T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM-LIOUVILLE HİPERGRUPLARI

FATMA KARACA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
HAZİRAN - 2012

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM-LIOUVILLE HİPERGRUPLARI

FATMA KARACA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Prof.Dr.MAHİR KADAKAL

KIRŞEHİR
HAZİRAN - 2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof.Dr.Vagif Sabır GULİYEV
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Prof.Dr.Mahir KADAKAL
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Prof.Dr.Ayhan ŞERBETÇİ
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç.Dr.Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu tezimizde, yarı aralık üzerinde ve kapalı aralıklar üzerinde bir boyutlu hipergruplar oluşturulmuştur. Aralığın kapalı olduğu duruma karşılık gelen sonuçlar ve yarı aralık olduğu durumda da bazı yorumlar ele alınmıştır. $\mathbb{R}_+$ üzerinde bilinen bütün hipergrup örnekleri $\mathbb{R}_+$ üzerindeki Sturm Liouville(S-L) sınır değer problemlerinden elde edilmektedir, elde edilen çözümler oluşturulmuş olan hipergrupların karakteristikleri ile çakışmaktadır. Bu yöntemde ortaya çıkan konvolüsyon Sturm Liouville operatörünün tanımındaki fonksiyona bağlıdır. $\mathbb{R}_+$ üzerinde klasik Sturm Liouville konvolüsyonları ile işlem yapmak için konvolüsyonun geometrik cebirsel özellikleri uygundur.

ABSTRACT

In this thesis, which has four section, one dimensional hypergroups on the half line and on the compact intervals will be constructed. We shall perform the construction in some details on the half line and only quote the corresponding results for the compact case. It turns out that all known examples of hypergroups on $\mathbb{R}_+$ arise from Sturm Liouville(S-L) boundary value problems over $\mathbb{R}_+$ where the solutions coincide with the characters of hypergroup being constructed. The convolutions generated in this way clearly depend on the function defining the underlying Sturm Liouville operator. Its geometric algebraic properties are suitable means to classify Sturm Liouville convolutions on $\mathbb{R}_+$.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı öneren, yönlendiren ve her daim desteğini esirgemeyen, çok kıymetli zamanını bana ayırarak engin bilgisinden istifade ettiğim saygı değer danışman hocam Prof.Dr.Mahir KADAKAL'a ve ayrıca yardımlarıyla her zaman yanımda olan kıymetli hocalarım Prof.Dr.Vagif S. GULİYEV ile Yrd.Doç.Dr.Ali AKBULUT'a ve matematik bölümündeki herbir hocama sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca her türlü fedakarlığı benden esirgemeyen muhterem anne ve babama ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathscr{C}(X)$: X kümesinin boş olmayan kompakt alt kümesi

$f * g$: f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu

$B^{+}(K)$: K üzerinde $[0,\infty]$ aralığındaki Borel ölçülebilir fonksiyonları kümesi

$Res_{\mathbb{R}_{+}^{\times}} A$: A kümesinin $\mathbb{R}_{+}^{\times}$ e kısıtlaması

$supp(\mu) := \{x \in K : x \in N_x \in T, \mu(N_x) > 0\}$

$suppf(x) := \overline{\{x \in K : f(x) \neq 0\}}$

$\Upsilon(K)$: K kümesindeki sürekli çarpımsal fonksiyonların kümesi

$\mathbb{Z}_{+}$:=$\{0, 1, 2, ...\}$

$(\mu * f)(x) := \int_K f(y^{-} * x)\mu(dy)$

$(f * \mu)(x) := \int_K f(x * y^{-})\mu(dy)$

μ^{-} : μ nin involüsyonu

$T^{x} f(y) := \int_K f(z)(\varepsilon_x * \varepsilon_y)(dz)\ \forall x, y \in K$

$C(K) := \{f : K \to \mathbb{C} : f-$ sürekli $\}$ (K kümesindeki sürekli fonksiyonlar kümesi)

$C_c(K) := \{f \in C(K) : suppf\ \ kompakt\}$(K kümesindeki sürekli fonksiyonlar kümesi)

$C_b(K) := \{f \in C(K) : \exists M > 0, \forall x \in K,\ |f(x)| \leq M\}$ (K kümesindeki sınırlı sürekli fonksiyonlar kümesi)

$C_0(K) := \{f \in C(K) : \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ (K kümesinde ∞ da 0'a yakınsak sürekli fonksiyonlar kümesi)

$M^{1}(\mathbb{R}_{+})$: $\mathbb{R}_{+}$ üzerindeki olasılık ölçüsü

$M(K) := \{\mu : \mu-$radon ölçüsü$\}$(K kümesindeki radon ölçüleri)

$M^{b}(K) := \{\mu \in M(K) : \|\mu\| < \infty\}$ (K kümesindeki sınırlı radon ölçüleri)

$M^1(K) := \{\mu \in M(K) : \|\mu\| = 1; \mu \geq 0$ (Olasılık fonksiyonu)

Sturm-Liouville : S-L

Chébli-Triméche : C-T

1 GİRİŞ

Hipergruplar teorisi analizde önemli bir yeri olan topolojik vektör uzaylarında önemli bir yere sahiptir.

Hipergruplar teorisinde örnekleri olarak birkaç diferansiyel operatörün aynı zamanda Sturm-Liouville operatörünün doğurduğu Sturm-Liouville Hipergrupları Harmonik Analizin uygulamalarında önemli bir yer tutmaktadır.

Harmonik Analizde Sturm-Liouville Hipergrupları ile ilgili bir çok problemi Sturm-Liouville Hipergrupları analizi etrafında bilimsel olarak oluşturulmasına imkan vermektedir.

Sturm-Liouville fonksiyonları

$$A := \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

dönüşümünde $A \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, her $x \in \mathbb{R}_+^{\times}$ için $A(x) > 0$ ve $Res_{\mathbb{R}_+^{\times}} A \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R}_+^{\times})$ olmak üzere tanımlanmaktadır.

Sturm-Liouville Hipergrupları Walter R. Bloom ve Herbert Heyer [1], Zeuner Hm. [2] ([3], [4], [5], [6]) gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Bu tezde Sturm-Liouville Hipergrupları tanıtılarak uygulamalarına ilişkin bazı örnekler verilecektir.

Tez dört bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde ileride kullanacağımız bazı temel tanım, teorem, lemma ve önermeler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Sturm-Liouville Hipergrupları ve uygulamaları hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde Sturm-Liouville Hipergruplarına ait bazı örnekler verilmiştir.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde ileride kullanacagımız bazı temel tanım, teorem, lemma ve önermeler verilmistir.

Tanım 2.1 X hausdorf uzay olsun. $\forall x \in X$, $\exists K \in \mathcal{N}(x)$ K kompakt ise X hausdorff uzayına local kompakt hausdorff uzay denir.

Tanım 2.2 $(G, .)$ local kompakt topolojik grup olsun. G nin kompakt alt kümelerinin doğurduğu sigma cebiri $\mathcal{B}$ olsun.

i) $g \in G$, $E \in \mathcal{B}$, $\mu(gE) = \mu(E)$

ii) $\forall K \in \mathcal{B}$ kompakt $\mu(K) < \infty$

iii) $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ açık}\}$

iv) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ kapalı}\}$

olacak şekilde tanımlanan μ ölçüsüne Haar ölçüsü denir.

Tanım 2.3 X bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$, $x \neq y$ için x ve y yi birbirinden ayıran ayrık açık kümeler varsa X e Hausdorf uzay denir.

Tanım 2.4 K boş olmayan lokal kompakt Hausdorf uzayı olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa, $(M^b(K), +, *)$ üçlüsü bir Hipergrup olarak adlandırılacaktır.

HG 1) $(M^b(K), +)$ vektör uzayı ikinci işlem olan $*$ ı bir cebir olarak kabul ediyor.

HG 2) $x, y \in K$ verilsin, $\epsilon_x * \epsilon_y \in M^1(K)$ ve $supp(\epsilon_x * \epsilon_y)$ kompakttır.

HG 3) $K \times K$ dan $M^1(K)$ ya olan $(x, y) \to \epsilon_x * \epsilon_y$ dönüşümü süreklidir.

HG 4)

$$K \times K \to \mathscr{C}(X)$$
$$(x, y) \to supp(\epsilon_x * \epsilon_y)$$

dönüşümü süreklidir.

HG 5)Her $x \in K$ için $\epsilon_e * \epsilon_x = \epsilon_x * \epsilon_e = \epsilon_x$ olacak şekilde K nın mutlaka tek bir e elemanı vardır.

HG 6) Her $x, y \in K$ için $(\epsilon_x * \epsilon_y)^- = \epsilon_y^- * \epsilon_x^-$ olacak şekilde mutlaka bir tek involüsyon (Her $x \in K$ için $(x^-)^- = x$ özelliği ile kendi üzerine K nın $x \to x^-$ homeomorfizmi) vardır, burada μ^- involüsyon altında μ nün görüntüsünü gösterir.

HG 7) $x, y \in K$ için $e \in supp(\epsilon_x * \epsilon_y) \Leftrightarrow x = y^-$.

Tanım 2.5 En az biri σ-sonlu olan $f, g \in B(K)$ için K üzerinde $f * g$ konvolüsyonu

$$(f * g)(x) := \int_K f(x * y) g(y^-) \omega_K(dy) = \int_K (T * f) g^- d\omega_K$$

ile tanımlanır.

Eğer hemen hemen her yerde $f = f'$, local olarak hemen hemen her yerde $g = g'$ ve f σ-sonlu ise o halde her yerde $f * g = f' * g'$ olduğu anlamda bu konvolüsyonunun iyi tanımlanmış olduğunu araştırmak zor değildir. Not edelim ki, eğer f veya g σ-sonlu ve eğer (f_n) , (g_n) sırasıyla f ve g ye yakınsayan $B^+(K)$ da azalmayan diziler ise o halde $f_n * g_n \to f * g$ dir. Eğer $(|f| * |g|)(x)$ $[0, \infty)$ da varsa o halde $(f * g)(x)$ vardır, ve $|(f * g)(x)| \leq (|f| * |g|)(x)$ dir.

Tanım 2.6 μ, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ cebiri üzerinde bir ölçü X de hausdorff uzay olsun.

i) $B \in \mathcal{B}$, $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ kompakt}\}$

ii) $\forall x \in X, \quad \exists N \in \mathcal{N}(x), \quad \mu(N) < \infty,$

yukarıdaki şartlar sağlanıyorsa μ ye Radon ölçüsü denir.

Tanım 2.7 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

fonksiyonu

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ özeliklerini sağlarsa

bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonu veya kısaca ölçü adı verilir.

Tanım 2.8 İnvolüsyonu özdeşlik dönüşümü olan bir hipergrup Hermitian olarak adlandırılır. Her Hermitian hipergrubun değişmeli olduğunu

$$\epsilon_x * \epsilon_y = (\epsilon_x * \epsilon_y)^- = \epsilon_{y^-} * \epsilon_{x^-} = \epsilon_y * \epsilon_x$$

eşitliğinden görmek kolaydır.

Tanım 2.9 $\forall x \in X$, $f : X \to Y$, $f(f(x)) = x$ ise o halde f bir involüsyondur.

Tanım 2.10 Circle grup, tam değeri 1 olan bütün kompleks sayıların çarpım grubudur, $\mathbb{T}$ ile gösterilir.Örneğin; kompleks düzlemdeki birim daire.

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Tanım 2.11 Eğer $\forall \mu, \nu \in M^b(K_1)$ için

$$\tau(\mu * \nu) = \tau(\mu) * \tau(\nu)$$

ve

$$\tau(\mu^-) = \tau(\mu)^-$$

ve $\forall x \in K_1$ için $\tau(\varepsilon_x)$ bir nokta ölçüsü ise

$$\tau : M^b(K_1) \to M^b(K_2)$$

dönüşümü bir (hipergrup) homeomorfizm olarak adlandırılır. Eğer

$$\tau : M^b(K_1) \xrightarrow{1-1} M^b(K_1)$$

ise izomorfizm olarak adlandırılır.

Teorem 2.12 $f \in B(K)$ $x, y \in K$ için

$$f(x * y) := \int_K f d(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$$

integrali varsa f nin x ten y ye soldan dönüşümü

$$T^x f(y) = f(x * y)$$

ve f nin x ten y e sağdan dönüşümü

$$T_x f(y) = f(y * x).$$

Ayrıca

$$(T^x \mu)(f) = \mu(T^x f)$$

ve $\mu \in M(K)$ ve $\forall f \in C_c(K), x \in K$ için

$$(T_x \mu)(f) = \mu(T_x f).$$

Ayrıca $f \in C_c(K)$ iken

$$T^x f \in C_c(K)$$

olduğu kolayca görülür.

Lemma 2.13 Aşağıdakiler doğrudur.

i) $(x, y) \to f(x * y)$ dönüşümü $B(K \times K)$ ya aittir.

ii) Eğer $x, y \in K$ ve $|f|(x * y)$ sonlu ise $f(x * y)$ tanımlı olup

$$|f(x * y)| \leq |f|(x * y)$$

dir.

iii) $T^x f, T_x f \in B(K)$.

iv) $\int_K f d(\mu * \nu) = \int_K \int_K f(x * y)\mu(dx)\nu(dy)$.

v) $\int_K T^x f d\mu = \int_K f d(\varepsilon_x * \mu)$.

vi) $T^x f(y * z) = T_z f(x * y)$.

Tanım 2.14 $A, B \subset K$ için $A * B := \cup\{supp(\varepsilon_x * \varepsilon_y) : x \in A, y \in B\}$.

Önerme 2.15 $(A * B) \cap C \neq \emptyset \iff B \cap (A^- * C) \neq \emptyset$.

Önerme 2.16 $\mu, \nu \in M^b(K)$ verildiğinde

(i) $supp(\mu * \nu) \subset (supp(\mu) * supp(\nu))^c$

(ii) $supp(\mu * \nu) = (supp(\mu) * supp(\nu))^c \quad \mu, \nu \geq 0$

(iii)$supp(\mu * \nu) = supp(\mu) * supp(\nu) \quad \mu, \nu \in M_{c,+}(K)$ dir.

Tanım 2.17 $f, g \in B(K)$ için en az bir tanesi σ sonlu ise K kümesinde $f * g$ konvolüsyon tanımı

$$\begin{aligned}(f * g)(x) :&= \int_K f(x * y)g(y^-)\omega_K(dy) \\ &= \int_K (T^x f)g^- d\omega_K\end{aligned}$$

dır.

Lemma 2.18 $f, g \in B(K)$,$p, q \in [1, \infty]$ ile $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ ve $\|f\| < \infty$ ve $\|g\|_p < \infty$ olduğu farzedilsin. Bu durumda;
(i) $f * g^-$ süreklidir ve $\|f * g^-\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_p$ dir.

(ii)$1 < p < \infty$ iken $f * g^- \in C_0(K)$ dir.

(iii)$\|f\|_1 < \infty$ ve $\|g\|_p < \infty$ ise $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ dir.

Tanım 2.19 $\mu \in M^b(K)$ ve $f \in B(K)$,

(i)$(\mu * f)(x) := \int_K f(y^- * x)\mu(dy)$ ve

(ii)$(f * \mu)(x) := \int_K f(x * y^-)\mu(dy)$

Lemma 2.20 $\mu \in M^b(K)$ ve $f, g \in B(K)$ olsun.

(i)f, σ sonlu ise $\mu * f$ de σ sonludur.

(ii)$\|f\|_1 < \infty$ ise $(\mu * f)\omega_K = \mu * (f\omega_K)$.

(iii)$\|f\|_1 < \infty$ ise $\int_K (\mu * f) d\omega_K = \mu(K) \int_K f d\omega_K$.

(iv) f veya g den birisi σ sonlu ise $\int_K (\mu * f) g d\omega_K = \int_K f(\mu^- * g) d\omega_K$.

Önerme 2.21 (i) $f \in C_b(K), \quad \mu \in M^b(K)$ ise $\mu * f \in C_b(K)$ ve

$$\|\mu * f\|_\infty \leq \|\mu\| \|f\|_\infty$$

dir.

(ii)$f \in C_c(K), \quad \mu \in M(K)$ ise $\mu * f \in C(K)$ dir.

(iii)$f \in C_c(K), \quad \mu \in M_c(K)$ ise $\mu * f \in C_c(K)$ dir.

(iv)$f \in C_0(K), \quad \mu \in M^b(K)$ ise $\mu * f \in C_0(K)$ olup bu durumda
$\tau_\omega - \lim \mu = \mu \ \|\mu_1 * f - \mu * f\|_\infty \to 0$ dir.

Lemma 2.22 $\mu, \nu \in M^b(K)$ ve $f \in B(K)$,$\mu * f \in B(K)$ için

$$\int_K \mu^- * f d\nu = \int_K f d(\mu * \nu) = \int_K (f * \nu^-) d\mu$$

olup ayrıca

(i)$\mu * (\nu * f) = (\mu * \nu) * f$;

(ii)$\mu * (f * \nu) = (\nu * f) * \nu$;

(iii)$(\mu * f)^- = f^- * \nu^-$.

Teorem 2.23 $f \in B(K)$ olmak üzere
(i) $\alpha-$ düzgün sürekli ise $\epsilon > 0$ verildiğinde e nin ω açık komşuluğu varsa $x, y \in K$ ve $(\epsilon_x * \epsilon_{y^-})(W) > 0$ ve $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ dur.

(ii) $\beta-$ düzgün sürekli ise $\epsilon > 0$ ve $x_0 \in K$ iken x_0 ın U_{x_0} komşuluğu vardır öyleki $\forall x \in U_{x_0}$ için $\|T^x f - T^{x_0} f\|_\infty < \epsilon$.

(iii) $\gamma-$ düzgün sürekli ise $x, y \in K$ $(\epsilon_x * \epsilon_{y^-})(W) > 0$ olup $\|T^x f - T^y f\|_\infty < \epsilon$ olur.

Tanım 2.24 Eğer her kompakt $C \subset K$ ve her $k > 1$ için $n \to \infty$ iken $\omega_K(C^n) = \circ(k^n)$ elde edilirse o halde bir K hipergrubu subexponential büyüklüğe sahiptir.

Tanım 2.25 Eğer her kompakt $C \subset K$ için $n \to \infty$ iken $\omega_K(C^n) = O(n^k)$ şeklinde $k := k(C) \geq 0$ varsa o halde bir K hipergrubu polinomial büyüklüğe sahiptir.

Tanım 2.26 Eğer bir K hipergrubu subexponential büyüklüğe sahip değilse exponential büyüklüğe sahiptir.

Teorem 2.27 K, $A \in C^2(\mathbb{R}_+)$ Sturm-Liouville fonksiyonu ile $(\mathbb{R}_+, *(A))$ şeklinde bir Chébli- Trimèche hipergrubu olsun, ve π_k onun Plancherel ölçüsünü göstersin.

i) aşağıdaki durumlar denktir.

   a) K subexponential growth dır.
   b) $K^\wedge = supp(\pi_k)$
   c) $K^\wedge = \Upsilon_b(K)$
   d) $\rho = 0$
   e) $\rho > 1$ için K hipergrubu sıralama p nin Kunze-Stein özelliğini kabul etmez.

ii) $supp(\pi_k) = \mathbb{R}_+$

3 STURM-LIOUVILLE HİPERGRUPLARI VE UYGULAMALARI

Bu bölümde Sturm-Liouville Hipergrupları ve uygulamaları hakkında bilgi verilmiştir. Hipergrupların oluşturulmasında Sturm Liouville operatörünün temelini oluşturmak için ilk olarak Sturm Liouville fonksiyonlarının tanımlanması ile başlanmıştır.

Tanım 3.1 $A \in C(\mathbb{R}_+)$, her $x \in \mathbb{R}_+^{\times}$ için $A(x) > 0$ ve $Res_{\mathbb{R}_+^{\times}} A \in C^1(\mathbb{R}_+^{\times})$ olmak üzere Sturm Liouville fonksiyonları

$$A := \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

şeklinde dönüşümlerdir. $\alpha_0 \geq 0$, sıfırın bir komşuluğundaki her x için

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{\alpha_0}{x} + \alpha_1(x) \tag{3.1}$$

dir.

SL 1. aşağıdaki ilave şartlardan biri olur.

SL 1.1. (sıfırdaki singülerlik) $\alpha_0 \geq 0$ ve $\alpha_1 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, bir tek fonksiyon olan α_1 ($A(0) = 0$ olmasını işaret eder).
veya

SL 1.2. (sıfırdaki regülerlik) $\alpha_0 = 0$ ve $\alpha_1 \in C^1(\mathbb{R}_+)$ ($A(0) > 0$ olmasını işaret eder).

SL 2 $\beta(0) \geq 0$ özelliğini sağlayan $\beta \in C^1(\mathbb{R}_+)$ vardır, $\frac{A'}{A} - \beta$, $\mathbb{R}_+^{\times}$ üzerinde negatif değildir ve azalandır, ve $q := \frac{1}{2}\beta' - \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{A'}{2A}\beta$ $\mathbb{R}_+^{\times}$ üzerinde azalandır.

i) $\frac{A'(x)}{A(x)} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^{\times} = (0, \infty)$,

ii) $\frac{A'}{A} - \beta$, $\mathbb{R}_+^{\times}$ üzerinde azalan,

iii) $q := \frac{1}{2}\beta' - \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{A'}{2A}\beta$, $\mathbb{R}_+^{\times}$ üzerinde azalandır.

A üzerinde yukarıdaki kabuller istenen Sturm Liouville problemine götürür.

Uyarı 3.2 SL 1.1. kabulü A sadece ve sadece sıfırın bir komşuluğundaki her x için

$$A(x) := x^{\alpha_0} c(x)$$

olduğu durumda sağlanmaktadır, burada c, $c(0) > 0$ şartını sağlayan $C^\infty(\mathbb{R})$ sınıfından bir çift fonksiyondur.

Örnek 3.3 Ché*b*li-Trimé*c*he fonksiyonları aşağıdaki ilave kabulleri sağlayan SL 1.1. tipinin A Sturm-Liouville fonksiyonları olarak tanımlanmaktadır.

$$\frac{A'}{A} \geq 0$$

azalandır ve

$$\lim_{x\to\infty} A(x) = \infty$$

ile A artandır.

Bu durumda SL 2. $\beta := 0$ ile yerine gelmektedir.

Örnek 3.4 Levitian fonksiyonları $A \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ilave şartı ile SL 1.2. tipi olarak tanımlanmaktadır. Eğer $A'(0) \geq 0$ ve $q := \frac{1}{2}\beta' + \frac{1}{4}\beta^2$ azalan ($\beta := \frac{A'}{A}$) ise bir Levitian fonksiyonu A SL 2. yi sağlar.

Teorem 3.5 A uygun gelen bir β fonksiyonu ile SL 2. yi sağlayan bir Sturm Liouville fonksiyonu olsun. O zaman

$$\limsup_{x\to\infty} \beta(x) > -\infty$$

dır.

İspat. Aksini kabul edelim: Yani

$$\lim_{x\to\infty} \beta(x) = -\infty$$

sağlanacak şekilde her $x \in [x_0, \infty[$ için $P(x) < 0$ olacak şekilde $x_0 > 0$ vardır. Üstelik , $\delta_0^2 + 4q(x) > 0$ özelliğini sağlayan $\delta_0^2 > 0$ vardır ve $x \in [x_0, \infty[$ olduğu durumda

$$\frac{A'}{A}(x) < \beta(x) + \delta_0$$

dır. Ancak

$$\beta' + \frac{1}{2}\beta^2 + \delta_0\beta \leq \beta' - \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{A'}{A}\beta = 2q \leq 2q(x_0)$$

ve buradan

$$\beta' \leq 2q(x_0) - \frac{1}{2}\beta^2 - \delta_0\beta$$

dır. Bu ise $[x_1, \infty[$ aralığı üzerinde

$$\frac{1}{\gamma_0}(arcoth\frac{\beta+\delta_0}{\gamma_0})' = -\frac{\beta'}{(\beta+\delta_0)^2-\gamma_0^2} \geq \frac{1}{2}$$

olduğunu gösterir. Burada $x > x_1$ için $\beta(x) < -\delta_0 - \gamma_0$ olacak şekilde seçilir, ve

$$\gamma_0 := (4q(x_0)+\delta_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

dır. Sonuç olarak her $x > x_1$ için

$$0 > arcoth\frac{\beta(x)+\delta_0}{\gamma_0} \geq arcoth\frac{\beta(x_1)+\delta_0}{\gamma_0} + \frac{\gamma_0}{2}(x-x_1)$$

dır. Bu ise istenen çelişkidir. ■

Sonuç 3.6 Her $x \in \mathbb{R}_+^\times$ için

$$\left(\frac{A'(x)}{A(x)}\right)^2 + 2\beta'(x) \geq 0$$

dır.

İspat. $\mathbb{R}_+^\times$ üzerinde

$$\left(\frac{A'}{A}\right)^2 + 2\beta' = \left(\frac{A'}{A-\beta}\right)^2 + 4q$$

dır ve buradan

$$\left(\frac{A'}{A}\right)^2 + 2\beta'$$

elde edilir. Kabul edelim ki her $\epsilon > 0$ için x_0 vardır öyleki her $x \geq x_0$ için

$$\left(\frac{A'}{A}(x)\right)^2 + 2\beta'(x) < -\epsilon < 0$$

dır. O halde her $x > x_0$ için

$$\beta'(x) < -\frac{\epsilon}{2}$$

dır. Ancak buradan

$$\lim_{x\to\infty}\beta(x) = -\infty$$

bağıntısı elde edilir, bu ise çelişkidir.

SL 2. ve karşılık gelen β fonksiyonunu sağlayan bir Sturm-Liouville A fonksiyonu için azalan

$$\gamma := \left(\left(\frac{A'}{A}\right)^2 + 2\beta'\right)^{\frac{1}{2}}$$

fonksiyonlarını ve $\mathbb{R}_+^\times$ üzerinde $2\beta' = \gamma^2 - (\beta + \tilde{\alpha})^2$ ile ilişkili olan

$$\tilde{\alpha} := \frac{A'}{A} - \beta$$

fonksiyonlarını ortaya koyuyoruz. Üstelik

$$\rho' := \lim_{x\to\infty} (\gamma(x) - \tilde{\alpha}(x))$$

ve $\rho'' := \rho' \wedge 0$ dır. ■

Yukarıdaki gösterim biçiminden yararlanarak aşağdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.7 Aşağıdakiler geçerlidir.

i) $\mathbb{R}_+^\times$ üzerinde $\gamma - \tilde{\alpha} \geq \rho''$

ii) $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ve $c > -x_0$ vardır ve bu durumda $[0, x_0[$ üzerinde $-\gamma - \tilde{\alpha} < \rho''$ ve her $x \in [x_0, \infty[$ için

$$\beta(x) = \frac{2}{x + c} + \rho''$$

dür.

İspat.

i) $\rho' \geq 0$ için

$$0 \leq \rho' = \Big(\lim_{x\to\infty} \tilde{\alpha}(x)^2 + 4 \lim_{x\to\infty} q(x)\Big)^{\frac{1}{2}} - \lim_{x\to\infty} \tilde{\alpha}(x)$$

elde edilir. Buradan

$$q \geq \lim_{x\to\infty} q(x) \geq 0$$

dır ve böylece

$$\gamma - \tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}(x) + 4q)^{\frac{1}{2}} - \tilde{\alpha} \geq 0 = \rho''$$

bulunmuş olur. Eğer $\rho' < 0$ ise $q(x) \geq 0$ şartını sağlayan her $x \in \mathbb{R}_+^\times$ için

$$\gamma(x) - \tilde{\alpha}(x) \geq 0 > \rho''$$

elde edilir. $\{x \in \mathbb{R}_+^\times : q(x) < 0\}$ (boş olabilir) aralığı üzerinde $\gamma - \tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}^2 + 4q)^{\frac{1}{2}} - \tilde{\alpha}$ azalan olduğundan dolayı bu özellik her $x \in \mathbb{R}_+^\times$ için

$$\gamma(x) - \tilde{\alpha}(x) \geq \lim_{y\to\infty} (\gamma(y) - \tilde{\alpha}(y)) = \rho' = \rho''$$

olduğunu gösterir.

ii) $\rho' \geq 0$ durumunda

$$x_0 := \inf\{x \in \mathbb{R}_+^\times : -\gamma(x) - \tilde{\alpha}(x) = 0\} \qquad (\in \overline{\mathbb{R}}_+)$$

şeklinde seçilir. $-\gamma - \tilde{\alpha}$ fonksiyonu artan ve pozitif olmayan olduğundan

$$-\gamma(x) - \tilde{\alpha}(x) = \begin{cases} \rho_1(x) < \rho'' & x \in [0, x_0[\quad \text{ise} \\ 0 & x \in [x_0, \infty[\quad \text{ise} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $[x_0, \infty[$ aralığı üzerinde $\gamma = \tilde{\alpha} = 0 \quad 2\beta' + \beta^2 = 0$ sonucu elde edilir. Bunun çözümleri önermemizin ifadesinin β fonksiyonlarıdır.
$\rho' < 0$ olsun. $-\gamma - \tilde{\alpha}$

$$-\lim \gamma(x) - \lim \tilde{\alpha}(x) \leq \rho'$$

değerine doğru arttığından

$$-\gamma(x) - \tilde{\alpha}(x) = \begin{cases} \rho_2(x) < \rho' & x \in [0, x_0[\quad \text{ise} \\ \rho' & x \in [x_0, \infty[\quad \text{ise} \end{cases}$$

elde edilir. Burada

$$x_0 := \inf\{x \in \mathbb{R}_+^\times : -\gamma(x) - \tilde{\alpha}(x) = \rho'\} \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

dır. Bu eşitlik $[x_0, \infty[$ aralığı üzerinde γ $\tilde{\alpha}$ nın sabit olduğunu ve bundan dolayı $[x_0, \infty[$ üzerinde $\gamma = 0$ ve $\tilde{\alpha}(x) = -\rho'$ olduğunu gösterir.$[x_0, \infty[$ üzerinde çözümleri β olan

$$2\beta' + (\beta - \rho')^2 = 0$$

denklemi elde edilir.

Bu ise gösterilmesi istenen formdur. ■

Yukarıdakilerden yararlanarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.8 i) Her $x \in \mathbb{R}_+$ için $\beta(x) \geq \rho''$

ii) $\lim_{x\to\infty} \beta(x) = \rho'$

iii) $\lim_{x\to\infty} \beta'(x) = 0$

İspat.

i) Teorem 3.7 nın ii) şıkkından $x \in [x_0, \infty[$ olduğunda $\beta(x) \geq \rho''$ sonucu elde edilir. Enaz $x_1 < x_0$ için $\beta(x_1) \geq \rho''$ olduğunu göstermemiz bir çelişki verir. $\beta(0) \geq 0 \geq \rho''$ olduğundan Teorem 3.7 nin ii) şıkkının bir diğer uygulaması enaz $x_2 < x_1$ için

$$-\gamma(x_2) - \tilde{\alpha}(x_2) < \beta(x_2) < \rho''$$

olduğunu gösterir. Ortalama değer teoremini uygulayarak $\beta'(x_2) < 0$ elde edilir. Ancak, o zaman

$$-\gamma(x_2) - \tilde{\alpha}(x_2) < \beta(x_2) < \rho'' \leq \gamma(x_2) - \tilde{\alpha}(x_2)$$

olacağından $\beta'(x_2) \geq 0$ olur. Bu bir çelişkidir.

ii) $\epsilon > 0$, $x_1 \in \mathbb{R}_+^\times$ olsun ve $x_1 \in [x_1, \infty[$ üzerinde $\gamma - \tilde{\alpha} \leq \rho' + \frac{1}{2}\epsilon$ eşitsizliğini sağlasın. O halde $\beta(x) \geq \rho' + \epsilon$ ile her $x > x_1$ için

$$\beta(x) \geq \frac{\epsilon}{2} + \gamma(x) - \tilde{\alpha}(x)$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} 2\beta'(x) &= \gamma(x)^2 - (\beta(x) + \alpha^2(x))^2 \\ &\leq \gamma(x)^2 - (\frac{\epsilon}{2} + \gamma(x))^2 \\ &\leq -\frac{\epsilon^2}{4} \end{aligned}$$

dür ve böylece

$$\limsup_{x\to\infty} \beta(X) \leq \rho' + \epsilon$$

dur. $\rho' \leq 0$ iken bulmuş olduğumuz sonuç $\beta \geq \rho'' = \rho'$ olduğu durumda öne sürülen iddayı verir. $\rho' > 0$ olsun. $\beta(x) < \rho'$ ve her $x > 0$ için

$$\beta(x) \geq 0 > -\gamma(x) - \tilde{\alpha}(x)$$

elde edilir. Burada $0 = -\gamma(x) - \tilde{\alpha}(x)$ eşitliği Teorem 3.7 nın ii) şartı ile geçerli değildir. Sonuç olarak $\beta(x) < \rho'$ olduğunda $\beta'(x) > 0$ dır ve bundan dolayı

$$\liminf_{x\to\infty} \beta(x) \geq \rho'$$

dür.

iii) Bu limit

$$\lim_{x\to\infty} (\beta(x) - \gamma(x) + \tilde{\alpha}(x)) = 0$$

eşitliği ile birlikte her $x \in \mathbb{R}_+^\times$ için geçerli olan

$$2\beta'(x) = \gamma(x)^2 - (\beta(x) + \tilde{\alpha}(x))^2$$

eşitliğinden ortaya çıkar.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

$$\rho := \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{A'}{A}(x) = \frac{\rho'}{2} + \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \tilde{\alpha}(x) = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \gamma(x) \geq 0 \tag{3.2}$$

limiti vardır ve $\mathbb{R}_+^\times$ üzerinde

$$\frac{A'}{A} \geq 0 \tag{3.3}$$

elde ederiz ve özellikle

A, $\mathbb{R}_+$ üzerinde artandır. Aslında

$$\frac{A'}{A} \geq \min\left\{2\rho, \lim_{x\to\infty}\left(\frac{A'}{A}(x) - \beta(x)\right)\right\}$$

dir burada her $x \in \mathbb{R}_+^\times$ için ,

$$\begin{aligned}
\frac{A'}{A}(x) &= \tilde{\alpha}(x) + \beta(x) \\
&\geq \lim_{x\to\infty} \tilde{\alpha}(x) + \min\left\{\lim_{x\to\infty} \left(\gamma(x) - \tilde{\alpha}(x)\right), 0\right\} \\
&= \min\left\{\lim_{x\to\infty} \gamma(x), \lim_{x\to\infty} \tilde{\alpha}(x)\right\} \\
&= \min\left\{2\rho, \lim_{x\to\infty} \tilde{\alpha}(x)\right\} \geq 0
\end{aligned}$$

geçerlidir.

3.1 STURM-LIOUVILLE FONKSİYONLARI ÜZERİNDEKİ VARSAYIMLARIN TARTIŞMASI

Lemma 3.9 $SL2$ de tanımlanan β fonksiyonu tek değildir ve negatif olmayacak şekilde genelliği kaybetmeksizin seçilebilir. Aslında β $SL2$ yi sağlayan bir fonksiyondur ve $\epsilon > 0$ uygun şekilde seçilirse o halde $\beta + \epsilon$ da $SL2$ yi sağlar. Böylece

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{A'}{A}(x) - \beta(x)\right) = 0$$

varsayabiliriz. Ancak o zaman

$$\rho'' = \lim_{x\to\infty} \left(\gamma(x) - \tilde{\alpha}(x)\right) \geq 0$$

dır. Bundan dolayı $\rho'' = 0$ ve Teorem 3.8 in i) şıkkı gösteriyor ki $\beta \geq 0$.

Lemma 3.10 Eğer $x \to A(cx)(c \in \mathbb{R})$ fonksiyonları A nın tanım özelliklerini sağlamasının yanısıra, A nın sağladığı 3.1 ve $SL2$ yi de sağlarsa A Sturm-Liouville fonksiyonları skalar değişmezlerdir.

Lemma 3.11 A Sturm-Liouville fonksiyonları aşağıdaki anlamda öteleme invaryantıdır. Herhangi $x_0 \in \mathbb{R}_+^\times$ için $\mathbb{R}_+$ üzerinde $x \to A(x + x_0)$ fonksiyonu A nın sağladığı 3.1 ve $SL2$ nin yanısıra A nın tanım özelliklerini sağlar.

Şimdi $\mathbb{R}_+$ üzerinde Sturm-Liouville tip hipergrup yapıları tanıtacağız.

Tanım 3.12 Bir A Sturm-Liouville fonksiyonu verilsin. Bütün $f \in C^2(\mathbb{R}_+^\times)$ için $C^2(\mathbb{R}_+^\times)$ üzerinde L_A Sturm-Liouville operatörünü

$$L_A f := -f'' - \frac{A'}{A} f'$$

ile tanımlarız. Üstelik $C^2(\mathbb{R}_+^\times)$ üzerinde l diferensiyel operatörünü her $u \in C^2(\mathbb{R}_+^\times)$ için

$$\begin{aligned} l[u](x,y) &:= (L_A)_x u(x,y) - (L_A)_y u(x,y) \\ &= -u_{xx}(x,y) - \frac{A'}{A}(x) u_x(x,y) + u_{yy}(x,y) + \frac{A'}{A}(y) u_y(x,y) \end{aligned}$$

ile tanımlarız. Burada u fonksiyonunun alt indisleri alışılmış kısmı türevleri gösterir.

Tanım 3.13 Eğer $\mathbb{R}_+$ üzerinde herhangi bir reel değerli f fonksiyonu ile verilen bir Sturm-Liouville fonksiyonu A varsa yani her $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ için

$$u_f(x,y) := \int_{\mathbb{R}_+} f d(\epsilon_x * \epsilon_y)$$

ile tanımlanan u_f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir çift negatif olmayan C^∞-fonksiyonunun kısıtlamasıdır. Bu fonksiyon iki kere diferensiyellenebilir ve

$$l[u_f] = 0 \qquad (u_f)_y(x,0) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

parçalı diferensiyel denklemini sağlar.

A Sturm-Liouville fonksiyonu ile tanımlanan bir Sturm-Liouville hipergrubu $(\mathbb{R}_+, *(A))$ ile gösterilecektir. Eğer A Chebli-Trimeche fonksiyonu ise $(\mathbb{R}_+, *(A))$ hipergrubuna Chebli-Trimeche, eğer A Levitan fonksiyonu ise $(\mathbb{R}_+, *(A))$ hipergrubuna Levitan hipergrubu adı verilir.

Önerme 3.14 $(K, *)$ öklidyen topoloji ile sağlanan alt uzay ve $K := \mathbb{R}_+$ veya $[0,1]$ ile bir hipergrup olsun.O halde

i) $\mathbb{R}_+$ nın etkisiz elemanı 0 dır, ve $[0,1]$ ın etkisiz elemanı 0 yada 1 olabilir.

ii) K hermitiandır.

Sonuç 3.15 $K := \mathbb{R}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}_+$ veya $[0,1]$ ile herhangi bir $(K,*)$ hipergrubu değişmelidir.

Sonuç 3.16 $(\mathbb{R}_+, *(A))$ bir Sturm-Liouville hipergrubu olsun. Önerme 3.14 ve Sonuç 3.15 de verilen bir boyutlu hipergrupların genel özelliklerinden $y \in \mathbb{R}_+$ olduğunda $u_f(y,0) = u_f(0,y) = f(y)$ ve $(u_f)_x(y,0) = 0$ elde ederiz.

3.2 STURM-LIOUVILLE HİPERGRUPLARININ ÖZELLİKLERİ

Lemma 3.17 $(\mathbb{R}_+, *(A))$ nın bir Haar ölçüsü

$$W_{\mathbb{R}_+} := A\lambda_{\mathbb{R}_+}$$

ile verilir. Bir Sturm-Liouville hipergrubunun tanımından her $x, y \in \mathbb{R}_+^\times$ için

$$\int_0^y A(w)A(x)(u_f)_x(x,w)dw = \int_0^x A(y)A(v)(u_f)_y(v,y)dv$$

sonucu çıkar.

f enaz $a > 0$ için $supp(f) \subset [0,a]$ ile $\mathbb{R}$ üzerinde bir çift nonnegatif C^∞-fonksiyonunun kısıtlanması olan $\mathbb{R}_+$ üzerinde bir reel değerli fonksiyon olsun. O halde $x_0 > 0$ verildiğinde her $v \le x_0$ ve $y > x_0 + a$ için

$$supp(f) \cap supp(\epsilon_v * \epsilon_y) \subset [0,a] \cap [y-v, y+v] = \emptyset$$

elde edilir. Dolayısıyla $(u_f)(v,y) = 0$ dır ve sonuç olarak

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\int_0^y (f*\epsilon_x)(w)A(w)dw\right)\Bigg|_{x=x_0} &= \int_0^y (u_f)_x(x_0,w)A(w)dw \\ &= \frac{1}{A(x_0)}\int_0^{x_0} A(y)A(v)(u_f)_y(v,y)dv \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Bunun anlamı $\int_{\mathbb{R}_+}(f*\epsilon_x)(w)A(w)dw \quad x \in \mathbb{R}_+$ için

$$\int_{\mathbb{R}_+}(f*\epsilon_x)Ad\lambda_{\mathbb{R}_+} = \int_{\mathbb{R}_+} fAd\lambda_{\mathbb{R}_+}$$

dır. Ancak, bu $A\lambda_{\mathbb{R}_+}$ ölçümünün öteleme değişmezidir.

Lemma 3.18 $(\mathbb{R}_+, *(A))$ üzerindeki bir kompleks değerli φ fonksiyonu çarpımsaldır, ancak ve ancak ϕ

$$L_A\phi = s\phi \qquad s \in C, \qquad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Üstelik $s \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\phi := \phi_s$ çözümü her $x \in \mathbb{R}_+$ için

$$\phi(x^-) = \overline{\phi(x)}$$

eşitliğini sağlar. 3.4.2 Önermesinden $(\mathbb{R}_+, *(A))$ Hermitian olduğundan, bu özellik reel değerli olan ϕ ye denktir.

Yukarıdaki başlangıç değer probleminin herhangi bir çözümünün çarpımsal olduğu açıktır. Aksine, basit bir hesaplama $\mathbb{R}_+$ üzerindeki herhangi bir çarpımsal ϕ fonksiyonunun iki kere sürekli diferansiyellenebildiğini gösterir. Her $x, y \in \mathbb{R}_+^\times$ için

$$u_\phi := \phi(x)\phi(y)$$

şeklinde tanımlanan u_ϕ fonksiyonu

$$l[u] = 0, \;\; u_y(x, 0) = u_x(0, y) = 0$$

kısmı diferansiyel denkleminin çözümü olduğundan dolayı her $x, y \in \mathbb{R}_+^\times$ için

$$\left(\phi''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}\phi'(x)\right)\phi(y) = \phi(x)\left(\phi''(y) + \frac{A'(y)}{A(y)}\phi'(y)\right)$$

elde edilir ve dolayısıyla $x \in \mathbb{R}_+^\times$ olduğunda öyle $s \in \mathbb{C}$ vardır ki

$$\phi''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}\phi'(x) = -s\phi(x)$$

yada

$$L_A\phi(x) = -\phi''(x) - \frac{A'(x)}{A(x)}\phi'(x) = s\phi(x)$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Tanım 3.19 Chébli-Triméche hipergrupları Sturm-Liouville sınır değer problemleri ile ilişkili olan $(0, \infty)$ üzerinde hipergruplardır. A Sturm-Liouville operatörü

$$Lf = -\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{A'(x)}{A(x)}\frac{df}{dx}$$

ile tanımlanır, burada A fonksiyonu $\mu > -\frac{1}{2}$ ve B düzgün çift fonksiyon olduğunda

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{2\mu + 1}{x} + B(x)$$

şeklinde özelliğe sahiptir. Genelleştirilmiş öteleme operatörü hipergrupu $(0, \infty)$ üzerinde $T^y f(x) = u_f(x, y)$ ile tanımlanır, burada $u = u_f \;\; L_x u = L_y u$ yu tanımlar ve her x için $u(x, 0) = f(x)$, $u_y(x, 0) = 0$ dır.

3.3 CHÉBLI-TRIMÉCHE HİPERGRUPLARININ ÖRNEKLERİ

Örnek 3.20 Bessel-Kingman hipergrupları burada her $x \in \mathbb{R}_+$ ve enaz $a > 0$ için

$$A(x) := x^a$$

dır.

Örnek 3.21

$a > 0$ için ϵ_x ve ϵ_y Dirac ölçüleri arasındaki bir konvolüsyon

$$\epsilon_x * \epsilon_y := c_a \int_0^\pi \epsilon_{arcosh(\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \cos t)} \sin^{a-1} t dt$$

ile tanımlanır, burada $x, y \in \mathbb{R}_+$ ve

$$c_a := \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(a+1))}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}a)}$$

dır. $(\mathbb{R}_+, *)$ hiperbolik hipergrubunu

$$supp(\epsilon_x * \epsilon_y) = [|x-y|, x+y]$$

eşitliğini sağlayan $a > 0$ parametresi ile elde edilir, burada $x, y \in \mathbb{R}_+$ dır.

Örnek 3.21 nin hiperbolik hipergrupları burada bütün $x \in \mathbb{R}_+$ ve bazı $a > 0$ için

$$A(x) := \sinh^a x$$

dir.

3.4 LEVITIAN HİPERGRUPLARININ ÖRNEKLERİ

Örnek 3.22 $G//H$ hipergrubu $G := \mathbb{R} \bigodot \mathbb{Z}_2$ grubundan çıkmaktadır ve onun alt grubu $A \equiv 1$ ile $H := \mathbb{Z}_2$ dir.

Örnek 3.23 cosh hipergrupları burada her $x \in \mathbb{R}_+$ ve enaz $a > 0$ için

$$A(x) := \cosh^2 x$$

dir.

Örnek 3.24 Karesel hipergrup her $x \in \mathbb{R}_+$ için

$$A(x) := (1+x)^2$$

ile tanımlanır. (Zeuner(1992[2]), Örnek(4.10))

Sonuç 3.25 A Sturm-Liouville fonksiyonunun tanımının (Lemma(3.10) de tanımlandığı gibi) ölçüm dönüşümleri $\mathbb{R}_+$ üzerindeki hipergrup yapısını korur, A nın dönüşümleri Lemma (3.11) de tanımlandığı gibi) $(\mathbb{R}_+, *(A))$ nonizomorfik hipergruplarını verir. Bu ayrım Örnek (3.20) (a=2 için) ve Örnek (3.24) ile gösterilmiştir.

3.5 KONU İLE İLGİLİ BİR SINIR DEĞER PROBLEMİ

$\beta \quad C^1(\mathbb{R}_+)$ da keyfi bir fonksiyon olsun. $\mathbb{R}_+$ üzerinde B , $\tilde{A}$ ve $\tilde{\alpha}$ fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned} B(x) &:= \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x \beta(t)dt\right) \\ \tilde{A}(x) &:= \frac{A(x)}{B(x)^2}, \\ \tilde{\alpha}(x) &:= \frac{\tilde{A}'}{\tilde{A}}(x) = \frac{A'}{A}(x) - \beta(x) \end{aligned}$$

ile tanımlanır, burada $x \in \mathbb{R}_+$ dır. Üstelik, $C^2(\mathbb{R}_+^{\times 2})$ üzerinde $\tilde{l}$ kısmı diferensiyel operatör her $v \in C^2(\mathbb{R}_+^{\times 2})$ için

$$\begin{aligned} \tilde{l}[v](x,y) := v_{xx}(x,y) \,+\, \tilde{\alpha}(x)v_x(x,y) - q(x)v(x,y) - v_{yy}(x,y) \\ -\tilde{\alpha}(y)v_y(x,y) + q(y)v(x,y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır, burada yukarıda olduğu gibi

$$q := \frac{1}{2}\beta' - \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{A'}{2A}\beta$$

dır. Açıkça

$$v(x) := \beta(x)\beta(y)u(x,y)$$

olduğunda

$$\tilde{l}[v](x,y) = \beta(x)\beta(y)l[u](x,y)$$

dir. Sonuç olarak $x, y \in \mathbb{R}_+^\times$ için u

$$l[u] = 0, \quad u(x,0) = f(x) \quad u(0,y) = f(y) \quad u_x(0,y) = 0$$

sınır değer probleminin bir çözümüdür, ancak ve ancak v , $x, y \in \mathbb{R}_+^\times$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{l}(v) &= 0 \\
v(x,0) &:= B(x)f(x), \\
v_y(x,0) &:= \frac{1}{2}\beta(0)B(x)f(x), \\
v(0,y) &:= f(y), \\
v_x(0,y) &:= \frac{1}{2}\beta(0)B(y)f(y)
\end{aligned}$$

sınır değer probleminin bir çözümüdür. Sonuçta her $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ için

$$v_f(x,y) = B(x)B(y)u_f(x,y)$$

ile birbirleriyle ilişkili olan uygun başlangıç değer problemlerinin u_f ve v_f (kabul edilebilir bir f fonksiyonu için) çözümlerini göz önünde bulunduralım. $0 \leq y \leq x$ için

$$\Delta_{x,y} := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2 : \xi + \eta \leq x + y, \quad \xi - \eta \geq x - y\}$$

dır.

Lemma 3.26 $v \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$ verilsin. Her $0 \leq y \leq x$ için aşağıdaki integral denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(x)\tilde{A}(y)v(x,y) = {}& \frac{1}{2}\tilde{A}(0)(A(x-y)v(x-y,0) + \tilde{A}(x+y)v(x+y,0)) \\
&+ I_0 + I_1 + I_2 + I_3 - I_4
\end{aligned}$$

dür. Burada

$$\begin{aligned}
I_0 &:= \frac{\tilde{A}(0)}{2}\int_{x-y}^{x+y} \tilde{A}(\xi)v_y(\xi,0)d\xi \\
I_1 &:= \frac{1}{2}\int_0^y \tilde{A}(\xi)\tilde{A}(x-y+\xi)(\tilde{\alpha}(\xi) + \tilde{\alpha}(x-y+\xi))v(x-y+\xi,\xi)d\xi, \\
I_2 &:= \frac{1}{2}\int_0^y \tilde{A}(\xi)\tilde{A}(x+y-\xi)(\tilde{\alpha}(\xi) - \tilde{\alpha}(x+y-\xi))v(x+y-\xi,\xi)d\xi, \\
I_3 &:= \frac{1}{2}\int_{\Delta_{x,y}} \tilde{A}(\xi)\tilde{A}(\zeta)(q(\zeta) - q(\xi))v(\xi,\zeta)d\xi d\zeta, \\
I_4 &:= \frac{1}{2}\int_{\Delta_{x,y}} \tilde{A}(\xi)\tilde{A}(\zeta)\tilde{l}[v](\xi,\zeta)d\xi d\zeta,
\end{aligned}$$

dır. Bu denklem kısmı integrasyon ile $\tilde{l}[v]$ nın tanımından çıkmaktadır.

Lemma 3.27 Eğer u_f

$$l[u_f] = 0 \qquad u_f(x,0) = f(x), \qquad (u_f)_y(x,0) = 0 \qquad 0 \leq y \leq x$$

kısmı diferensiyel denkleminin bir çözümü ise o halde Lemma (3.26) deki integral denklemi

$$I_0 := \frac{A(0)\beta(0)}{4} \int_{x-y}^{x+y} \frac{A(\xi)}{B(\xi)} f(\xi) d\xi$$

olmakla beraber

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x)\tilde{A}(y)v_f(x,y) = & \frac{\tilde{A}(0)}{2}\left(\frac{A(x-y)}{B(x-y)}f(x-y) + \frac{A(x+y)}{B(x+y)}f(x+y)\right) \\ & + I_0 + I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Burada I_1 , I_2 ve I_3 , Lemma (3.26) de tanımlandığı gibidir.

Lemma 3.28 $f \in C_2(\mathbb{R}_+)$ olmak üzere u_f

$$l[u_f] = 0, \qquad x, y \in \mathbb{R}_+$$

i) $u_f(x,0) = u_f(0,x) = f(x)$,

ii) $(u_f)_y(x,0) = 0$,

iii) $(u_f)_x(0,y) = 0$

hiperbolik Cauchy probleminin çözümüdür.

Teorem 3.29 A (3.1) ve $SL2$ yi sağlayan bir Sturm-Liouville fonksiyonu olsun. Her $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ çift fonksiyonları için

$$u_f(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+} f d(\epsilon_x * \epsilon_y)$$

olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için

$$supp(\epsilon_x * \epsilon_y) \subset [|x-y|, x+y]$$

özelliğini sağlayan $\epsilon_x * \epsilon_y \in M^1(\mathbb{R}_+)$ vardır.

İspat. $f \geq 0$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir C^∞ çift fonksiyonunun $\mathbb{R}_+$ ya kısıtlaması olsun ve

$$v_f(x,y) := B(x)B(y)u_f(x,y)$$

olsun, burada SL_2 de tanımlanan β fonksiyonu için

$$B(x) := \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x \beta(x)dt\right)$$

dir. Her $x, y \in \mathbb{R}_+^2$ için $v_f(x,y) \geq 0$ olduğunu gösterelim. Bunu görmek için

$$\psi'' + \tilde{\alpha}\psi' - q\psi > 0, \psi(0) > 0 \quad ve \quad \psi' \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan $\psi \in C_2(\mathbb{R}_+)$ yı seçeriz. Her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $W = \psi(y)$ ile tanımlanmış olsun. O halde

$$\tilde{l}(w) < 0, \qquad w(x,0) > 0 \quad ve \quad w_y(x,0) \geq 0$$

dır. İddamızı kanıtlamak için bütün $\epsilon > 0$ için $v_f + \epsilon w > 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Varsayalım ki, Δ_{xy} üzerinde $\epsilon > 0$ ve

$$v_f(x,y) + \epsilon w(x,y) = 0$$

şeklinde $x \geq y > 0$ (yada alternatif olarak x<y) ve $v_f + \epsilon w \geq 0$ var olsun. Bu kabuller altında $\xi \in \mathbb{R}_+$ olduğunda Lemma (3.26) deki integral denkleminin sağ tarafındaki ilk toplam $f(\xi) \geq 0$ ve $w(\xi, 0) > 0$ olduğundan nonnegatiftir. Üstelik, her $\xi \in \mathbb{R}_+$ için

$$(v_f + \epsilon w)_y(\xi, 0) = \frac{\beta(0)}{2} B(\xi) f(\xi) + \epsilon w_y(\xi, 0) \geq 0$$

olduğundan $I_0 \geq 0$ elde ederiz. I_1 den I_4 e kadar olan integraller için ilk önce integrasyonun tanım kümesinde geçerli olan $v_f + \epsilon w \geq 0$ kabulünü göz önünde bulunduralım. Gerçekten $\tilde{\alpha} \geq 0$ dan $I_1 \geq 0$ sonucu çıkmaktadır, $I_2 \geq 0$, $\tilde{\alpha} > 0$ azalanının bir sonucudur, $I_3 \geq 0$ durumu q nun azalan olması ile ortaya çıkmaktadır ve

$$\tilde{I}[v_f + \epsilon w] = \epsilon \tilde{I}[w] < 0$$

eşitsizliğinden $I_4 < 0$ çıkmaktadır. Ancak o zaman Lemma (3.26) deki integral denklemi bir çelişki olan

$$0 = \tilde{A}(x)\tilde{A}(y)(v_y + \epsilon w)(x,y) \geq -I_4 \geq 0$$

sonucunu vermektedir. Sabit $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $f \to u_f(x,y)$ dönüşümünün $C^b(\mathbb{R}_+)$ nın bir yoğun D alt uzayı üzerinde bir pozitif lineer fonksiyonel olduğunu gösteriyoruz. Böylece her $f \in D$ için

$$u_f(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+} f d(\epsilon_x * \epsilon_y)$$

eşitliğini sağlayan $\epsilon_x * \epsilon_y \in M_+^b(\mathbb{R}_+)$ vardır. $f := 1_{\mathbb{R}_+}$ için $u_f = I_{\mathbb{R}_+^2}$ elde ettiğimizden her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $\epsilon_x * \epsilon_y \in M^1(\mathbb{R}_+)$ durumu olmalıdır. $(x,y) \in \mathbb{R}_+$ elemanlarına bakarak u_f fonksiyonunun diferansiyel denklemi sağlamasından dolayı u_f için

$$supp(\epsilon_x * \epsilon_y) \subset [|x-y|, x+y]$$

olduğunu görürüz. ■

Sonuç 3.30 Teorem (3.29) ün özellikleri ile $\epsilon_x * \epsilon_y$ olasılık ölçüsünün varlığı belirlendiği zaman, $\mathbb{R}_+$ üzerinde herhangi local sınırlı fonksiyon için tanımlanan

$$\nu_f(x,y) := B(x)B(y) \int_{\mathbb{R}_+} f d(\epsilon_x * \epsilon_y)$$

ifadesinin Lemma (3.27) deki integral denklemini sağladığı gösterilebilir. İspat, eğer $(f_n)_{n\geq 1}$ uygun anlamda f e, birincisinde keyfi sürekli f fonksiyonlarına, daha sonra yarı sürekli olanlarına ve en sonunda tüm yerel sınırlı fonksiyonlara yakınsarsa $(v_{f_n})_{n\geq 1}$ dizisi v_f e yakınsadığından integral denklemi $\mathbb{R}_+$ üzerindeki bütün yerel sınırlı f fonksiyonlarına genişletilebileceği gerçeğine dayanmaktadır.

$x, y \in \mathbb{R}_+$ için $\epsilon_x * \epsilon_y$ ölçüsünün desteği ile ilgili bir detaylı bir çalışma Zeuner 1992[2] tarafından Önerme (3.9) da verilmiştir.

Lemma 3.31 A, (3.1) ve β, q fonksiyonları ile tanımlanan $SL.2$ yi sağlayan bir Sturm-Liouville fonksiyonu olsun, daha önceden seçilmiş olan

$$\tilde{\alpha} := \frac{A'}{A} - \beta$$

ifadesi sıfıra yakınsar.

$$x_0 := \sup\{x \in \mathbb{R}_+ : q(x) = q(0)\}$$

ve

$$x_1 := \inf\{x \in \mathbb{R}_+ : \tilde{\alpha}(x) = 0\}$$

genişletilmiş reel sayılarını tanımlarız. Daha sonra aşağıdaki durumlar gerçekleşir.

Sonuç 3.32 Eğer $x_0 = \infty$, $x_1 = 0$ ve $\beta(0) = 0$ ise o halde bütün $x, y \in \mathbb{R}_+$ için

$$supp(\epsilon_x * \epsilon_y) = \{|x-y|, x+y\}$$

dır.

Sonuç 3.33 Eğer $0 < x_0 < \infty$, $x_1 = 0$ ve $\beta(0) = 0$ ise o halde

$$supp(\epsilon_x * \epsilon_y) = \begin{cases} \{|x-y|, x+y\} & x+y \leq x_0 \quad \text{ise} \\ \{|x-y|\} \cup [2x_0 - x - y, x+y] & x, y < x_0 < x+y \quad \text{ise} \\ [|x-y|, x+y] & x \vee y \geq x_0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

Sonuç 3.34 Eğer $x_0 = \infty$, $0 < x_1 < \infty$ ve $\beta(0) = 0$ ise o halde

$$supp(\epsilon_x * \epsilon_y) = \begin{cases} [|x-y|, x+y] & x \wedge y \leq 2x_1 \quad \text{ise} \\ [|x-y|, 2x_1 + |x-y|] \cup [x+y-2x_1, x+y] & x \wedge y > 2x_1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

Sonuç 3.35 Eğer $x_0 < 3x_1 < x_0 < \infty$ ve $\beta(0) = 0$ ise o halde

$$supp(\epsilon_x * \epsilon_y) = \begin{cases} [|x-y|, x+y],\ x \wedge y \leq 2x_1 \text{ ise veya } x \vee y \geq x_0 - x_1 \text{ ise}, \\ [|x-y|, 2x_1 + |x-y|] \cup [x+y-2x_1, x+y],\ 2x_1 < x \wedge y \text{ ise} \\ \qquad \text{veya } x \vee y < x_0 - x_1 \text{ ise}, \end{cases}$$

Sonuç 3.36 Eğer $x_0 \leq 3x_1$ veya $\beta(0) > 0$ ise o halde bütün $x, y \in \mathbb{R}_+$ için

$$supp(\epsilon_x * \epsilon_y) = [|x-y|, x+y]$$

dir. Bu durumları ispatlamak yerine Sonuç (3.32) durumunda ne olduğunu açıklayacağız.

Sonuç (3.32) kabulünden

$$\beta = \frac{A'}{A}$$

ve

$$q(0) = q = \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{1}{2}\beta'$$

sonucu elde edilir. $\beta(0) = 0$ sınır koşulları altında bu diferensiyel denklemin çözümü her $x \in \mathbb{R}_+$ için

$$\beta(x) = 2c_1 \tanh(c_1 x)$$

ile verilir, burada $c_1^2 := q(0)$ dır. Sonuç olarak, $c_2 > 0$ ve $c_1 \geq 0$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}_+$ için

$$A(x) = c_2 \cosh^2(c_1 x)$$

dır. Bu $(\mathbb{R}_+, *(A))$ Sturm-Liouville hipergrubunun cosh hipergrubu olduğuna işaret eder ve dolayısıyla $x, y \in \mathbb{R}_+$ olduğunda

$$supp(\epsilon_x * \epsilon_y) = \{|x-y|, x+y\}$$

dir. Benzer şekilde , β vasıtasıyla uygun gelen yukarıdaki diferensiyel denklemden Sonuç (3.33) den Sonuç (3.35) e kadarki durumlar için

$$A(x) = c_2 \cosh^2(c_1 x + c_0)$$

sonucu elde edilir, burada $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$, $c_1 \geq 0$ ve $c_2 \geq 0$ dır. Belirlenmiş bir β ile başlayan somut hesaplamalar Zeuner (1992^2), Örnek (3.10) da uygulanmıştır. Sonuç olarak $(\mathbb{R}_+, *(A))$ Sturm-Liouville hipergrupları Sonuç (3.36) u sağlar, burada A bir Chébli-Trimèche fonksiyonudur.

Teorem 3.37 A (3.1) ve $SL2$ yı sağlayan bir Sturm-Liouville fonksiyonu olsun ve $*$ Teorem (3.29) da düzenlenmiş bir konvolüsyonu göstersin . O halde $(\mathbb{R}_+, *)$ bir hipergruptur. Özellikle $(\mathbb{R}_+, *(A))$ Sturm-Liuoville hipergrupları daima vardır.

İspat. $e := 0$ için HG5 aksiyomu Lemma (3.28) din (ii) sınır şartlarından çıkmaktadır. Lemma (3.28) den tekrar x ve y değişkenlerinin değişimi altında u_f in invaryant olduğu sonucunu çıkartırız, bundan dolayı her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $\epsilon_x * \epsilon_y = \epsilon_y * \epsilon_x$ dir. Böylece Aksiyom HG6 özdeşlik dönüşümü olan involüsyonu ile geçerlidir. HG2, HG4 ve HG7 aksiyomları , Sonuç (3.32) den Sonuç (3.35) a kadar bütün durumlarda Lemma (3.31) in sonuçlarıdır, $supp(\epsilon_x * \epsilon_y)$ daima $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ ye bağlıdır ve $[|x-y|, x+y]$ aralığı içindedir. Her $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ çift fonksiyonları için u_f in sürekliliği aksiyom HG3 ü ifade etmektedir.

Bize göstermemiz için geriye kalan şey bir lemmaya ihtiyacımız olması sebebiyle $*$ konvolüsyonunun (Aksiyom HG1) birleşmeli olduğudur. ■

Teorem 3.38 $f'(0) = 0$ ı sağlayan herhangi bir $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ için

$$L_x u_f = L_y u_f = u_{Lf}$$

denklemi elde edilir, burada $L := L_A$ dır.

İspat. Genelliği bozmadan f fonksiyonunun $Lf \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ve $(Lf)(0) = 0$ özelliklerini sağlayan $C^2(\mathbb{R})$ de bir simetrik fonksiyon olduğunu kabul ediyoruz. Sonuç (3.30) den u_f (Lemma(3.28) ün (i) ve (iii)) için diferensiyel denklemi sınırda iki kez diferensiyellenebilir fonksiyonuna genişletildiği sonucunu çıkarırız, ve böylece

$$L_x u_{Lf} = L_y u_{Lf}$$

eşitliği elde edilir. Ancak bu denklem u_{Lf} yerine

$$v := L_x u_f = L_y u_f$$

fonksiyonu tarafından da sağlanır. Sınırda

$$v(x, 0) = L_x u_f(x, 0) = Lf(x)$$

ve

$$v_y(x, 0) = \frac{\partial}{\partial y} L_x u_f(x, 0) = L_x(\frac{\partial}{\partial y} u_f(x, 0)) = L_x(0) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde $v_y(0, y) = 0$ elde ederiz. Çözümün tekliği

$$u_{Lf} = v = L_x u_f = L_y u_f$$

sonucunu verir.

Her $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ için geçerli olan

$$(\epsilon_x * \epsilon_y) * \epsilon_z = \epsilon_x * (\epsilon_y * \epsilon_z)$$

özelliğini görmek için bir simetrik $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ fonksiyonunu , her $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ için sırasıyla

$$U_f(x, y, z) := \int_{\mathbb{R}_+} f d[(\epsilon_x * \epsilon_y) * \epsilon_z] = u_{f * \epsilon_x}(x, y)$$

ve

$$V_f(x,y,z) := \int_{\mathbb{R}_+} fd[\epsilon_x * (\epsilon_y * \epsilon_z)] = u_{f*\epsilon_x}(y,z)$$

ile $\mathbb{R}_+$ üzerinde sırasıyla reel değerli U_f ve V_f fonksiyonları tanımlanır ve $U_f = V_f$ olduğu görülür.

Sabit $z \in \mathbb{R}_+$ için $f * \epsilon_x \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ve $(f * \epsilon_x)'(0) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $x, y \in \mathbb{R}_+$ olduğunda

$$L_x u_{f*\epsilon_x}(x,y) = L_y u_{f*\epsilon_x}(x,y)$$

veya

$$L_x U_f(x,y,z) = L_y U_f(x,y,z)$$

dır. Diğer bir yandan Teorem (3.38)

$$L_y V_f(x,y,z) = L_y u_{f*\epsilon_x} = u_{L(f*\epsilon_x)}$$

sonucunu vermektedir.

$$L_y u_f(x,y) = L_x u_f(x,y) = L_x(f * \epsilon_x)(y)$$

olduğundan, her $x, y \in \mathbb{R}_+$ (ve sabit $z \in \mathbb{R}_+$) için V_f in

$$L_y V_f(x,y,z) = L_x V_f(x,y,z)$$

diferensiyel denklemini sağladığı görülür.

Şimdi $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$ sınırında

$$\frac{\partial}{\partial y} U_f(x,0,z) = \frac{\partial}{\partial y} u_{f*\epsilon_x}(x,0) = 0 = \frac{\partial}{\partial y} V_f(x,0,z)$$

nın yanısıra

$$\begin{aligned} u_f(x,0,z) &= \int_{\mathbb{R}_+} fd[(\epsilon_x * \epsilon_0) * \epsilon_z] \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} fd(\epsilon_x * \epsilon_z) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} fd[\epsilon_x * (\epsilon_0 * \epsilon_z)] \\ &= V_f(x,0,z) \end{aligned}$$

hatta $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ sınırında

$$\frac{\partial}{\partial x} U_f(0,y,z) = 0$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial x} V_f(0,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} u_{f*\epsilon_x}(y,z)\Big|_{x=0} = u_{(\frac{\partial}{\partial x})(f*\epsilon_x)|_{x=0}}(x,y) = 0$$

ile birlikte

$$U_f(0,y,z) = \int f d(\epsilon_y * \epsilon_z) = V_f(0,y,z)$$

elde edilir. Her $t \in \mathbb{R}_+$ için

$$\frac{\partial}{\partial x} f * \epsilon_x \Big|_{x=0}(t) = \frac{\partial}{\partial x} u_f(0,t) = 0$$

olduğundan ikinci eşitlik doğru olur. Başlangıç diferensiyel denkleminin çözümünün tekliği her $z \in \mathbb{R}_+$ için geçerli olan istenilen

$$U_f(\cdot,\cdot,z) = V_f(\cdot,\cdot,z)$$

eşitliğini ifade eder. ■

Şimdi (3.2) de

$$\rho := \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{A'}{A}(x) \geq 0$$

şeklinde tanımlanan indeksine bağlı olmayan bir $(\mathbb{R}_+, *(A))$ Sturm-Liuoville hipergrubunun konvolüsyonunun mutlak sürekliliğini tartışacağız.

Teorem 3.39 $(\mathbb{R}_+, *(A))$ bir Sturm-Liuoville hipergrubu olsun.

i) Eğer $(\mathbb{R}_+, *(A))$ bir Chébli-Trimèche hipergrubu ise o halde her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $\epsilon_x * \epsilon_y$ konvolüsyonu $\omega_{\mathbb{R}_+}$ -mutlak süreklidir.

ii) Eğer $(\mathbb{R}_+, *(A))$ $A \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ile bir Levitian hipergrubu ise o halde her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için

$$\epsilon_x * \epsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{A(|x-y|)A(0)}{A(x)A(y)}\right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{|x-y|} + \frac{1}{2}\left(\frac{A(x+y)A(0)}{A(x)A(y)}\right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{x+y} + \nu_{xy}$$

şeklinde bir $\omega_{\mathbb{R}_+}$ -mutlak sürekli ölçü $\nu_{x,y} \in M_+^b(\mathbb{R}_+)$ vardır.

İspat. Teknik olarak ii) durumunu daha fazla içeren ispat yöntemine kendimizi kısıtlıyoruz. (i) nin ispatı için Braaksma ve de Snoo (1974) ve Trimèche (1990) a bakınız.

$(\mathbb{R}_+, *(A))$ bir Levitian hipergrubu olarak kabul edildiğinden dolayı

$$\beta = \left(\frac{A}{A(0)}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \tilde{A} = A(0), \quad \tilde{\alpha} = 0$$

ve

$$q = \frac{1}{4A^2}\left(2AA'' - A'^2\right),$$

olmak üzere β yı

$$\beta := \frac{A'}{A}$$

şeklinde seçebiliriz. Lemma (3.27) nin bir uygulaması,her $0 \leq y \leq x$ ve $\mathbb{R}_+$ üzerindeki her yerel sınırlı ölçülebilir f fonksiyonu için

$$\begin{aligned} 2\nu_f(x,y) &= \left(\frac{A(x-y)}{A(0)}\right)^{\frac{1}{2}} f(x-y) + \left(\frac{A(x+y)}{A(0)}\right)^{\frac{1}{2}} f(x+y) \\ &\quad + \frac{A'(0)}{2A(0)^{\frac{3}{2}}} \int_{x-y}^{x+y} A(\xi)^{\frac{1}{2}} f(\xi) d\xi + \int_{\Delta_{x,y}} |q(\zeta) - q(\xi)| \nu_f(\xi,\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Her $x > y > 0$ için $M^b(\mathbb{R}_+)$ ya ait

$$\nu_f(x,y) := \epsilon_x * \epsilon_y - \frac{1}{2}\left(\frac{A(x-y)A(0)}{A(x)A(y)}\right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{x-y} - \frac{1}{2}\left(\frac{A(x+y)A(0)}{A(x)A(y)}\right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{x+y}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_f(x,y) &:= B(x)B(y) \int_{\mathbb{R}_+} f d\nu_{x,y} \\ &= \nu_f(x,y) - \frac{1}{2}\left(\frac{A(x-y)}{A(0)}\right)^{\frac{1}{2}} f(x-y) - \frac{1}{2}\left(\frac{A(x+y)}{A(0)}\right)^{\frac{1}{2}} f(x+y) \end{aligned}$$

olsun. $2\nu_f(x,y)$ nin ayrışımında 3. toplam bir Löbek sıfır kümesinin gösterge fonksiyonu f olacak şekilde seçerek sıfıra eşitleriz. $(\xi,\zeta) \to f(\xi+\zeta)$ ve $(\xi,\zeta) \to f(|\xi-\zeta|)$ fonksiyonları f ile birlikte sıfır olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} 2\tilde{\nu}_f(x,y) &= \int_{\Delta_{x,y}} |q(\zeta) - q(\xi)|. \\ &\quad . \left[\tilde{\nu}_f(\xi,\zeta) + \frac{1}{2}\left(\frac{A(\xi-\zeta)}{A(0)}\right)^{\frac{1}{2}} f(\xi-\zeta) + \frac{1}{2}\left(\frac{A(\xi+\zeta)}{A(0)}\right)^{\frac{1}{2}} f(\xi+\zeta)\right] d\xi d\zeta \\ &= \int_{\Delta_{x,y}} |q(\zeta) - q(\xi)| \tilde{\nu}_f(\xi,\zeta) d\xi d\zeta \end{aligned}$$

elde edilir.

Her$x \geq y > 0$ için $\tilde{\nu}_f(x,y) = 0$ olduğunu göstermek için bir argument gösterimi kullanırız. $x_0 > 0$, $\mu := \max\{|q(x)| : x \leq x_0\}$ ve $\epsilon := \frac{1}{2}\mu^{-\frac{1}{2}}$ olsun. $x + y \leq x_0$ ve $y \leq n_\epsilon$ şeklinde her $x \geq y > 0$ için $\tilde{\nu}_f(x,y) = 0$ belirlendiğini kabul edelim. O halde

$$K := \max\{|\tilde{\nu}_f(x,y)| : 0 < y \leq x, x + y \leq x_0, y \leq (n+1)\epsilon\}$$

ile $x, y \in \mathbb{R}_+$ olduğunda $\Delta := \Delta_{x,y} \cap (\mathbb{R}_+) \times [n_\epsilon, \infty[)$ için

$$|2\tilde{\nu}_f(x,y)| \leq \int_{\Delta} |q(\zeta) - q(\xi)| \tilde{\nu}_f(\xi,\zeta) d\xi d\zeta \leq \epsilon^2 2MK \leq \frac{K}{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $K = 0$ dır ve bu da ispatı tamamlar. $x_0 > 0$ ın keyfi seçiminden her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $\nu_f(x, y) = 0$ sonucu elde edilir.

$\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ daki N sıfır kümesinden herhangi λ^2 verilsin.

$$\nu_{x,y}(\mathbb{N}) = \frac{1}{B(x)B(y)} \nu_{1_{\mathbb{N}}}(x, y)$$

elde edilir ve buradan her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\nu_{x,y} \ll \omega_{\mathbb{R}_+}$ dır. Ama $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\nu_{x,y}$

$$\nu_{x,y} = 1_{]|x-y|,x+y[}\epsilon_x * \epsilon_y + c_1\epsilon_{|x-y|} + c_2\epsilon x + y$$

şeklinde bir ifade olarak kabul edilmektedir. $\nu_{x,y}$ nin $\omega_{\mathbb{R}_+}$ mutlak sürekliliği, her $x, y \in \mathbb{R}_+^\times$ için

$$\nu_{x,y} = 1_{]|x-y|,x+y[}\epsilon_x * \epsilon_y \in M_+^b(\mathbb{R}_+)$$

olduğundan $c_1 = c_2 = 0$ iddasından ortaya çıkar. ■

Bu bölümün geri kalan kısmı için verilen bir $(\mathbb{R}_+, *(A))$ Sturm-Liouville hipergrubunun A Sturm-Liouville fonksiyonunun (3.1) ve $SL2$ hipotezlerini sağladığını kabul edeceğiz. İlk önce $(\mathbb{R}_+, *(A))$ nın dual uzayını bulmaya çalışacağız. Lemma (3.18) nin hazırlanışındaki yararlı bir sapma ile

$$L_A\phi(A) = (\lambda^2 + \rho^2)\phi_\lambda, \qquad \phi_\lambda(0) = 1, \quad \phi'_\lambda(0) = 0$$

diferensiyel denkleminin $\lambda \in \mathbb{C}$ için ϕ_λ çözümleri olarak $(\mathbb{R}_+, *(A))$ üzerinde çarpımsal fonksiyonlarını göz önüne alıyoruz, burada $\rho \geq 0$ $(\mathbb{R}_+, *(A))$ nın indeksidir. $\phi_{i\rho} = 1$ olduğunu belirtelim. $\lambda \in \mathbb{C}$ için ϕ_λ fonksiyonlarının daha fazla özellikleri bir sonraki sonuçta verilmiştir.

Teorem 3.40 i) $\lambda \in i]\rho, \infty[$ için ϕ_λ fonksiyonları (kesinlikle) pozitif ve kesinlikle artandır.

ii) Eğer $\rho > 0$ ise o halde her $\lambda \in i[0, \rho[$ için ϕ_λ fonksiyonları (kesinlikle) pozitif ve azalandır.

iii) Her $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cup i]0, \rho]$ için ϕ_λ fonksiyonları sınırlıdır.

iv) Eğer A sabit değilse o halde $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cup [0, \rho[$ olmak üzere

$$lim_{x\to\infty} \sup \phi_\lambda(x) < 1$$

dir.

İspat. $\phi_\lambda > 0$ ın $\lambda \in i\mathbb{R}_+^\times$ i sağladığını gösteriyoruz. Lemma (3.9) ile β

$$lim_{x\to\infty} \left(\frac{A'}{A}(x) - \beta(x) \right) = 0$$

ve

$$lim_{x\to\infty} q(x) = \rho^2$$

azalan limit bağıntılarını sağlayacak şekilde seçilebilir. Hipotezlerden hem i) hemde ii) durumunda $x > 0$ olmak üzere

$$q(x) \geq \rho^2 > \rho^2 + \lambda^2$$

elde edilir. $\mathbb{R}_+$ üzerinde

$$\psi := \frac{\beta}{2}\phi_\lambda + \phi'_\lambda$$

reel değerli fonksiyonu ϕ_λ ya bağlı diferansiyel denklemden ortaya çıkan

$$\begin{aligned}
\psi' &= \left(\frac{\beta'}{2} - (\rho^2 + \lambda^2)\right)\phi_\lambda - \left(\frac{A'}{A} - \frac{\beta}{2}\right) \\
\psi(0) &= \frac{\beta(0)}{2} \\
\psi'(0) &= \frac{\beta'(0)}{2} - \frac{\rho^2 + \lambda^2}{1 + \alpha_0}
\end{aligned}$$

diferensiyel denklemini sağlar.

Sonra 0 ın bir komşuluğunda her $x > 0$ için $\psi(x) > 0$ olduğunu görürüz. $\beta(0) > 0$ durumunda, bu

$$\psi(0) = \frac{\beta(0)}{2}$$

den ortaya çıkar. $\beta(0) = 0$ durumunda , o

$$\rho^2 \leq \lim_{x\to 0} q(x) = \frac{1}{2}\beta'(0) + \lim_{x\to 0} \frac{A'\beta}{2A}(x) = \frac{1 + \alpha_0}{2}\beta'(0)$$

ifadesinin bir sonucudur. Şimdi ϕ_λ

$$t_1 := \inf\{t > 0 : \phi_\lambda(t) = 0\}$$

var olacak şekilde (kesinlikle) pozitif olmasın.

$$t_0 = \inf\{t > 0 : \quad \psi(t) = 0\}$$

şeklinde tanımlayalım. $\phi_\lambda(0) = 1$ olduğundan $[0, t_1[$ üzerinde $\phi_\lambda > 0$ elde edilir ve dolayısıyla $\phi'_\lambda \leq 0$ dır. Bu

$$\psi(t_1) = \frac{1}{2}\beta(t_1)\phi_\lambda(t_1) + \phi'_\lambda(t_1) = \phi'_\lambda(t_1) \leq 0$$

olduğunu gösterir ve dolayısıyla $t_0 \leq t_1$ dir. Ancak $t_0 > 0$ olduğundan dolayı, sonuç olarak $\psi'(t_0) \leq 0$ ı veren $]0, t_0[$ üzerinde $\psi > 0$ dır. $\phi_\lambda(t_0)$ için

$$\frac{1}{2}\beta(t_0)\phi_\lambda(t_0) + \phi'_\lambda(t_0) = \psi(t_0) = 0$$

ve

$$(\frac{1}{2}\beta'(t_0)-(\rho^2+\lambda^2))\phi_\lambda(t_0)-\left(\frac{A'}{A}(t_0)-\frac{1}{2}\beta(t_0)\right)\phi'_\lambda(t_0)=\psi'(t_0)$$

lineer denklemleri çözerek

$$(q(t_0)-(\rho^2+\lambda^2))\phi_\lambda(t_0)\psi'_\lambda(t_0)\leq 0$$

elde edilir. Böylece $\phi_A(t_0)\leq 0$ dır ve

$$q(t)\geq\rho^2>\rho^2+\lambda^2$$

olduğundan $t_0=t_1$ durumu olmalıdır. Üstelik her $x>0$ (teklik ile) için

$$\phi_A(t_0)=0$$

ve

$$\phi'_A(t_0)=\psi(t_0)-\frac{1}{2}\beta(t_0)\phi_A(t_0)=0$$

eşitlikleri ile $\phi_\lambda(x)=0$ olduğu gösterilir. Ancak bu $\phi_\lambda(x)=1$ ile çelişir.

Şimdi ϕ_λ nın $\lambda\in i]0,\rho[$ için kesinlikle azalan olduğunu göstereceğiz. Gerçekten ϕ_λ bağlı olan diferensiyel denklemden $\phi'_\lambda(t)=0$ ın $\phi''_\lambda(t)<0$ ı ifade ettiği sonucunu çıkarır. Ancak $\lambda\in i]0,\rho[$ için,

$$\phi''_\lambda(0)=\frac{\rho^2+\lambda^2}{1+\alpha_0}<0$$

olduğundan ϕ'_λ $\mathbb{R}_+$ nın bozulmamış bir aralığında ne pozitiftir ne de 0 dır ve bundan dolayı ϕ_λ kesinlikle azalandır. $\lambda=0$ için limite geçerek ϕ_0 ın azalan ve negatif olmadığı sonucunu çıkarırız. Ancak enaz $x\in\mathbb{R}_+$ için $\phi_0(x)=0$ dır, bu ise çelişki verir. (ii) nin ispatı şimdi tamamdır. $\lambda\in i]0,\rho[$ için ϕ_λ in tam anlamıyla kesinlikle artan olduğunu göstermek için uygun ters eşitsizlikler ile $\lambda\in i]0,\rho[$ için kesinlikle azalan durumuna benzer şekilde devam ederiz.

(iii) nin ispatı için ϕ_λ için diferensiyel denklemi $2\phi'_\lambda$ ile çarpılır ve her $x\in\mathbb{R}_+$ için

$$\phi'^2_\lambda(x)+2\int_0^x\frac{A'}{A}(t)\phi'^2_\lambda(t)dt+(\rho^2+\lambda^2)\phi^2_\lambda(x)=\rho^2+\lambda^2$$

denklemini elde etmek için Lebesque ölçüsüne göre integrallenir. Ancak (3.3) $\mathbb{R}_+^\times$ üzerinde $\frac{A'}{A}\geq 0$ olduğunu ifade eder, ve böylece $x\in\mathbb{R}_+$ olduğunda

$$\phi^2_\lambda(x)=1-\frac{1}{\rho^2+\lambda^2}\left(2\int_0^x\frac{A'}{A}(t)\phi'^2_\lambda(t)dt+\phi'_\lambda(x)^2\leq 1\right)$$

dır. Bu ispatın önceki kısmı bize $x<0$ olduğunda

$$\int_0^x\frac{A'}{A}(t)\phi'^2_\lambda(t)dt>0$$

olduğunu göstermemizin yeterli olduğunu söylemektedir. Bunu görmek için ilk önce 0 ın bir komşuluğunda bütün x ler için

$$\frac{A'}{A}(x) > 0$$

olduğu görülür. Ancak (ii) den

$$\phi_\lambda''(0) = -\frac{\rho^2 + \lambda^2}{\alpha_0 + 1} < 0$$

elde edilir ve dolayısıyla yeterince küçük $x > 0$ için $\phi_\lambda'(x) < 0$ veya $\phi_\lambda'(x)^2 > 0$ dır. Bu hipotezi ifade eder. ■

Teorem 3.41 $(\mathbb{R}_+, *(A))$ bir Sturm-Liouville hipergrubu olsun. Semikarakterlerin ve $K = \mathbb{R}_+$ dual uzayının kümesi sırasıyla

$$K^* = \{\phi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}\}$$

ve

$$K^\wedge = \{\phi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup i[0, \rho]\}$$

ile verilmiş olsun. (Bunlar sırasıyla $\mathbb{C}$ nin $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}_+ \cup i[0, \rho]$ kümeleri ile tanımlanır.)

İspat. Lemma (3.18) den $K = \mathbb{R}_+$ üzerindeki her nondegenarate çarpımsal fonksiyonunun $\lambda \in \mathbb{C}$ için ϕ_λ formuna sahip olduğu ve ϕ_λ şeklinde bir fonksiyon ancak ve ancak $\rho^2+\lambda^2 \in \mathbb{R}$ iken yada denk bir şekilde ancak ve ancak $\lambda \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ iken reel değerlidir. Bu K^* ile ifade edilmiş karakterizasyonunu verir. Diğer bir yandan Teorem (3.40) (ii) ve (iii) den $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cup i[0, \rho]$ için ϕ_λ sınırlı olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak, eğer $\lambda \in i]\rho, \infty[$ ise o halde $\mathbb{R}_+^\times$ üzerinde $\phi_\lambda > 1$ olduğu Teorem (3.40) (i) den elde edilir, ve buradan $\phi_\lambda \in K^\wedge$ dır. ■

3.6 DEĞİŞİM ALTINDA STURM-LIOUVILLE HİPERGRUPLARI

K nın (kesinlikle) bir pozitif ϕ_λ semikarakteri ve $(\mathbb{R}_+, *(A))$ formunun bir $(K, *)$ Sturm-Liouville hipergrubu verilmiş olsun ϕ_λ ya göre (Bölüm 2.3 anlamında) onun $(K, \circ)$ modifikasyonunu göz önüne alıyoruz. Gerçekte $(K, \circ)$

$$A_{\phi_\lambda} := \phi_\lambda^2 A$$

Sturm-Liouville fonksiyonu ve

$$\omega_{\phi_\lambda} := A_{\phi_\lambda} \lambda_{\mathbb{R}_+}$$

Haar ölçüsü ile $(\mathbb{R}_+, *(A))$ formunda bir Sturm-Liouville hipergrubudur. Bunu göstermek için

$$L_A\phi_\lambda = (\rho^2 + \lambda^2)\phi_\lambda, \qquad \phi_\lambda(0) = 1 \qquad \phi'_\lambda(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin (kesinlikle) bir pozitif ϕ_λ çözümü ile başlıyoruz. Açıkça $A_\lambda := A_{\phi_\lambda}$ bir Sturm-Liouville fonksiyonudur ve (3.1) yi (hem tekil hemde regüler durumlarda) sağlar. $\beta \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}_+)$ $SL2$ yi sağlasın. $\mathbb{R}_+^\times$ üzerinde azalan

$$q_\lambda := \frac{1}{2}\beta'_\lambda - \frac{1}{4}\beta_\lambda^2 + \frac{A'_\lambda}{2A_\lambda}\beta_\lambda$$

olduğunu ispatlayarak

$$\beta_\lambda := \beta + 2\frac{\phi'_\lambda}{\phi_\lambda}$$

nın $SL2$ yi sağladığını göstereceğiz. Ancak bu

$$\begin{aligned} q_\lambda &= \frac{1}{2}\beta' + \frac{\phi''_\lambda}{\phi_\lambda} - \frac{\phi'^2_\lambda}{\phi^2_\lambda} - \frac{1}{4}\beta^2 - \beta\left(\frac{\phi'_\lambda}{\phi_\lambda}\right) - \left(\frac{\phi'_\lambda}{\phi_\lambda}\right)^2 + \frac{A'}{2A}\left(\beta + 2\frac{\phi'_\lambda}{\phi_\lambda}\right) + \frac{\phi'_\lambda}{\phi_\lambda}\left(\beta + 2\frac{\phi'_\lambda}{\phi_\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{2}\beta' - \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{A'}{2A}\beta - (\rho^2 + \lambda^2) \\ &= q - (\rho^2 + \lambda^2) \end{aligned}$$

olduğundan q nun azalan olduğu gerçeğinden ortaya çıkmaktadır.

Teorem 3.42 $(\mathbb{R}_+, *(A))$ $A \in C^2(\mathbb{R}_+)$ Sturm-Liouville fonksiyonu ile bir Chébli- Trimèche hipergrubu olsun. Her $\lambda \in i[0, \infty[$ için $(\mathbb{R}_+, *(A))$ nın ϕ_λ pozitif semikarakterine göre $(\mathbb{R}_+, *(A))$ nın modifikasyonu $(\mathbb{R}_+, \circ(A_\lambda))$ ile ve $(\mathbb{R}_+, \circ(A_\lambda))$ modifiye hipergrubunun indeksini ρ_λ ile göstereceğiz. O zaman

i) $lim_{x\to\infty}\frac{\phi'_\lambda}{\phi_\lambda}(x) = |\lambda| - \rho$

ii) $\rho_\lambda \left(= \frac{1}{2}lim_{x\to\infty}\frac{A'_\lambda}{A_\lambda}(x)\right) = |\lambda|$

iii) Eğer $\lambda \in i]\rho, \infty[$ ise o halde A_λ aşağıdaki koşulları sağlar:

   a) Bütün $x \in 0$ için $A_\lambda(x) > 0$ ve $A_\lambda(0) = 0$ dır.

   b) A_λ artandır.

   c) $lim_{x\to\infty}A_\lambda(x) = \infty$.

   d) Sıfırın bir komşuluğundaki bütün x ler için $\frac{A'_\lambda}{A_\lambda}(x) = \frac{\alpha_{0,\lambda}}{x} + \alpha_{1,\lambda}(x)$ dir, burada $\alpha_{0,\lambda} > 0$ ve $\alpha_{1,\lambda}$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir tek C^∞ -fonksiyonudur.

iv) Eğer $\lambda \in i[0, \rho]$ ise o halde A_λ, $\lambda \neq 0$ durumunda ve (c) nin gerçekleşmesi durumunda

e) $\frac{A'_\lambda}{A_\lambda}$ $\mathbb{R}_+$ üzerinde azalandır

şartının yanı sıra iii) nin (a) (b) ve (d) şartlarını sağlar ve $\lambda \neq 0$ durumunda (c) de sağlanır.

İspat. $\lambda \in i[0, \infty[$ için

$$h' = -\left(h^2 + \frac{A'}{A}h + (\rho^2 + \lambda^2)\right), \qquad h(0) = 0$$

diferensiyel denklemini açıkça sağlayan

$$h_\lambda = \frac{\phi'_\lambda}{\phi_\lambda}$$

fonksiyonunu göz önüne alıyoruz. Bu diferensiyel denklemin bir $\tilde{h}$ çözümü $\tilde{h}'(x) = 0$ ı sağlar ancak ve ancak $x \in \mathbb{R}_+$ için

$$\tilde{h}(x) = \tilde{h}_\pm(x) := \frac{1}{2}\left(-\frac{A'}{A}(x) \pm \left(\left(\frac{A'}{A}(x)\right)^2 - 4(\rho^2 + \lambda^2)\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

dir. Buradan $\lambda \in i]\rho, \infty[$ olduğunda h_λ nın negatif olmayan ve artan ($x \to \infty$ olduğunda) olduğuna karar veririz, ve h_λ azalandır ve $\lambda \in i[0, \rho]$ yu sağlayan $h_\lambda \geq \tilde{h}_+ \geq |\lambda| - \rho$ eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla $\lambda \in i]0, \infty[$ için (i) şıkkı Kamke (1944) den yararlanarak görülür. $\lambda = 0$ durumu benzer bir şekilde incelenebilir. Şimdi

$$\frac{A'_\lambda}{A_\lambda} = \frac{A'}{A} + 2\frac{\phi'_\lambda}{\phi_\lambda}$$

olduğundan (ii) durumu (i) den elde edilir.

(iii) nin (a)ve (d) şıkları $\lambda \in i[\rho, \infty[$ ile A_λ için aşikardır. $x > 0$ için $h_\lambda(x) > 0$ ve $\lambda \in i]\rho, \infty[$ olduğundan (b) ve(c) şıklarının $\lambda \in i]\rho, \infty[$ için sağlandığını görürüz. Şimdi $\lambda \in i[0, \rho]$ olduğunu kabul edelim. İspatın başındaki diferensiyel denklemden $\tilde{h}_+$ nın azalan olmasından dolayı h_λ nın da azalan olduğu ve dolayısıyla $\frac{A'_\lambda}{A_\lambda}$ nın azalan olduğu sonucuna varırız ve sonuç olarak A_λ e) şıkkını sağlar. h_λ nın azalıyor olmasından dolayı (b) şartı ortaya sağlanır. ■

Sonuç 3.43 Teorem (3.42) nın (i) şıkkından, özellikle $\lambda \in i[0, \rho[$ olduğunda $\phi_\lambda \in C_0(\mathbb{R}_+)$ sonucu çıkarılır.

Teorem 3.44 K ρ indeksi ile $(\mathbb{R}_+, *(A))$ formunda bir Sturm-Liouville hipergrubu olsun.

i) K supexponential büyüklüğe sahiptir $\Leftrightarrow \rho = 0$

ii) K exponential büyüklüğe sahiptir $\Leftrightarrow \rho > 0$

iii)
$$\lim_{x\to\infty} \sup x\frac{A'}{A}(x) < \infty$$
şartı K nın polinomial büyüklüğe sahip olduğu anlamına gelir (ve dolayısıyla $\rho = 0$)

iv) $\rho = 0$ şartı K nın polinomial büyüklüğe sahip olduğunu ifade etmez.

İspat. Chébli- Trimèche hipergrubları için (i) nin ve bundan dolayı (ii) nin ispatı Teorem (2.27) de mevcuttur. Daha genel Sturm-Liouville durumunda aşağıdaki gibi ispatlanır. Eğer
$$\lim_{x\to\infty} \frac{A'}{A}(x) > 0$$
ise o halde her $x \geq x_0$ için
$$A(x) \geq A(x_0)exp[\epsilon(x - x_0)]$$
olduğunu gösteren $[x_0, \infty[$ üzerinde $\frac{A'}{A} \geq \epsilon > 0$ şeklinde $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $\epsilon > 0$ vardır. Bu ise K nın exponential büyüklük olduğunu söyleyen $n \geq x_0 + 1$ koşuluyla
$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{R}_+}([0,1]^n) &= \omega_{\mathbb{R}_+}([0,n]) \\
&= \int_0^{\pi} A(x)dx \\
&\geq \frac{A(x_0)}{\epsilon \exp \epsilon x_0}(\exp \epsilon_n - \exp \epsilon x_0)
\end{aligned}$$
olduğuna götürür. Eğer aksine
$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{A'}{A}(x) = 0$$
ise o halde her $\epsilon > 0$ için $[x_\epsilon, \infty[$ üzerinde $\frac{A'}{A} < \epsilon$ şeklinde $x_\epsilon \in \mathbb{R}_+$ vardır. Ancak o halde bir uygun $c_\epsilon \geq 0$ sabitiyle her $x \geq x_\epsilon$ ile
$$A(x) \leq A(x_\epsilon)exp[\epsilon(x - x_\epsilon)] = c_\epsilon \exp \epsilon_x$$
yazabiliriz. Bu
$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{R}_+}([0,1]^n) &= \omega_{\mathbb{R}_+}([0,n]) \\
&= \int_0^{\pi} A(x)dx \\
&\leq c + \int_{x_0}^{n} c_\epsilon \exp \epsilon x dx \\
&\leq c + \frac{c_\epsilon}{\epsilon} \exp \epsilon n
\end{aligned}$$

olduğunu gösterir, burada $c = \int_0^{x_\epsilon} A(x)dx$ dır. Bu her $\epsilon > 0$ için geçerli olduğundan, K nın subexponential büyüklüğe sahip olduğunu gösterir.

(iii) yi ispatlamak için her $x \geq x_1$ için

$$A(x) \leq c_1 x^c$$

şeklinde x_1 ve bir $c > 0$ sabit sayısı vardır. Ancak o zaman

$$\begin{aligned}
\log A(x) - \log A(x_1) &= \int_{x_1}^{x} \frac{A'}{A}(t)dt \\
&\leq \int_{x_1}^{x} \frac{c}{t}dx \\
&= c(\log x - \log x_1)
\end{aligned}$$

dır ve dolayısıyla her $x > x_1$ için $A(x) \leq c_1 x^c + c_2$ dır, burada $c_1, c_2 \geq 0$ uygun şekilde seçilmiştir. Bu, K polynomial büyüklüğe sahip olduğundan her $n \geq 1$ için $\omega_{\mathbb{R}_+}([0,1]^n) = 0 \;\; n^{\epsilon+1)}$ olduğunu gösterir.

Son olarak (iv) durumunu destekleyen bir aksine örnek $x \to A(x) = \exp[(x+1)^{\frac{1}{2}}]$ Sturm-Liouville fonksiyonu ile sağlanır. ■

Tanım 3.45 Eğer her ϕ_λ sınıfı aşağıdaki gösterime sahipse bir $(\mathbb{R}_+, *(A))$ Sturm-Liouville hipergrubunun bir Laplace gösteriminin olduğu söylenir. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}_+$ için

$$\phi_\lambda(x) = \int_{-x}^{x} e^{-i\lambda t}\tau_x(dt) = \int_{-x}^{x} \cos \lambda t \tau_x(dt)$$

olacak şekilde $\tau_x \in M_+^{(1)}([-x,x])$ vardır.

Açıkça integraller $x \in \mathbb{R}_+$ için $\nu_x \in M^{(1)}([-x,x])$ ile

$$\phi_\lambda(x) = \int_{-x}^{x} e^{-(\rho+i\lambda)t}\nu_x(dt) = \int_{-x}^{x} e^{(i\lambda-\rho)t}\nu_x(dt)$$

olarak tekrar yazılabilir.

3.7 DEĞİŞİM ALTINDA LAPLACE GÖSTERİMİ

$(K, *)$

$$\phi_\mu(x) = \int_{-x}^{x} e^{i\mu t}\tau_x(dt)$$

olacak şekilde $\tau_x \in M_+^{(1)}([-x,x])$ ölçü gösterimi var olan her bir $x \in K$ için $(K, *)$ ın herhangi bir ϕ_μ sınıfını verecek şekilde bir Laplace gösterimini kabul edelim. İlave olarak, ϕ_λ $(K,*)$ ın bir (kesinlikle) pozitif semicharacteri olsun. O halde ϕ_λ ya göre modifiye $(K,*)$ ile ortaya çıkan $(K,\circ)$ hipergrubu da

$$\phi_{\mu,\lambda} := \frac{\phi_\mu}{\phi_\lambda}$$

formundaki $\phi_{\mu,\lambda}$ karakteri

$$\frac{1}{\phi_\lambda(x)}\tau_x$$

ölçü gösterimine sahip olduğu anlamda bir Laplace gösterimini ortaya çıkarır, burada $\|\tau_x\| = \phi_0(x) \leq \phi_\lambda(x)$ eşitsizliği $M_+^{(1)}([-x,x])$ $(x \in K := \mathbb{R}_+)$ kümesine aittir.

Chébli-Trimèche hipergruplarının özel sınıfı için değişim, growth ve Plancherel ölçüsünün destekleyeni hakkında daha fazla ayrıntıya sahip oluruz. Sonraki teoremden Teorem (3.42) ye rağmen Chébli-Trimèche hipergruplarının sınıfının genellikle değişime göre kapalı olmadığı açıktır.

Teorem 3.46 Her $(\mathbb{R}_+, *(A))$ Sturm-Liouville hipergrubu bir Laplace gösterimini kabul eder. Daha genel olarak eğer $\phi_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R}_+, *(A))$ nın semikarakterlerinin kümesini gösterirse o halde her $x \in \mathbb{R}_+$ için, her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\phi_\lambda(x) = \int_{-x}^{x} e^{-(\rho+i\lambda)t}\nu_x(dt)$$

olacak şekilde $\nu_x \in M^1([-x,x])$ vardır.

İspat. İlk önce $\rho = 0$ durmunu göz önünde bulunduralım. $A \in C^1(\mathbb{R}_+)$ negatif olmadığından ve $A' \geq 0$ eşitsizliğini sağladığından her $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ için $u_\lambda(x,y) = \cos\lambda x \phi_\lambda(y)$ ile tanımlanan $u_\lambda : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $l[u] = 0$ diferensiyel denklemini sağladığı elde edilir. Burada $l[u]$ diferensiyel operatörü

$$l[u](x,y) := A(y)u_{xx}(x,y) - A(y)u_{yy}(x,y) - A'(y)u_y(x,y)$$

şeklinde verilmiştir. $u(\cdot,0) \geqslant 0$ olmak üzere

$$l[u] = 0, \quad u(\cdot,0) = f, \quad u_y(,0) = 0$$

Cauchy probleminin $\mathbb{R}$ üzerindeki bir çift C^∞-fonksiyon olan f nin $\mathbb{R}_+$ kısıtlanmış herhangi bir çözümü her $(x,y) \in I = \{(r,s) \in \mathbb{R}_+^2 : r \geq s \geq 0\}$ için $u(x,y) \geq 0$ ı sağlar. (Chébli (1974[2]),Teorem(5)) Sonuç olarak herbir $(x,y) \in I$ için

$$u_\lambda(x,y) = \int_{x-y}^{x+y} u_\lambda(t,0)\mu_{x,y}(dt)$$

olmak üzere $\mu_{x,y} \in M^b_+([x-y, x+y])$ vardır. Özellikle her $(x,y) \in I$ için

$$\phi_\lambda(y)\cos\lambda x = \int_{x-y}^{x+y} \cos\lambda t \mu_{x,y}(dt)$$

elde edilir.

$*_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ üzerinde genel konvolüsyonu göstersin ve $y \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\phi_y = \mu_{y,y} *_{\mathbb{R}} (\epsilon_y + \epsilon_{-y}) - \mu_{2y,y} \in M^b(\mathbb{R})$$

ölçümü $[-y, 3y]$ aralığında desteğe sahiptir ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(y) &= 2\phi_\lambda(y)\cos^2\lambda y - \phi_\lambda(y)\cos 2\lambda y \\ &= \int_{-y}^{-3y} \cos\lambda t \theta_y(dt) \end{aligned}$$

oluğu anlamda $\phi_\lambda(y)$ gösterilir. $3y$ ile sağ tarafta θ_y yer değiştirerek $\sigma_1 \in M^b(\mathbb{R}_+)$ elde edilir, ve $3y$ ile sol tarafta θ_y yerdeğiştirerek ve devamında orjindeki yansıması $\sigma_2 \in M^b(\mathbb{R}_+)$ yı verir. Ama o zaman her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\int_{\mathbb{R}_+} \cos\lambda t(\frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2)(dt) = \phi_\lambda(y)\cos 3\lambda y = \int_{\mathbb{R}_+} \cos\lambda t \mu_{3y,y}(dt)$$

dir. Kosinüs dönüşümünün tekliği $\frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2 = \mu_{3y,y}$ yi verir. $supp(\sigma_1) \subset [2y, 6y]$ ve $supp(\sigma_2) \subset [0, 4y]$ olduğundan $supp(\theta) \subset [-y, y]$ elde edilir. Şimdi her $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ için θ_y nin simetrikleştirilmesi olan $\theta^*(A) = \theta_y(-A)$ olmak üzere $\nu_y = \frac{1}{2}(\theta_y + \theta_y*)$ olsun. Burada θ_y* θ_y nin simetriğidir. O halde her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\phi_\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}_+} \cos\lambda t \nu_y(dt) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-i\lambda t}\nu_y(dt)$$

dır. $\mu_{3y,y}$ $3y$ ile sağ tarafta ν_y yer değiştirilmesi ile ortaya çıktığından $\nu_y \in M^1([-y, y])$ elde ederiz.

Şimdi $\rho > 0$ durumunu göz önüne alalım. $(\mathbb{R}_+, *(A_0))$ ın ϕ_0 pozitif semikarakteri ile modifiye edilmesi sayesinde $(\mathbb{R}_+, *(A))$ nın doğurduğu $(\mathbb{R}_+, \circ(A_0))$ Sturm-Liouville hipergrubunu göz önüne alalım. Daha önce bölüm (3.6) da $(\mathbb{R}_+, \circ(A_0))$ ın $A_0 = \phi_0^2 A$ olmak üzere bir Haar ölçüsü olan $A_0\lambda_{\mathbb{R}_+}$ yı ortaya çıkardığını gördük . Üstelik, $A_0'(0) \geq 0$ elde edilir ve dolayısıyla Teorem (3.42) (i) de karşılık gelen duruma benzer olarak görülebileceği gibi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi_0'}{\phi_0}(x) = -\rho$$

olduğundan

$$\rho_0 := \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{(A_0)'}{A_0}(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\phi_0'}{\phi_0}(x) + \rho = 0$$

dır.$(\mathbb{R}_+, \circ(A_0))$ ın semikarakterinin $\phi_{\lambda,0} : \lambda \in \mathbb{C}$ kümesine bu ispatın birinci kısmını uygulayarak, her bir $x \in \mathbb{R}_+$ ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için ölçü gösterimi $\nu_x^0 \in M^1([-x,x])$ ile

$$\phi_{\lambda,0}(x) = \int_{-x}^{x} e^{-i\lambda t}\nu_x^0(dt)$$

elde edilir. $\phi_{\lambda,0} = \frac{\phi_\lambda}{\phi_0}$ olduğundan

$$\phi_\lambda(x) = \int_{-x}^{x} e^{i\lambda t}\phi_0(x)\nu_x^0(dt)$$

olduğu sonucunu çıkarırız. Özellikle $\lambda = i\rho$ için

$$1 = \int_{-x}^{x} e^{\rho t}\phi_0(x)\nu_x^0(dt)$$

elde edilir ve $t \to e^{\rho t}\phi_0(x)$ için ν_x^0 yoğunluğu ile herbir ν_x ölçümü $M^1([-x,x])$ $x \in \mathbb{R}_+$ ya aittir. $\nu_\lambda(y)$ nin istenen gösterimine ulaşılır. ■

4 ÖRNEKLER

Bu bölümde Sturm-Liouville Hipergruplarına ait bazı örnekler verilmiştir.

4.1 SUBEXPONENTIAL BÜYÜKLÜĞE SAHİP CHÉBLI-TRIMÈCHE HİPERGRUPLARI

$\rho = 0$ olmakla birlikte $(\mathbb{R}_+, *(A))$ subexponantial Chébli-Trimèche hipergrubudur. $(\mathbb{R}_+^\wedge \cong \mathbb{R}_+)$

4.2 BESSEL-KINGMAN HİPERGRUPLARI

Bu hipergruplar $\alpha > -\frac{1}{2}$ olmak üzere

$$A(x) := x^{2\alpha+1}$$

formunun $\mathbb{R}_+$ üzerindeki Chébli-Trimèche A fonksiyonları ile tanımlanır. Farklı bir parametre gösterimi ile Örnek 3.4.1 de çoktan gösterildi. Genel parametre gösteriminde konvolüsyonlar $\epsilon_x * \epsilon_y$ $(x, y \in \mathbb{R}_+$ için Dirac ölçülerinin)

$x, y, z \in \mathbb{R}_+^\times$ olduğunda

$$K_\alpha(x,y,z) := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})2^{2\alpha+1}} \frac{[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(xyz)^{2\alpha}}$$

ile

$$(\epsilon_x * \epsilon_y)(dz) = K_\alpha(x,y,z) z^{2\alpha+1} \lambda_{[|x-y|,x+y]}(dz)$$

şeklinde verilir. $K := \mathbb{R}_+$ olmak üzere bu $(K, *)$ hipergrubunun ϕ_λ karakterleri her $x \in \mathbb{R}_+$ için $\phi_\lambda(x) := j_\alpha(\lambda x)$ ile tanımlandı, burada j_α her $z \in \mathbb{C}$ için

$$j_\alpha(z) := \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1)}{2^{2k} k! \Gamma(\alpha+k+1)} z^{2k}$$

ile verilen α dereceden modifiye Bessel fonksiyonunu (kompleks değerli) göstermektedir. Bu $K^\wedge \cong K$ olduğunu gösterir. Üstelik sabit $\alpha > 0$ için $\lambda < 0$ olmak üzere ϕ_λ ya göre bütün modifiye $(K, \circ)$ hipergrupları izomorfiktir.

4.3 HAREKET HİPERGRUPLARI

Hareket hipergrupları $d \geq 2$ için $\alpha := \frac{1}{2}d - 1$ özelleştirmesiyle Bessel-Kingman hipergruplarından ortaya çıkmaktadır. Bu hipergruplar $\mathbb{R}^d$ nın $M(d)$ hareket grubunun $M(d)/SO(d)$ çift eş küme hipergrupları ile çakışmaktadır.

4.4 EXPONENTIAL BÜYÜKLÜĞE SAHİP CHÉBLI-TRIMÈCHE HİPERGRUPLARI

$\rho > 0$ olmak üzere $(\mathbb{R}_+, *(A))$ exponantial Chébli-Trimèche hipergrubudur.

4.5 KOMPAKT OLMAYAN TİPTEKİ JACOBİ HİPERGRUPLARI

$\alpha \neq -\frac{1}{2}$ olmak üzere $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$ alalım, $x \in \mathbb{R}_+$ olduğunda

$$A(x) := \sinh^{2\alpha+1} x \cosh^{2\beta+1} x$$

şeklinde tanımlanmış Chébli-Trimèche fonksiyonu olan A yı göz önüne alalım. $(\mathbb{R}_+, *(A))$ formuna karşılık gelen $(K, *)$ hipergrubu

$$(\epsilon_x * \epsilon_y)(dz) = K_{\alpha,\beta}(x,y,z) A(z) \lambda_{[|x-y|,x+y]}(dz)$$

olarak gösterilebilen ϵ_y ($x, y \in \mathbb{R}_+$ ile) ve ϵ_x Dirac ölçüleri için bir Lebesque sürekli konvolüsyonunu ortaya koyar, burada her $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{aligned} K_{\alpha,\beta} \ (\ x, y, z) &:= \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta+\frac{1}{2}}(\sinh x \sinh y \sinh z)^{-2\alpha} \\ &\times \int_0^\pi (1-\cosh^2 x - \cosh^2 y - \cosh^2 z + 2\cosh x \cosh y \cosh z \cosh t)_+^{\alpha-\beta-1} \\ &\times (\sin t)^{2\beta} dt \end{aligned}$$

dir. Burada $\rho = \alpha + \beta + 1 \ \ (K, *)$ hipergrubunun indeksini göstermektedir. Açıkça $(K, *)$ ın karakterleri Teorem (3.41) tarafından K nın $K^\wedge = \mathbb{R}_+ \cup i[0, \rho]$ dual uzayının elemanları ile tanımlanan ϕ_λ Jakobi fonksiyonları dır. K nın dual uzayı karakterleri ve ilgili konvolüsyonun detayları için Koornwinder (1984) e bakınız. Bu referansın (7.12) den konvolüsyonun gösterimini elde edilir. $\lambda \in i[0, \rho]$ olmak üzere ϕ_λ karakterlerinin (kesinlikle) pozitif olduğu ve ϕ_0 ın K nın π_k Plancherel ölçüsünün desteğindeki bir tek pozitif karakter olduğu ortaya çıkar.

Flensted-Jensen (1977) ve Flensted-Jensen ve Koornwinder (1973) ın yanı sıra π_k nın belirgin karşılaştırması için Trimèche (1981) e bakınız, sayfa 97, Trimèche (1988), sayfa 111. Gerçekte $\omega_k := A\lambda_{\mathbb{R}_+}$ Haar ölçüsü ile bağlantılı π_k Plancherel ölçüsü her $\lambda \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{aligned} c(\lambda) = c_{\alpha,\beta}(\lambda) &:= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\frac{i\lambda}{2})\Gamma(\frac{1+i\lambda}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2})\Gamma(\frac{\alpha-\beta+1+i\lambda}{2})} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}2^{-i\lambda}\Gamma(i\lambda)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{\rho+i\lambda}{2})\Gamma(\frac{\rho+i\lambda}{2}-\beta)} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\pi_k(d\lambda) := \frac{1}{|c(\lambda)|^2}\lambda_{\mathbb{R}_+}(d\lambda)$$

şeklinde verilir.

KAYNAKLAR

[1] Bloom,W.R.; Heyer,H. *Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups*, W.Gruyter, Berlin, **1995**.

[2] Zeuner H., *Moment functions and laws of large number on hypergroups*, Math. Z.211, **1992** ,no.3, 369-407

[3] Braaksma, B.L.J.; de Snoo, H.S.V. *Generalized translation operators associated with a singular differential operator. Ordinary and partial differential equations*, Springer, **1974**, 415, 62-77.

[4] Chébli, H. *Sur un théorème de Paley-Wiener associé à la dé composition spectrale d'un opérateur de Sturm-Liouville sur* $]0,\infty[$., J.Funct. Anal. 17, 1974, no. 4, 477-461.

[5] Trimèche, K. *Transformation intégrale de Weyl généralisée associée à un opérateur différentiel singulier sur* $(0,\infty)$ *et problème de radiation de Weinstein généralisé*, Portugaliae Mathematica 47, **1990**, no. 4, 371-389.

[6] Kamke, E. *Differantialgleichungen. Lösungmethoden und Lösungen. Band 1: Gewöhnliche Differantialgleichungen. Leipzig*, Akad. Verlagsanstalt, **1944**.

[7] Flensted-Jensen, Mogens, *Spherical functions on a simply connected semsimple Lie group, II. The Paley-Wiener theorem for the rank one case*, Math. Ann., **1977**, no:1, 65-92.

[8] Flensted-Jensen, Mogens; Koornwinder, Tom H., *The convolution structure for Jacobi function expansions* Ark. Mat., **1973**, 11, 245-262.

[9] Trimèche, K. *Transformation integrale de Weyl et theoreme de Paley-Wiener associes a un operateur differentiel singulier sur* $(0,\infty)$, J.Math, Pures Appl., **1981**, no:1, 51-98.

[10] Trimèche, K. *Transmutation operators and mean-periodic functions assiated with differential operators*, Mathematical Reports 4, Harwood Academic Publishers, New York, **1988**,111.

ÖZGEÇMİŞ

30.10.1987 tarihinde Ankara'da doğdu. İlköğretim ve lise tahsilimi Ankara'da tamamladı. 2006 yılında ÖSS sonucunda Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına yerleşti. 2010 yılında mezun olarak aynı yıl Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimime başladı ve 2012 haziran ayında mezun oldu.