=1}^{\infty} \lim_n \sum_{k\in K_{m(t)}} a_{nk}\\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \delta_A\left(K_{m(t)}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca birinci durumda olduğu gibi Lebesgue yakınsaklık teoremi, $x^{(i)}$ dizisinin yakınsaklığı ve A matrisinin regülerliği kullanılarak (5.6) eşitsizliğinin sağ tarafının ikinci parçasının $n\to\infty$ iken sıfıra gittiği kolaylıkla görülür. Dolayısıyla

$$\limsup_n \sum_{k:x_k\in V} a_{nk} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \delta_A\left(K_{m(t)}\right) = F(V)$$

elde edilir.

$Durum\ 3$: Her $i\in\mathbb{N}$ için $\alpha_i\in V$ ise $F(V)=1$ ve (5.2.) deki gibi

$$\limsup_n \sum_{k:x_k\in V} a_{nk} \leq F(V)$$

olur. Dolayısıyla herhangi bir kapalı V altkümesi için

$$\limsup_n \sum_{k:x_k\in V} a_{nk} \leq F(V)$$

olur. Böylece Teorem A gereğince x dizisi, F ye A-dağılımsal yakınsaktır.

Şimdi de yeterliliği ispat edelim. M, sabit pozitif bir sayı, $i = 1, 2, ..., M$ için $\alpha_i \in X$, $i = 1, 2, ..., M-1$ için $x^{(i)}$ yakınsak bir dizi ve $i < M$ için α_M, α_i den farklı olmak üzere $i = M, M+1, ...$ için $x^{(i)} = (\alpha_M, \alpha_M, ...)$ olsun. Bu durumda hipotezden $\{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ üzerinde $x^{(1)}, x^{(2)}, ...$ dizilerinin herhangi bir ∞-spliced dizisi olan x dizisi, her $G \in \sigma(\tau)$ için

$$F_M(G) = \sum_{\alpha_i \in G} p_i$$

olacak biçimdeki $F_M : \sigma(\tau) \longrightarrow [0,1]$ dağılım fonksiyonuna A-dağılımsal yakınsaktır. Diğer taraftan $p_M^* = 1 - \sum_{i=1}^{M-1} p_i$ olmak üzere

$$\sum_{\alpha_i \in G} p_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq M-1 \\ \alpha_i \in G}} p_i & , \alpha_M \notin G \\ \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq M-1 \\ \alpha_i \in G}} p_i + \sum_{i=M}^{\infty} p_i & , \alpha_M \in G \end{cases}$$
$$= \sum_{\substack{1 \leq i \leq M-1 \\ \alpha_i \in G}} p_i + I_{\{\alpha_M \in G\}} p_M^*$$

gerçeklenir. Şimdi $\mathbb{N}$ kümesinin bir sonlu parçalanışı

$$\left\{ K_1, K_2, , , K_{M-1}, K = \bigcup_{j=M}^{\infty} K_j \right\}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $\{K_1, K_2, , , K_{M-1}, K\}$ üzerinde $x^{(1)}, x^{(2)}, ...$ dizilerinin M-spliced dizisi yine x dizisidir. x, F_M ye A-dağılımsal yakınsak olduğundan 5.2. den her $i = 1, 2, ...M-1$ için $\delta_A(K_i)$ mevcut ve p_i değerine eşittir. M keyfi olduğundan her $i \in \mathbb{N}$ için $\delta_A(K_i)$ mevcut ve $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_A(K_i)$ olur. ■

KAYNAKLAR

[1]. Bartoszewicz, A., Das, P. and Glab, S. *On matrix summability of spliced sequences and A-density*. Linear Algebra Appl., **2015**, 487, 22-42.

[2]. Billingsley, P. Convergence of probability Measure, Wiley, New York, **1968**.

[3]. Boos, J. *Classical and Modern Methods in Summability*. Oxford univ. Press, UK., **2000**.

[4]. Bose, K. and Sengupta, S. *A note on spliced sequences and A-density of points with respect to a non-negative matrix*, Kyungpook Math. J., **2019**, 59, 47-63.

[5]. Bose, K., Das, P. and Sengupta, S., *On spliced sequences and the density of points with respect to a matrix constructed by using a weight function*, Ukrainian Math. J., **2020**, 71, 1359-1378.

[6]. Connor, J. S. *On strong matrix summability with respect to a modulus and statiscial convergence*. Canad Math. Bull, **1989**, 32, 194-198.

[7]. Das, P., Bose, K. and Sengupta, S. *On IA-density of points and some of its consequences*. Filomat, **2017**, 31, 6585-6595.

[8]. Freedman, A. R. and Sember, J. J. *Densities and summability*. Pacific J. Math, **1981**, 95, 293-305.

[9]. Kolk, E. *Matrix summability of statistically convergent sequences*. Analysis, **1993**, 13, 194-198.

[10]. Osikiewicz, J.A. *Summability of matrix submethods and spliced sequences.* Thesis (Ph.D.)-Kent State University, 1997.

[11]. Osikiewicz, J.A. *Summability of spliced sequences.* Rocky Mountain J. Math, **2005**, 35, 977-996.

[12]. Rhoades, B.E. *Some properties of totally coregular matrices.* Illinois J. Math., **1960**, 4, 518-525.

[13]. Steinhaus, H. *Sur a convergence ordinaire etta convergence asymptotique*. Colloq. Math., **1951**, 2, 73-74.

[14]. Ünver, M., Khan, M.K. and Orhan, C. *A-distributional summability in topological spaces.* Positivity, **2014**, 18, 131-145.

[15]. Wilansky, A. *Summabiliy through Functional Analysis, Notas de Matemática.North-Holland*, Amsterdam-New York-Oxford, 1984.

[16]. Yurdakadim, T. and Ünver, M. *Some results concerning the summability of spliced sequences.* Turk. J. Math. **2016**, 40, 1134-1143.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Kemal FİDAN
Doğum Yeri	Karapınar
Doğum Tarihi	...
Uyruğu	Türkiye
Telefon	...
E-Posta Adresi	...
Web Adresi	...

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2006

Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	2021