T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAM OLMAYAN BETA FONKSİYONU

Gamze KABAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR - 2014

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAM OLMAYAN BETA FONKSİYONU

Gamze KABAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

KIRŞEHİR - 2014

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Tolga GÜYER

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

Üye: Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik, davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gamze KABAK

TAM OLMAYAN BETA FONKSİYONU

(Yüksek Lisans Tezi)

Gamze KABAK

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Ekim- 2014

ÖZET

Bu tez çalışmasında uygulamalı matematik, fizik, istatistik ve mühendislik alanlarında sıklıkla kullanılan beta, tam olmayan beta, genişletilmiş beta ve genişletilmiş tam olmayan beta fonksiyonları ele alınmıştır. Bu fonksiyonlar üzerine literatürde yer alan pek çok çalışma incelenmiş ve bu çalışmalardan derlenen bazı temel özellikleri, sonsuz seri ve integral gösterimleri ile diğer özel fonksiyonlarla olan ilişkileri ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Bilim Kodu: 403.06.01
Anahtar Kelimeler: Beta fonksiyonu, tam olmayan beta fonksiyonu, genişletilmiş beta fonksiyonu, genişletilmiş tam olmayan beta fonksiyonu.
Sayfa Adedi: 41
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

INCOMPLETE BETA FUNCTION

(Master's Thesis)

Gamze KABAK

Ahi Evran University
Institute of Science

October - 2014

ABSTRACT

This thesis deal with the beta, incomplete beta, generalized beta and the generalized incomplete beta functions which frequently used in the area of applied mathematics, physics, statistics and engineering. Lots of studies in the existing literature were examined and some basic properties, series and integral representations, the relations with the other special functions were given with proofs.

Science Code: 403.06.01
Keywords: Beta function, incomplete beta function, generalized beta function, generalized incomplete beta function.
Number of Pages: 41
Thesis Advisor: Assist. Prof. İ. Onur KIYMAZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince benden bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, tez çalışmamın her safhasında emeği olan değerli danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ ile çalışmalarım boyunca ilgi ve önerilerini benden esirgemeyen, tecrübesi ile beni yönlendiren, kendisinden pek çok şey öğrendeğim değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA'ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Gerek öğrenim hayatım boyunca, gerekse tüm hayatımda emeklerini ve desteklerini benden esirgemeyen, haklarını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim çok değerli aileme ve eşim Burhan KABAK'a teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\Gamma(x)$	:	Gamma Fonksiyonu
$\gamma_x(\nu), \Gamma_x(\nu)$	:	Tam Olmayan Gamma Fonksiyonları
$\Gamma(\nu; b)$	:	Genişletilmiş Gamma Fonksiyonu
$B(\nu, \mu)$	:	Beta Fonksiyonu
$B_x(\nu, \mu)$	:	Tam Olmayan Beta Fonksiyonu
$B(\nu, \mu; b)$	:	Genişletilmiş Beta Fonksiyonu
$B_x(\nu, \mu; b)$	:	Genişletilmiş Tam Olmayan Beta Fonksiyonu
${}_1F_1(a, c; x)$	:	Konfluent Hipergeometrik Fonksiyonu
${}_2F_1(a, b; c; x)$	:	Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu
$F_1(a_1, a_2, a_3; c_1; x, y)$	:	Birinci Çeşit Appell Hipergeometrik Fonksiyonu
$F_2(a_1, a_2, a_3; c_1, c_2; x, y)$	:	İkinci Çeşit Appell Hipergeometrik Fonksiyonu
$F_3(a_1, a_2, a_3, a_4; c_1; x, y)$	:	Üçüncü Çeşit Appell Hipergeometrik Fonksiyonu
$F_4(a_1, a_2, ; c_1, c_2; x, y)$	:	Dördüncü Çeşit Appell Hipergeometrik Fonksiyonu
$F_D^3(a, b, c, d; e; x, y, z)$	:	Üç Değişkenli Luricella Hipergeometrik Fonksiyonu
$F_D^n(a, b_1, \ldots, b_n; c; x_1, \ldots, x_n)$	:	n Değişkenli Luricella Hipergeometrik Fonksiyonu
$(a)_n$	:	Pochhammer Sembolü
$K_v(z)$	:	Macdonald Fonkiyonu
$W_{k,m}(x)$	:	Whittaker Fonksiyonu
$\mathrm{erf}(z)$	:	Hata Fonksiyonu
$\mathrm{erfc}(z)$	:	Tamamlayıcı Hata Fonksiyonu
$\Phi(x; \nu; \mu)$	:	Lerch Fonksiyonu

1. GİRİŞ

18. yüzyılda, Leonard Euler (1707-1783) tamsayı olmayan n değerleri için

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

değerlerinin hesaplanması problemiyle uğraşıyordu. Bu problem, Euler'in 1729 yılında faktoriyel fonksiyonunun bir genelleştirilmesi olan

$$\Gamma(\nu) := \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-t} dt, \quad Re(\nu) > 0$$

gamma fonksiyonunu tanımlamasına yol açtı [8]. Bu fonksiyon faktoriyel fonksiyonunun bir genelleştirilmesi olduğundan, uzun yıllar boyunca faktoriyel fonksiyonlarıyla tanımlanan bazı fonksiyon ve işlemlerin genelleştirilmesinde kullanıldı. Bu uygulamalara ek olarak bir çok elementer olmayan integralin tespitinde de sıklıkla gamma fonksiyonuna başvuruldu.

Gamma fonksiyonunun keşfinden 43 sene sonra 1771 yılında Euler, aslında gamma fonksiyonlarının özel bir kombinasyonu olan ve *1. tip Euler integrali* olarak da bilinen

$$B(\nu, \mu) = \int_0^1 t^{\nu-1} (1-t)^{\mu-1} dt, \quad Re(\nu) > 0, Re(\mu) > 0$$

beta fonksiyonunu tanımladı [3,11,28]. Gamma fonksiyonu için geçerli olan uygulamaların çoğu beta fonksiyonu için de geçerliydi. Kullanım alanları gamma fonksiyonunun gölgesinde kalsa da (gamma fonksiyonlarının özel bir kombinasyonu biçiminde yazılabildiğinden), gamma fonksiyonunun aksine beta fonksiyonu iki değişkenliydi ve simetri özelliğine sahipti. Böylece istatistiksel dağılım teorisinde kendisine çok geniş bir kullanım alanı buldu.

Sonraki yıllarda Legendre (1752-1833), toplamları gamma fonksiyonunu veren ve gamma fonksiyonunun integral sınırları üzerinden bir gennellemesi olan

$$\gamma(\nu, x) := \int_0^x t^{\nu-1} e^{-t} dt, \quad Re(\nu) > 0$$
$$\Gamma(\nu, x) := \int_x^\infty t^{\nu-1} e^{-t} dt$$

tam olmayan gamma fonksiyonlarını tanımladı [8]. Bu fonksiyonlar uygulamalı matematik, fizik, istatistik ve mühendislik alanlarındaki pek çok problemin kapalı form çözümlerinin elde edilmesinde kullanıldı.

Bu çalışmaları *tam olmayan beta fonksiyonu*

$$B_x(\nu,\mu) = \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}dt, \quad 0 \leq x < 1$$

izledi [16,25]. Bu fonksiyon olasılık ve istatistik alanındaki en önemli dağılımlardan biri olan ve tam olmayan beta fonksiyonunun orjinal beta fonksiyonuna oranı olarak verilen *beta dağılımını* tanımlamakta kullanıldı [3].

Bu fonksiyonların kullanım alanları arttıkça çok çeşitli genelleştirmeleri tanımlandı. Bu genelleştirmelerden biri de Chaudhry ve Zubair tarafından 1994 yılında verilen ve gamma fonksiyonunun tanım kümesini tüm kompleks düzleme genişleten

$$\Gamma(\nu;b) := \int_0^\infty t^{\nu-1}e^{-t-\frac{b}{t}}dt, \quad (Re(b) > 0; b = 0, Re(\nu) > 0)$$

genişletilmiş gamma fonksiyonudur [7]. Benzer bir düşünceyle 1997 yılında, yine Chaudhry ve ark. tarafından *genişletilmiş beta fonksiyonu*

$$B(\nu,\mu;b) = \int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}e^{-\frac{b}{t(1-t)}}dt, \quad Re(b) > 0$$

tanımlandı [9]. Bu fonksiyonun da tanım kümesi tüm kompleks düzlemdi ve yeni fonksiyon da simetri özelliğini sağlıyordu.

Literatür tarandığında yukarıda bahsedilen genişletilmiş fonksiyonlar hakkında pek çok yayına [6,7,13,20-24] ve tezlere [5,26,30,31] rastlamak mümkündür. Son yıllarda genişletilmiş fonksiyonlar yardımıyla tek ve çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonların da genişletilmeleri elde edilmiştir [10,12,22,23,27].

Bu tez çalışmasında beta, tam olmayan beta, genişletilmiş beta ve genişletilmiş tam olmayan beta fonksiyonları ele alınacak, bu fonksiyonlar üzerine bugüne kadar yapılan çalışmalardan derlenen temel özellikleri, sonsuz seri ve integral gösterimleri ile diğer fonksiyonlarla olan ilişkileri ispatlarıyla birlikte verilecektir.

2. ÖNBİLGİLER

Bu bölümde tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan matematiksel kavramların tanımları verilecektir.

Tanım 2.1. a reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere $(a)_n$ ile gösterilen *Pochhammer Sembolü*

$$(a)_n := a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $(a)_0 = 1$ kabul edilir [2].

Pochhammer Sembolü tanımından

$$\begin{aligned}
(a)_n &= \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \\
(a)_{n+1} &= a(a+1)_n = (a)_n(a+n) \\
(a)_{n+m} &= (a)_n(a+n)_m = (a)_m(a+m)_n \\
\frac{(a)_n}{(b)_n} &= \frac{B(a+n, b-a)}{B(a, b-a)}
\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür [2].

Tanım 2.2. a_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ ve c_j $(j = 1, 2, \dots, q)$ kompleks parametreler, p ve q sıfır ya da pozitif bir tamsayı ve $c_j \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere,

$${}_pF_q(a_1, ..., a_p; c_1, ..., c_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n ... (a_p)_n}{(c_1)_n ... (c_q)_n} \frac{x^n}{n!}$$

şeklinde ifade edilen seriye *Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon* denir [3].

Yukarıdaki seride $p = 2$ ve $q = 1$ alınırsa

$${}_2F_1(a, b; c; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$$

Gauss hipergeometrik fonksiyonu ve benzer şekilde $p = 1$ ve $q = 1$ alınırsa

$$
{}_1F_1(a, c; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}
$$

Konfluent hipergeometrik fonksiyonu elde edilir [3].

Tanım 2.3. $max\{|x|, |y|\} < 1$ olmak üzere,

$$
F_1(a_1, a_2, a_3; c_1; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n} (a_2)_m (a_3)_n}{(c_1)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}
$$

ile verilen seriye 1. çeşit, $|x| + |y| < 1$ olmak üzere,

$$
F_2(a_1, a_2, a_3; c_1, c_2; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n} (a_2)_m (a_3)_n}{(c_1)_m (c_2)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}
$$

ile verilen seriye 2. çeşit, $|x| < 1$, $|y| < 1$ olmak üzere,

$$
F_3(a_1, a_2, a_3, a_4; c_1; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (a_2)_n (a_3)_m (a_4)_n}{(c_1)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}
$$

ile verilen seriye 3. çeşit ve $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1$ olmak üzere,

$$
F_4(a_1, a_2, ; c_1, c_2; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n} (a_2)_{m+n}}{(c_1)_m (c_2)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}
$$

ile verilen seriye 4. çeşit *Appell Hipergeometrik Fonksiyonları* denir [29].

Tanım 2.4. $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$ olmak üzere,

$$
F_D^{(3)}(a, b, c, d; e; x, y, z) = \sum_{i_1, i_2, i_3 = 0}^{\infty} \frac{(a)_{i_1+i_2+i_3} (b)_{i_1} (c)_{i_2} (d)_{i_3}}{(e)_{i_1+i_2+i_3} i_1! i_2! i_3!} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}
$$

ile verilen seriye *üç değişkenli Lauricella fonksiyonu* denir [15].

Tanım 2.5. $Re(c) > Re(a) > 0$ olmak üzere,

$$
F_D^{(n)}(a, b_1, \ldots, b_n; c; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty} \frac{(a)_{i_1+\ldots+i_n} (b_1)_{i_1} \ldots (b_n)_{i_n}}{(c)_{i_1+\ldots+i_n} i_1! \ldots i_n!} {x_1}^{i_1} \ldots {x_n}^{i_n}
$$

ile verilen seriye *n değişkenli Lauricella fonksiyonu* denir [15].

Tanım 2.6. $z > 0$ ve $v \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ olmak üzere,

$$K_v(z) := \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\nu+1}} e^{-\frac{1}{2}z(t+t^{-1})} dt$$

genelleştirilmiş integrali ile verilen fonksiyona *Macdonald fonksiyonu* denir [17].

Tanım 2.7. $m - k + \frac{1}{2} > 0$ olmak üzere

$$W_{k,m}(x) := \frac{x^k e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(m - k + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-t} t^{m-k+\frac{1}{2}} (1 + \frac{t}{x})^{m+k-\frac{1}{2}} dt$$

biçiminde verilen fonksiyona *Whittaker fonksiyonu* denir [18].

Tanım 2.8. $-\infty < z < \infty$ olmak üzere *hata* ve *tamamlayıcı hata fonksiyonları* sırasıyla

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(z) &:= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \\ \operatorname{erfc}(z) &:= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

biçiminde verilir. Bu iki fonksiyon

$$\operatorname{erf}(z) + \operatorname{erfc}(z) = 1$$

bağıntısını sağlar [3].

Tanım 2.9. $|x| < 1, \mu \neq 0, -1, \ldots$ olmak üzere *Lerch fonksiyonu*

$$\Phi(x; \nu; \mu) := \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{(n + \mu)^\nu}$$

şeklinde tanımlanır [25].

3. BETA FONKSİYONU

Bu bölümde Euler ve Legendre tarafından çalışılan ve 1. tip Euler integrali olarak da bilinen beta fonksiyonu ve özellikleri hakkında temel bilgiler verilecektir.

Tanım 3.1. $Re(\nu) > 0, Re(\mu) > 0$ olmak üzere, Euler tarafından tanımlanan

$$B(\nu,\mu) = \int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}dt \tag{3.1}$$

integraline beta fonksiyonu denir [11, 28].

Beta fonksiyonunun gamma fonksiyonu ile ilişkisi

$$B(\nu,\mu) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}$$

şeklinde olup, bu ifade sıfırdan büyük her $\nu, \mu \in \mathbb{C}$ için geçerlidir [28]. Buradan görüleceği gibi beta fonksiyonu simetriktir, yani

$$B(\nu,\mu) = B(\mu,\nu)$$

eşitliği mevcuttur [28].

Ayrıca $B(\nu+1,\mu)$ ile $B(\nu,\mu+1)$ fonksiyonları birlikte ele alınırsa

$$\begin{aligned} B(\nu+1,\mu) + B(\nu,\mu+1) &= \int_0^1 t^{\nu}(1-t)^{\mu-1}dt + \int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{\mu}dt \\ &= B(\nu,\mu) \qquad (3.2) \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir.

Beta fonksiyonunun (3.1) ile verilen integral gösteriminde $(1-t)^{\mu-1}$ yerine

$$(1-t)^{\mu-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\mu)_n}{n!} t^n$$

seri açılımı yazılırsa $Re(\mu) > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
B(\nu,\mu) &= \int_0^1 t^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\mu)_n}{n!} t^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\mu)_n}{n!} \int_0^1 t^{\nu+n-1} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\mu)_n}{n!(\nu+n)}
\end{aligned}$$

sonsuz toplamına ulaşılır.

Ayrıca (3.1) integralinde μ yerine $\mu - 1$ alınıp

$$(1-t)^{\mu-2} = (1-t)^{\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
B(\nu,\mu-1) &= \int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-2} dt \\
&= \int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^{\nu+n-1}(1-t)^{\mu-1} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B(\nu+n,\mu)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece $Re(\mu) > 0$ olmak üzere beta fonksiyonunun farklı bir seri gösterimine ulaşılır.

(3.1) integralinde farklı dönüşümler yapılarak beta fonksiyonunun başka integral gösterimleri de elde edilebilir.

Beta fonksiyonunun (3.1) ile verilen integral gösteriminde

i) $t = u^2$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} B(\nu,\mu) &= 2\int_0^1 (u^2)^{\nu-1}(1-u^2)^{\mu-1}udu \\ &= 2\int_0^1 u^{2\nu-1}(1-u^2)^{\mu-1}du \end{aligned}$$

ii) $t = \frac{u}{c+u}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} B(\nu,\mu) &= \int_0^\infty (\frac{u}{c+u})^{\nu-1}(1-\frac{u}{c+u})^{\mu-1}\frac{c}{(c+u)^2}du \\ &= c^\mu \int_0^\infty \frac{u^{\nu-1}}{(c+u)^{\nu+\mu}}du \end{aligned} \tag{3.3}$$

iii) $t = \sin^2(u)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} B(\nu,\mu) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(u))^{2\nu-1}(1-\sin^2(u))^{2\mu-1}\sin(u)\cos(u)du \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\nu-1}(u)\cos^{2\mu-1}(u)du \end{aligned}$$

iv) $t = \frac{u-a}{c-a}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_a^c (\frac{u-a}{c-a})^{\nu-1}(1-\frac{u-a}{c-a})^{\mu-1}\frac{1}{c-a}du \\ &= (c-a)^{1-\nu-\mu}\int_a^c (u-a)^{\nu-1}(c-u)^{\mu-1}du \end{aligned}$$

integral gösterimleri elde edilir.

Ayrıca (3.3) integralinde $c = 1$ alınırsa,

$$B(\nu,\mu) = \int_0^\infty \frac{u^{\nu-1}}{(1+u)^{\nu+\mu}}du \tag{3.4}$$

bulunur. Beta fonksiyonu simetrik olduğundan

$$B(\nu,\mu)=\int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}}{(1+u)^{\nu+\mu}}du \tag{3.5}$$

eşitliği yazılabilir. (3.4) ve (3.5) ifadelerinin toplamından

$$\begin{aligned}
2B(\nu,\mu) &= \int_0^\infty \Big(\frac{u^{\nu-1}}{(1+u)^{\nu+\mu}}+\frac{u^{\mu-1}}{(1+u)^{\nu+\mu}}\Big)du \\
B(\nu,\mu) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u^{\nu-1}+u^{\mu-1}}{(1+u)^{\nu+\mu}}du
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ifade beta fonksiyonunun diğer bir integral gösterimidir [4, 11, 16, 19, 25].

Beta fonksiyonunun (3.1) integral gösterimi kullanılarak çeşitli hipergeometrik fonksiyonların integral gösterimleri elde edilir:

$Re(b) > Re(a) > 0$ olmak üzere konfluent hipergeometrik fonksiyonunun

$${}_1F_1(a;b;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}\frac{z^n}{n!}$$

seri gösteriminde $\frac{(a)_n}{(b)_n}$ ifadesi yerine beta fonksiyonu yazılırsa,

$${}_1F_1(a;b;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(a+n,b-a)}{B(a,b-a)}\frac{z^n}{n!}$$

elde edilir. Burada $B(a+n,b-a)$ ifadesinin integral gösterimi kullanılarak

$${}_1F_1(a;b;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{B(a,b-a)}\frac{z^n}{n!}\int_0^1 t^{a+n-1}(1-t)^{b-a-1}dt$$

bulunur. Bu seri düzgün yakınsak olduğundan toplam ile integral yer değiştirirse

$$\begin{aligned}
{}_1F_1(a;b;z) &= \int_0^1 \frac{1}{B(a,b-a)}t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zt)^n}{n!}dt \\
&= \frac{1}{B(a,b-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}e^{zt}dt
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu konfluent hipergeometrik fonksiyonu için bir integral gösterimidir [3].

$|z|<1; Re(c)>Re(b)>0$ olmak üzere Gauss hipergeometrik fonksiyonunun

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} $$

ile verilen seri gösteriminde $\frac{(b)_n}{(c)_n}$ sembolü yerine beta fonksiyonu yazılırsa

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{B(b+n,c-b)}{B(b,c-b)} \frac{z^n}{n!} dt $$

olur. $B(b+n,c-b)$ ifadesinin integral gösterimi kullanılarak

$$ \begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1} \frac{z^n}{n!} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{B(b,c-b)} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{(zt)^n}{n!} dt \\ &= \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt \end{aligned} $$

elde edilir. Bu Gauss fonksiyonu için bir integral gösterimidir [3].

$|x| < 1$ olmak üzere Φ_1 iki değişkenli hipergeometrik fonksiyonunun

$$ \Phi_1(a,b;c;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_m}{(c)_{m+n} m! n!} x^m y^n $$

biçimindeki seri gösteriminde $\frac{(a)_{m+n}}{(c)_{m+n}}$ ifadesi yerine beta fonksiyonu yazılırsa

$$ \Phi_1(a,b;c;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_m B(a+m+n,c-a)}{B(a,c-a) m! n!} x^m y^n $$

olarak bulunur. Burada $B(a+m+n,c-a)$ ifadesi yerine integral gösterimi kullanılırsa

$$\Phi_1(a,b;c;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_m x^m y^n}{B(a,c-a)m!n!}\int_0^1 t^{a+m+n-1}(1-t)^{c-a-1}dt$$

elde edilir. Bu seri düzgün yakınsak olduğundan toplam ile integral yer değiştirirse

$$\begin{aligned}\Phi_1(a,b;c;x,y)&=\int_0^1\frac{1}{B(a,c-a)}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\sum_{m=0}^{\infty}(b)_m\frac{(xt)^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(yt)^n}{n!}dt\\&=\frac{1}{B(a,c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}e^{yt}dt\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu Φ_1 fonksiyonu için bir integral gösterimidir.

Benzer şekilde $max\{|x|,|y|\}<1$ olmak üzere F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonunun

$$F_1(a,b,c;d;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(c)_n}{(d)_{m+n}m!n!}x^m y^n \quad ,$$

biçimindeki seri gösteriminde $\frac{(a)_{m+n}}{(d)_{m+n}}$ yerine beta fonksiyonu kullanılarak

$$F_1(a,b,c;d;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_m(c)_n B(a+m+n,d-a)}{B(a,d-a)m!n!}x^m y^n$$

elde edilir. Burada $B(a+m+n,d-a)$ ifadesinin integral gösterimi kullanılırsa

$$F_1(a,b,c;d;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_m(c)_n x^m y^n}{B(a,d-a)m!n!}\int_0^1 t^{a+m+n-1}(1-t)^{d-a-1}dt$$

bulunur. Bu seri düzgün yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned}F_1(a,b,c;d;x,y)&=\int_0^1\frac{1}{B(a,d-a)}t^{a-1}(1-t)^{d-a-1}\sum_{m=0}^{\infty}(b)_m\frac{(xt)^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}(c)_n\frac{(yt)^n}{n!}dt\\&=\frac{1}{B(a,d-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{d-a-1}(1-xt)^{-b}(1-yt)^{-c}dt\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonu için bir integral gösterimi olur.

$|x| < 1, |y| < 1, |z| < 1$ olmak üzere üç değişkenli Luricella hipergeometrik fonksiyonunun

$$F_D^{(3)}(a,b,c,d;e;x;y;z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+v}(b)_m(c)_n(d)_v}{(e)_{m+n+v}m!n!v!} x^m y^n z^v$$

seri toplamında $\frac{(a)_{m+n+v}}{(e)_{m+n+v}}$ ifadesi beta fonksiyonu biçiminde yazılırsa

$$F_D^{(3)}(a,b,c,d;e;x;y;z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(b)_m(c)_n(d)_v B(a+m+n+v, e-a)}{B(a,e-a)m!n!v!} x^m y^n z^v$$

sonucuna ulaşılır. Burada $B(a+m+n+v, e-a)$ ifadesi yerine integral gösterimi kullanılırsa

$$\begin{aligned} &F_D^{(3)}(a,b,c,d;e;x;y;z) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(b)_m(c)_n(d)_v x^m y^n z^v}{B(a,e-a)m!n!v!} \int_0^1 t^{a+m+n+v-1}(1-t)^{e-a-1}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{B(a,e-a)} t^{a-1}(1-t)^{e-a-1} \sum_{m=0}^{\infty}(b)_m \frac{(xt)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty}(c)_n \frac{(yt)^n}{n!} \sum_{v=0}^{\infty}(d)_v \frac{(zt)^v}{v!} dt \end{aligned}$$

üç değişkenli Luricella hipergeometrik fonksiyonunun bir integral gösterimi olan

$$\begin{aligned} &F_D^{(3)}(a,b,c,d;e;x;y;z) \\ &= \frac{1}{B(a,e-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{e-a-1}(1-xt)^{-b}(1-yt)^{-c}(1-zt)^{-d}dt \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$Re(c) > Re(a) > 0$ olmak üzere n değişkenli Luricella hipergeometrik fonksiyonunun

$$F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{i_1+i_2+\ldots+i_n}(b_1)_{i_1}\ldots(b_n)_{i_n}}{(c)_{i_1+i_2+\ldots+i_n} i_1!\ldots i_n!} {x_1}^{i_1}\ldots {x_n}^{i_n}$$

şeklindeki seri açılımı bilinmektedir. Bu seri gösteriminde $\frac{(a)_{i_1+i_2+\ldots+i_n}}{(c)_{i_1+i_2+\ldots+i_n}}$ ifadesi yerine beta fonksiyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned} &F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;x_1,\ldots,x_n) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty} \frac{(b_1)_{i_1}\ldots(b_n)_{i_n} B(a+i_1+\ldots+i_n,c-a)}{B(a,c-a)i_1!\ldots i_n!} {x_1}^{i_1}\ldots {x_n}^{i_n} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $B(a+i_1+\ldots+i_n,c-a)$ ifadesi integral şeklinde yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} &F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;x_1,\ldots,x_n) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty} \frac{(b_1)_{i_1}\ldots(b_n)_{i_n}}{B(a,c-a)} \int_0^1 t^{a+i_1+\ldots+i_n-1}(1-t)^{c-a-1} \frac{{x_1}^{i_1}\ldots {x_n}^{i_n}}{i_1!\ldots i_n!} dt \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki seri düzgün yakınsak olduğundan toplam ile integral yer değiştirirse

$$\begin{aligned} &F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;x_1,\ldots,x_n) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{B(a,c-a)} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \sum_{i_1=0}^{\infty}(b_1)_{i_1}\frac{(x_1t)^{i_1}}{i_1!}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}(b_n)_{i_n}\frac{(x_nt)^{i_n}}{i_n!} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{B(a,c-a)} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-x_1t)^{-b_1}\ldots(1-x_nt)^{-b_n} dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade $F_D^{(n)}$ n değerli Luricella hipergeometrik fonksiyonu için bir integral gösterimidir.

3.1. GENİŞLETİLMİŞ BETA FONKSİYONU

Gamma fonksiyonunun integral gösterimine $e^{-t-\frac{b}{t}}$ eklenerek elde edilen genişletilmiş gamma fonksiyonuna benzer olarak bu bölümde genişletilmiş beta fonksiyonu tanımlanacak, bazı özellikleri, integral ve seri gösterimleri verilecektir.

Tanım 3.2. $\nu,\mu \in \mathbb{C}$ ve $Re(b) > 0$ olmak üzere genişletilmiş beta fonksiyonu,

$$B(\nu,\mu;b) = \int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır [8, 9].

$b = 0$ durumunda $Re(\nu) > 0, Re(\mu) > 0$ olmak üzere,

$$B(\nu, \mu; 0) = B(\nu, \mu)$$

orjinal beta fonksiyonu elde edilir. (3.6) integralinde $t \to 1 - t$ dönüşümü yapılırsa

$$B(\nu, \mu; b) = B(\mu, \nu; b), \quad Re(b) \geq 0$$

olduğu görülür. Yani beta fonksiyonunun bu genişletmesi simetri özelliğini korur.

(3.6) ile verilen genişletilmiş beta fonksiyonunun b parametresine göre n. basamaktan türevinin

$$\frac{\partial^n B(\nu, \mu; b)}{\partial b^n} = (-1)^n B(\nu - n, \mu - n; b)$$

olduğu tümevarım yardımıyla gösterilebilir. Şöyle ki
$k = 1$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B(\nu, \mu; b)}{\partial b} &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{t(1-t)}\right) t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1} e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt \\
&= (-1) \int_0^1 t^{\nu-2}(1-t)^{\mu-2} e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt \\
&= (-1) B(\nu - 1, \mu - 1; b)
\end{aligned}$$

$k = 2$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 B(\nu, \mu; b)}{\partial b^2} &= \frac{\partial}{\partial b} \left[(-1) \int_0^1 t^{\nu-2}(1-t)^{\mu-2} e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt \right] \\
&= (-1) \int_0^1 \left(-\frac{1}{t(1-t)}\right) t^{\nu-2}(1-t)^{\mu-2} e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt \\
&= (-1)^2 \int_0^1 t^{\nu-3}(1-t)^{\mu-3} e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt \\
&= (-1)^2 B(\nu - 2, \mu - 2; b)
\end{aligned}$$

doğru olup $k = n$ için

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n B(\nu,\mu;b)}{\partial b^n} &= (-1)^n B(\nu-n,\mu-n;b)\\ &= (-1)^n \int_0^1 t^{\nu-n-1}(1-t)^{\mu-n-1} e^{-\frac{b}{t(1-t)}}\,dt\end{aligned}$$

doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda $k = n+1$ için

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1} B(\nu,\mu;b)}{\partial b^{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial b}\left[(-1)^n \int_0^1 t^{\nu-n-1}(1-t)^{\mu-n-1} e^{-\frac{b}{t(1-t)}}\,dt\right]\\ &= (-1)^n \int_0^1 \left(-\frac{1}{t(1-t)}\right) t^{\nu-n-1}(1-t)^{\mu-n-1} e^{-\frac{b}{t(1-t)}}\,dt\\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 t^{\nu-n-2}(1-t)^{\mu-n-2} e^{-\frac{b}{t(1-t)}}\,dt\\ &= (-1)^{n+1} B(\nu-n-1,\mu-n-1;b)\end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca $B(\nu,\mu+1;b)$ ile $B(\nu+1,\mu;b)$ fonksiyonları birlikte ele alınırsa

$$B(\nu,\mu+1;b) + B(\nu+1,\mu;b) \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{\mu} e^{-\frac{b}{t(1-t)}}\,dt + \int_0^1 t^{\nu}(1-t)^{\mu-1} e^{-\frac{b}{t(1-t)}}\,dt\\ &= \int_0^1 (1-t+t) t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1} e^{-\frac{b}{t(1-t)}}\,dt\end{aligned}$$

$$= B(\nu,\mu;b) \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise $b = 0$ için beta fonksiyonunun (3.2) ile verilen özelliğinin korunduğunu gösterir.

Ayrıca (3.6) integralinde $t = \frac{u}{1+u}$ dönüşümü yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
B(\nu, \mu; b) &= \int_0^\infty (\frac{u}{1+u})^{\nu-1}(1 - \frac{u}{1+u})^{\mu-1} e^{-b(u+u^{-1}+2)} \frac{1}{(1+u)^2} du \\
&= e^{(-2b)} \int_0^\infty \frac{u^{\nu-1} e^{-b(u+u^{-1})}}{(1+u)^{\nu+\mu}} du \\
&= e^{(-2b)} \int_0^\infty \frac{u^{\nu-1}}{(1+u)^{\nu+\mu}} e^{-b(u+u^{-1})} du
\end{aligned}
$$

olur. $e^{-b(u+u^{-1})}$ fonksiyonu $u = 1$ noktasında maksimum değerini aldığından

$$B(\nu, \mu; b) \leq e^{(-4b)} B(\nu, \mu)$$

elde edilir. Böylece $\nu > 0, \mu > 0, b \geq 0$ olmak üzere genişletilmiş beta fonksiyonu ile orjinal beta fonksiyonu arasında bir eşitsizlik ilişkisi bulunmuş olur.

Genişletilmiş beta fonksiyonunun (3.6) integrali ile verilen gösteriminde $(1-t)^{\mu-1}$ ifadesi yerine

$$(1-t)^{\mu-1} = (1-t)^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

seri açılımı kullanılırsa $Re(b) > 0$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
B(\nu, \mu; b) &= \int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^{\nu+n-1}(1-t)^{\mu} e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B(\nu+n, \mu+1; b)
\end{aligned}
$$

sonsuz toplamına ulaşılır.

Ayrıca (3.6) integralinde μ yerine $1-\mu$ alınıp $(1-t)^{-\mu}$ ifadesinin Maclaurin seri açılımı

$$(1-t)^{-\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu)_n}{n!}t^n$$

kullanılırsa

$$\begin{aligned}
B(\nu,1-\mu;b) &= \int_0^1 t^{\nu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu)_n}{n!}t^n e^{-\frac{b}{t(1-t)}}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu)_n}{n!}\int_0^1 t^{\nu+n-1}(1-t)^0 e^{-\frac{b}{t(1-t)}}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu)_n}{n!}B(\nu+n,1;b)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu ise $Re(b)>0$ olmak üzere genişletilmiş beta fonksiyonunun diğer bir seri gösterimidir.

(3.6) integralinde bazı dönüşümler yapılarak genişletilmiş beta fonksiyonunun farklı integral gösterimleri elde edilebilir. Bunlardan bazıları

i) $t=\cos^2\theta$ dönüşümü ile,

$$\begin{aligned}
B(\nu,\mu;b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta)^{\nu-1}(1-\cos^2\theta)^{\mu-1}e^{-\frac{b}{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}}d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2\nu-1}(\sin\theta)^{2\mu-1}e^{-b\sec^2\theta\csc^2\theta}d\theta
\end{aligned}$$

ii) $t=\frac{u}{1+u}$ dönüşümü ile,

$$\begin{aligned}
B(\nu,\mu;b) &= \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+u)^2}(\frac{u}{1+u})^{\nu-1}(1-\frac{u}{1+u})^{\mu-1}e^{-b(u+u^{-1}+2)}du \\
&= e^{-2b}\int_0^{\infty}\frac{u^{\nu-1}}{(1+u)^{\nu+\mu}}e^{-b(u+u^{-1})}du \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

iii) $t = \frac{1+u}{2}$ dönüşümü ile,

$$\begin{aligned} B(\nu,\mu;b) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{1+u}{2})^{\nu-1}(1-\frac{1+u}{2})^{\mu-1}e^{\frac{-4b}{1-u^2}}du \\ &= 2^{1-\nu-\mu}\int_{-1}^{1}(1+u)^{\nu-1}(1-u)^{\mu-1}e^{\frac{-4b}{1-u^2}}du \end{aligned} \tag{3.10}$$

biçimindedir.

Ayrıca genişletilmiş beta fonksiyonunun simetri özelliğinden

$$B(\nu,\mu;b) = e^{-2b}\int_0^\infty \frac{u^{\nu-1}}{(1+t)}e^{-b(u+u^{-1})}du$$

ve

$$B(\nu,\mu;b) = e^{-2b}\int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}}{(1+u)}e^{-b(u+u^{-1})}du$$

olup,

$$B(\nu,\mu;b) = \frac{1}{2}e^{-2b}\int_0^\infty \frac{u^{\nu-1}+u^{\mu-1}}{(1+u)^{\nu+\mu}}e^{-b(u+u^{-1})}du$$

biçiminde bir integral gösterimi daha bulunabilir.

$Re(b) > 0$ olmak üzere (3.9) integral gösteriminde $\mu = -\nu$ alınırsa

$$B(\nu,-\nu;b) = e^{-2b}\int_0^\infty \frac{t^{\nu-1}}{(1+t)^{\nu-\nu}}e^{-b(t+t^{-1})}dt$$

olur. Burada $t = \frac{1}{u}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} B(\nu,-\nu;b) &= e^{-2b}\int_0^\infty (\frac{1}{u})^{\nu-1}e^{-b(u+u^{-1})}\frac{1}{u^2}du \\ &= 2e^{-2b}\left[\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{u^{\nu+1}}e^{-b(u+u^{-1})}du\right] \end{aligned}$$

olup, sağ taraftaki integral Macdonald fonksiyonu cinsinden

$$B(\nu, -\nu; b) = 2e^{-2b} K_\nu(2b) \tag{3.11}$$

şeklinde yazılabilir [14].

Yukarıdaki eşitlikte $Re(b) > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $\nu = n + \frac{1}{2}$ alınırsa

$$B\left(n + \frac{1}{2}, -(n + \frac{1}{2}); b\right) = 2e^{-2b} K_{n+\frac{1}{2}}(2b)$$

özel durumu elde edilir. Bu denklemde

$$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = (\frac{\pi}{2z})^{\frac{1}{2}} e^{-z} \sum_{m=0}^{n} \frac{(2z)^{-m}}{m!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

eşitliği [8] kullanılarak

$$\begin{aligned} B\left(n + \frac{1}{2}, -n - \frac{1}{2}; b\right) &= 2e^{-2b} (\frac{\pi}{4b})^{1/2} e^{-2b} \sum_{m=0}^{n} \frac{(4b)^{-m}(n+m)!}{m!(n-m)!} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-4b} \sum_{m=0}^{n} \frac{(n+m)! e^{-4b}}{m!(n-m)!} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

$Re(b) > 0$ olmak üzere (3.10) integralinde $\mu = \nu$ alınırsa

$$\begin{aligned} B(\nu, \nu; b) &= 2^{1-2\nu} \int_{-1}^{1} (1+t)^{\nu-1} (1-t)^{\nu-1} e^{\frac{-4b}{(1-t^2)}} dt \\ &= 2^{1-2\nu} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1} e^{\frac{-4b}{(1-t^2)}} dt \\ &= 2^{2-2\nu} \int_{-1}^{0} (1-t^2)^{\nu-1} e^{\frac{-4b}{(1-t^2)}} dt \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\xi = 1 - t^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} B(\nu,\nu;b) &= \frac{1}{2}2^{2-2\nu}\int_0^1 \xi^{\nu-1}e^{\frac{-4b}{\xi}}(1-\xi)^{-1/2}d\xi \\ &= 2^{2-2\nu}\int_0^1 \xi^{\nu-1}(1-\xi)^{1/2-1}e^{\frac{-4b}{\xi}}d\xi \end{aligned}$$

olup, sağ taraftaki integral Whittaker fonksiyonu cinsinden

$$B(\nu,\nu;b) = \sqrt{\pi}2^{-\nu}b^{\frac{(\nu-1)}{2}}e^{-2b}W_{\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}}(4b)$$

biçiminde verilir [16].

Yukarıdaki eşitlikte $\nu = \frac{1}{2}$ özel değeri kullanılırsa

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};b\right) = \sqrt{\pi}2^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{4}}e^{-2b}W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(4b)$$

olarak bulunur [3]. Sağ taraftaki integral tamamlayıcı hata fonksiyonu cinsinden

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};b\right) = \pi\mathrm{erfc}(2\sqrt{b})$$

şeklinde yazılır [8].

$n = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere (3.7) gösteriminde $\mu = -\nu - n$ alınırsa

$$B(\nu,-\nu-n;b) = B(\nu,-\nu-n+1;b) + B(\nu+1,-\nu-n;b)$$

elde edilir. Bu eşitliğin binom gösterimi cinsinden

$$B(\nu,-\nu-n;b) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B(\nu+k,-\nu-k;b) \tag{3.12}$$

biçiminde olduğu tümevarım yardımıyla kolayca gösterilebilir. Şöyle ki:

$n = 1$ için

$$B(\nu, -\nu - 1; b) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} B(\nu + k, -\nu - k; b)$$
$$= B(\nu, -\nu; b) + B(\nu + 1, -\nu - 1; b)$$

eşitliği elde edilir. (3.7) gösteriminde $\mu = -\nu - 1$ alınırsa bu ifadenin doğru olduğu görülür.

$n = m$ için (3.12) eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Yani;

$$B(\nu, -\nu - m; b) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B(\nu + k, -\nu - k; b) \tag{3.13}$$

sağlansın.

$n = m + 1$ için (3.7) ifadesinden

$$B(\nu, -\nu - m - 1; b) = B(\nu, -\nu - m; b) + B(\nu + 1, -\nu - m - 1; b)$$

elde edilir. Burada (3.13) kabulü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&B(\nu, -\nu - m - 1; b)\\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B(\nu + k, -\nu - k; b) + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B(\nu + k + 1, -\nu - k - 1; b)\\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B(\nu + k, -\nu - k; b) + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} B(\nu + k, -\nu - k; b)\\
&= B(\nu, -\nu; b) + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} B(\nu + k, -\nu - k; b)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} B(\nu + k, -\nu - k; b) + B(\nu + m + 1, -\nu - m - 1; b)\\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} B(\nu + k, -\nu - k; b)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da (3.12) eşitliğinin $n = m + 1$ için doğru olduğunu gösterir [5].

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki genişletilmiş beta fonksiyonu yerine (3.11) denkleminde verilen Macdonald fonksiyonu yazılırsa

$$B(\nu, -\nu - n; b) = 2e^{-2b} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} K_{\nu+k}(2b)$$

eşitliği bulunur.

Genişletilmiş beta fonksiyonu, özellikleri, diğer özel fonksiyonlarla olan ilişkileri ve bu fonksiyon yardımıyla tanımlanan hipergeometrik fonksiyonlar hakkında daha ayrıntılı bilgilere [5] yayınından erişilebilir.

4. TAM OLMAYAN BETA FONKSİYONU

Bu bölümde yoğun olarak istatistikte uygulaması olmasının yanı sıra ekonomi, finans ve telekominikasyon gibi alanlarda da kullanılan tam olmayan beta fonksiyonundan bahsedilecektir.

Tanım 4.1. $0 \leq x < 1$ olmak üzere tam olmayan beta fonksiyonu

$$B_x(\nu,\mu) = \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}dt \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilir [8, 9].

Özel olarak (4.1) integralinde

$\nu = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} B_x(1,\mu) &= \int_0^x (1-t)^{\mu-1}dt \\ &= -\int_1^{1-x} u^{\mu-1}du = \left.\frac{u^\mu}{\mu}\right|_{1-x}^{1} = \frac{1}{\mu}\{1-(1-x)^\mu\} \end{aligned}$$

$\mu = 1$ alınırsa

$$B_x(\nu,1) = \int_0^x t^{\nu-1}dt = \left.\frac{t^\nu}{\nu}\right|_0^x = \frac{x^\nu}{\nu}$$

eşitliği elde edilir.

$B_x(\mu,\nu)$ ve $B_{1-x}(\nu,\mu)$ fonksiyonları birlikte ele alındığında

$$\begin{aligned} B_x(\mu,\nu) + B_{1-x}(\nu,\mu) &= \int_0^x t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1}dt + \int_0^{1-x} t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}dt \\ &= \int_0^x t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1}dt - \int_1^x (1-u)^{\nu-1}u^{\mu-1}du \\ &= \int_0^x t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1}dt + \int_x^1 u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1}du \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_x(\mu,\nu) + B_{1-x}(\nu,\mu) &= \int_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1}dt \\
&= B(\nu,\mu)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise tam olmayan beta fonksiyonu ile beta fonksiyonu arasındaki

$$
B_x(\mu,\nu) = B(\nu,\mu) - B_{1-x}(\nu,\mu) \tag{4.2}
$$

ilişkisini verir.

Beta fonksiyonunda olduğu gibi burada da $B_x(\nu+1,\mu)$ ve $B_x(\nu,\mu+1)$ fonksiyonları birlikte ele alınırsa

$$
\begin{aligned}
B_x(\nu+1,\mu) + B_x(\nu,\mu+1) &= \int_0^x t^{\nu}(1-t)^{\mu-1}dt + \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu}dt \\
&= \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}dt \\
B_x(\nu+1,\mu) + B_x(\nu,\mu+1) &= B_x(\nu,\mu) \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

bağıntısı elde edilir.

Tam olmayan beta fonksiyonunun (4.1) ile verilen tanımında $\nu = \nu + 1$ alınıp kısmi integrasyon uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
B_x(\nu+1,\mu) &= \int_0^x t^{\nu}(1-t)^{\mu-1}dt \\
&= \left.\frac{-t^{\nu}(1-t)^{\mu}}{\mu}\right|_0^x + \frac{\nu}{\mu}\int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}dt \\
&= \frac{\nu}{\mu}B_x(\nu,\mu+1) - \frac{x^{\nu}(1-x)^{\mu}}{\mu}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\mu = \mu + 1$ alınıp kısmi integrasyon uygulanırsa da

$$\begin{aligned}
B_x(\nu, \mu+1) &= \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu} dt \\
&= \frac{t^{\nu}(1-t)^{\mu}}{\nu}\bigg|_0^x + \frac{\mu}{\nu}\int_0^x t^{\nu}(1-t)^{\mu-1}dt \\
&= \frac{\mu}{\nu}B_x(\nu+1, \mu) + \frac{x^{\nu}(1-x)^{\mu}}{\nu}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece tam olmayan beta fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
B_x(\nu+1, \mu) &= \frac{\nu}{\mu}B_x(\nu, \mu+1) - \frac{x^{\nu}(1-x)^{\mu}}{\mu} \\
B_x(\nu, \mu+1) &= \frac{\mu}{\nu}B_x(\nu+1, \mu) + \frac{x^{\nu}(1-x)^{\mu}}{\nu}
\end{aligned}$$

indirgeme formülleri elde edilir.

Beta fonksiyonunda olduğu gibi tam olmayan beta fonksiyonunun (4.1) ile verilen tanımında

$$(1-t)^{\mu-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\mu)_n}{n!} t^n$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}
B_x(\nu, \mu) &= \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}dt, \\
&= x^{\nu}\int_0^x t^{\nu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\mu)_n}{n!}t^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\mu)_n}{n!}x^{n+\nu}\int_0^x t^{n+\nu-1}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\mu)_n}{n!(n+\nu)}x^{n+\nu} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu)_n(1-\mu)_n}{(\nu)_{n+1}n!}x^{n+\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_x(\nu,\mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_n(1-\mu)_n}{n!\nu(1+\nu)_n} x^{n+\nu} \\ &= \frac{x^\nu}{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_n(1-\mu)_n}{(1+\nu)_n} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki toplam ifadesi Gauss hipergeometrik fonksiyonuna karşılık gelip

$$B_x(\nu,\mu) = \frac{x^\nu}{\nu} {}_2F_1(\nu, 1-\mu; 1+\nu; x)$$

olarak yazılabilir [16].

Burada $-1 \leq x \leq 1$ olmak üzere,

$${}_2F_1(a,b;c;x) = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; x)$$

ifadesi [25] kullanılarak tam olmayan beta fonksiyonunun Gauss hipergeometrik fonksiyonu cinsinden ikinci bir ifadesi

$$B_x(\nu,\mu) = \frac{x^\nu(1-x)^\mu}{\nu} {}_2F_1(1, \nu+\mu; 1+\nu; x)$$

biçiminde elde edilir.

Yine $x \notin (1,\infty)$ olmak üzere Gauss hipergeometrik fonksiyonunun

$${}_2F_1(a,b;c;x) = (1-x)^{-b} {}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{x}{x-1}\right)$$

eşitliği [3] kullanılarak tam olmayan beta fonksiyonunun Gauss hipergeometrik fonksiyonu cinsinden üçüncü bir ifadesi

$$B_x(\nu,\mu) = \frac{x^\nu(1-x)^{\mu-1}}{\nu} {}_2F_1\left(1, 1-\mu; 1+\nu; \frac{x}{x-1}\right)$$

olarak bulunur.

Negatif indisli tam olmayan beta fonksiyonları için n parametresi pozitif tamsayı olmak üzere

$$B_{-x}(n,\mu)=\int_0^{-x} t^{n-1}(1-t)^{\mu-1}dt$$

integralini ele alalım [8]. Bu integralde $t=\frac{u}{1+u}$ dönüşümü yapılarak

$$\begin{aligned}
B_{-x}(n,\mu) &= \int_0^{\frac{-x}{x+1}} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{n-1}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{\mu-1}\frac{1}{(1+u)^2}du \\
&= -\int_0^{\frac{x}{x+1}} (-t)^{n-1}(1-t)^{-n-\mu}dt \\
&= (-1)^n\int_0^{\frac{x}{x+1}} t^{n-1}(1-t)^{-n-\mu}dt
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $x>0$, $n=1,2,3,\ldots$ için

$$B_{-x}(n,\mu)=(-1)^n B_{\frac{x}{1+x}}(n,1-\mu-n)$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca m parametresi pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$B_{x+1}(\nu,m)=\int_0^{x+1} t^{\nu-1}(1-t)^{m-1}dt$$

integralini ele alalım. Buradan

$$\begin{aligned}
B_{x+1}(\nu,m) &= \int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{m-1}dt+\int_1^{1+x} t^{\nu-1}(1-t)^{m-1}dt \\
&= \beta(\nu,m)-\int_0^{-x} u^{m-1}(1-u)^{\nu-1}du \\
&= \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(m)}{\Gamma(\nu+m)}-(-1)^m B_{\frac{x}{x+1}}(m,1-\nu-m)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise $x\geq 0, \nu>0, m=1,2,3,\ldots$ için

$$B_{x+1}(\nu,m)=\frac{(m-1)!}{(\nu)_m}-(-1)^m B_{\frac{x}{1+x}}(m,1-\nu-m)$$

eşitliğini verir.

Tam olmayan beta fonksiyonunun (4.1) integrali ile verilen gösteriminde $(1-t)^{m-1}$ yerine

$$(1-t)^{m-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-m)_n}{n!}t^n$$

seri açılımı kullanılırsa $0\leq x<1, m=1,2,3,\ldots$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
B_x(\nu,m) &= \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{m-1}dt \\
&= \int_0^x t^{\nu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-m)_n}{n!}t^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-m)_n}{n!}\int_0^x t^{n+\nu-1}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-m)_n x^{n+\nu}}{(n+\nu)n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(m-1)_n x^{n+\nu}}{(n+\nu)n!} \\
&= x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m-1)_n(m-n-1)!}{n!(m-n-1)!}\frac{(-x)^n}{(n+\nu)} \\
&= x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m-1}{n}\frac{(-x)^n}{n+\nu}
\end{aligned}$$

sonsuz toplamına ulaşılır.

Ayrıca

$$B_x(\nu,0)=\int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{-1}dt$$

integralinde $(1-t)^{-1}$ terimi yerine seri açılımı yazılırsa

$$
\begin{aligned}
B_x(\nu,0) &= \int_0^x t^{\nu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{n!}t^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{n+\nu-1}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+\nu}}{n+\nu} \\
&= x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+\nu}
\end{aligned}
$$

sonsuz toplamı elde edilir. Bu ise Lerch fonksiyonu cinsinden

$$B_x(\nu,0) = x^{\nu}\Phi(x;1;\nu)$$

biçiminde yazılabilir.

Beta fonksiyonuna benzer şekilde (4.1) integralinde farklı dönüşümler yapılarak tam olmayan beta fonksiyonunun da çeşitli integral gösterimleri bulunabilir.

i) $0 \leq T = \arcsin\sqrt{x} < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $t = \sin^2 u$ dönüşümü yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
B_x(\nu,\mu) &= 2\int_0^T \sin^{2\nu-2}(u)(1-\sin^2(u))^{\mu-1}\sin(u)\cos(u)du \\
&= 2\int_0^T \sin^{2\nu-1}(u)\cos^{2\mu-1}(u)du
\end{aligned}
$$

ii) $0 \leq T = \text{arctanh}\sqrt{x} < \infty$ olmak üzere $t = \tanh^2 u$ dönüşümü yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
B_x(\nu,\mu) &= 2\int_0^T \tanh^{2\nu-2}(u)(1-\tanh^2(u))^{\mu-1}\tanh(u)sech^2(u)du \\
&= 2\int_0^T \tanh^{2\nu-1}(u)sech^{2\mu}(u)du
\end{aligned}
$$

iii) $\nu > 0, \mu > 0$ olmak üzere $t = ux$ dönüşümü yapılırsa,

$$B_x(\nu,\mu) = x^\nu \int_0^1 u^{\nu-1}(1-xu)^{\mu-1}du$$

iv) $0 \leq T = \frac{x}{1-x} < \infty$ olmak üzere $t = \frac{u}{1+u}$ dönüşümü yapılırsa,

$$B_x(\nu,\mu) = \int_0^T \frac{u^{\nu-1}}{(1+u)^{\nu+\mu}}du$$

integral gösterimleri elde edilir.

Son eşitlikte $\mu = -\nu$ alınırsa

$$B_x(\nu,-\nu) = \frac{1}{\nu}(\frac{x}{1-x})^\nu$$

değeri bulunur.

4.1. OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU

İstatistikte kendisine geniş bir alan bulan olasılık yoğunluk fonksiyonu tam olmayan beta fonksiyonunun beta fonksiyonuna oranı olarak ifade edilir.

Tanım 4.2. $\nu > 0$, $\mu > 0$ ve $0 \leq x < 1$ olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$I_x(\nu,\mu) = \frac{B_x(\nu,\mu)}{B(\nu,\mu)} \tag{4.4}$$

biçiminde tanımlanır [1]. Bu tanım tam olmayan beta fonksiyonu ile ifade edildiğinden tam olmayan beta fonksiyonunda olduğu gibi olasılık yoğunluk fonksiyonu da simetri özelliğini sağlamaz. Bu eksiklik ν ve μ parametrelerinin değişebilirliğini önler.

$\nu > 0$, $\mu > 0$ ve $0 < x < 1$ olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu için bir integral gösterimi

$$I_x(\nu,\mu) = \frac{x^\nu(1-x)^\mu}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\nu}(1-t)^{-\mu}\frac{dt}{t-x} \tag{4.5}$$

şeklindedir [1].

(4.4) tanımında $\mu = \nu$ alınırsa olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$I_x(\nu, \nu) = \frac{1}{2} I_{4x(1-x)}(\nu, \frac{1}{2})$$

biçiminde elde edilir.

$I_x(\nu, \mu)$ ve $I_{1-x}(\mu, \nu)$ fonksiyonları birlikte ele alınırsa

$$\begin{aligned} I_x(\nu, \mu) + I_{1-x}(\mu, \nu) &= \frac{B_x(\nu, \mu)}{B(\nu, \mu)} + \frac{B_{1-x}(\mu, \nu)}{B(\mu, \nu)} \\ &= \frac{B_x(\nu, \mu) + B_{1-x}(\mu, \nu)}{B(\nu, \mu)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Üstteki ifadenin payı (4.2) den $B(\nu, \mu)$ ye eşit olur ve buradan

$$\begin{aligned} I_x(\nu, \mu) + I_{1-x}(\mu, \nu) &= \frac{B(\nu, \mu)}{B(\nu, \mu)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu

$$I_x(\nu, \mu) = 1 - I_{1-x}(\mu, \nu)$$

ilişkisini verir [1,21].

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun binom gösterimi cinsinden ifadesi m, n pozitif tamsayı ve $0 \leq x < 1$ olmak üzere

$$I_x(m, n-m+1) = \sum_{j=m}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$$

ile verilir [21]. Olasılık yoğunluk fonksiyonu için diğer bir seri gösterimi ise

$$I_x(m, n) = (1-x)^n \sum_{j=m}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} x^j$$

biçimindedir [21].

Son olarak (4.4) ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu için bazı indirgeme formulleri

$$I_x(\nu,\mu) = xI_x(\nu-1,\mu) + (1-x)I_x(\nu,\mu-1)$$

$$(\nu+\mu-\nu x)I_x(\nu,\mu) = \nu(1-x)I_x(\nu+1,\mu-1) + \mu I_x(\nu,\mu+1)$$

$$(\nu+\mu)I_x(\nu,\mu) = \nu I_x(\nu+1,\mu) + \mu I_x(\nu,\mu+1)$$

$$(\nu+\mu x)I_x(\nu,\mu) = x\mu I_x(\nu-1,\mu+1) + \nu I_x(\nu+1,\mu)$$

$$\begin{aligned}\nu I_x(\nu+1,\mu) =& (\nu+(\nu+\mu-1)x)I_x(\nu,\mu) \\ & -(\nu+\mu-1)xI_x(\nu-1,\mu)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu I_x(\nu,\mu+1) =& (\mu+(\nu+\mu-1)(1-x))I_x(\nu,\mu) \\ & -(\nu+\mu-1)(1-x)I_x(\nu,\mu-1)\end{aligned}$$

$$I_x(\nu,\mu) = I_x(\nu+1,\mu-1) + \frac{x^\nu(1-x)^{\mu-1}}{\nu B(\nu,\mu)}$$

$$I_x(\nu,\mu) = I_x(\nu-1,\mu+1) - \frac{x^{\nu-1}(1-x)^{\mu}}{\mu B(\nu,\mu)}$$

$$I_x(\nu,\mu) = I_x(\nu+1,\mu) + \frac{x^\nu(1-x)^{\mu}}{\nu B(\nu,\mu)}$$

$$I_x(\nu,\mu) = I_x(\nu,\mu+1) - \frac{x^\nu(1-x)^{\mu}}{\mu B(\nu,\mu)}$$

biçiminde verilir [1,21].

4.2. GENİŞLETİLMİŞ TAM OLMAYAN BETA FONKSİYONU

Birçok fonksiyon tam olmayan beta fonksiyonunun özel durumlarıdır. Özellikle, herhangi bir trigonometrik veya hiperbolik fonksiyonun belirsiz integrali, bir tam olmayan beta fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Genişletilmiş Beta fonksiyonu Euler beta fonksiyonunun bir genişletilmesi olduğundan genişletilmiş tam olmayan beta fonksiyonunun diğer özel fonksiyonlarla olan ilişkileri önem arz etmektedir. Bu bölümde genişletilmiş tam olmayan beta fonksiyonu ayrıntılı olarak incelenecektir.

Tanım 4.3. $0 \leq x < 1$ olmak üzere genişletilmiş tam olmayan beta fonksiyonu

$$B_x(\nu, \mu; b) = \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1} e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanır [8, 9].

Genişletilmiş beta fonksiyonuna benzer şekilde (4.6) denkleminde b parametresi sıfır olduğunda $0 \leq x < 1$ olmak üzere,

$$B_x(\nu, \mu; 0) = B_x(\nu, \mu)$$

klasik tam olmayan beta fonksiyonu elde edilir.

Tam olmayan beta fonksiyonunda olduğu gibi $B_x(\nu, \mu; b)$ ve $B_{1-x}(\mu, \nu; b)$ fonksiyonları birlikte ele alındığında

$$\begin{aligned}
&B_x(\nu, \mu; b) + B_{1-x}(\mu, \nu; b) \\
&\quad = \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1} e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt + \int_0^{1-x} t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1} e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt \\
&\quad = \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1} e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt - \int_1^x (1-u)^{\mu-1} u^{\nu-1} e^{\frac{-b}{t(1-t)}} du \\
&\quad = \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1} e^{-\frac{b}{t(1-t)}} dt + \int_x^1 u^{\nu-1}(1-u)^{\mu-1} e^{-\frac{b}{u(1-u)}} du \\
&\quad = B(\nu, \mu; b)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu genişletilmiş tam olmayan beta fonksiyonu ile genişletilmiş beta fonksiyonu arasındaki

$$B_x(\nu,\mu;b) = B(\nu,\mu;b) - B_{1-x}(\mu,\nu;b) \tag{4.7}$$

ilişkisini verir.

Ayrıca $B_x(\nu+1,\mu;b)$ ile $B_x(\nu,\mu+1;b)$ fonksiyonları birlikte ele alınırsa

$$\begin{aligned} &B_x(\nu+1,\mu;b) + B_x(\nu,\mu+1;b) \\ &\qquad = \int_0^x t^{\nu}(1-t)^{\mu-1}e^{-\frac{b}{t(1-t)}}\,dt + \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu}e^{-\frac{b}{t(1-t)}}\,dt \\ &\qquad = \int_0^x t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}e^{-\frac{b}{t(1-t)}}\,dt \end{aligned}$$

olup,

$$B_x(\nu+1,\mu;b) + B_x(\nu,\mu+1;b) = B_x(\nu,\mu;b) \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise $b = 0$ için tam olmayan beta fonksiyonunun (4.3) ile verilen özelliğinin korunduğunu gösterir.

(4.7) integral gösteriminde $\mu = \nu$ ve $x = 1/2$ alınırsa

$$B_{\frac{1}{2}}(\nu,\nu;b) = \frac{1}{2}B(\nu,\nu;b)$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitliğin sağ tarafı Whittaker fonksiyonu cinsinden yazılırsa

$$B_{\frac{1}{2}}(\nu,\nu;b) = \sqrt{\pi}2^{-\nu-1}b^{\frac{\nu-1}{2}}e^{-2b}W_{-\nu/2,\nu/2}(4b)$$

olarak bulunur [8]. Özellikle $\nu = 1/2$ olduğunda,

$$B_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2},\frac{1}{2};b) = \frac{\pi}{2}\mathrm{erfc}(2\sqrt{b})$$

değeri elde edilir [8].

$n = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere (4.8) gösteriminde $\mu = -\nu - n$ alınırsa

$$B_x(\nu, -\nu - n; b) = B_x(\nu, -\nu - n + 1; b) + B_x(\nu + 1, -\nu - n; b)$$

elde edilir. Bu eşitliğin binom gösterimi cinsinden

$$B_x(\nu, -\nu - n; b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_x(\nu + k, -\nu - k; b) \tag{4.9}$$

biçiminde olduğu tümevarım yardımıyla kolayca gösterilebilir. Şöyle ki:

$n = 1$ için

$$\begin{aligned} B_x(\nu, -\nu - 1; b) &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} B_x(\nu + k, -\nu - k; b) \\ &= B_x(\nu, -\nu; b) + B_x(\nu + 1, -\nu - 1; b) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (4.8) gösteriminde $\mu = -\nu - 1$ alınırsa bu ifadenin doğru olduğu görülür.

$n = m$ için (4.9) eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Yani;

$$B_x(\nu, -\nu - m; b) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_x(\nu + k, -\nu - k; b) \tag{4.10}$$

sağlansın.

$n = m + 1$ için (4.8) ifadesinden

$$B_x(\nu, -\nu - m - 1; b) = B_x(\nu, -\nu - m; b) + B_x(\nu + 1, -\nu - m - 1; b)$$

elde edilir. Burada (4.10) kabulü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &B_x(\nu, -\nu - m - 1; b) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_x(\nu + k, -\nu - k; b) + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_x(\nu + k + 1, -\nu - k - 1; b) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&B_x(\nu,-\nu-m-1;b)\\
&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_x(\nu+k,-\nu-k;b)+\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}B_x(\nu+k,-\nu-k;b)\\
&=B_x(\nu,-\nu;b)+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}B_x(\nu+k,-\nu-k;b)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}B_x(\nu+k,-\nu-k;b)+B_x(\nu+m+1,-\nu-m-1;b)\\
&=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}B_x(\nu+k,-\nu-k;b)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu da (4.9) eşitliğinin $n = m + 1$ için doğru olduğunu gösterir [5].

(4.6) integralinde farklı dönüşümler yapılarak genişletilmiş tam olmayan beta fonksiyonunun çeşitli gösterimleri elde edilebilir. Genişletilmiş tam olmayan beta fonksiyonunun (4.6) ile verilen integral gösteriminde

i) $0 < T = \sin^{-1}\sqrt{x} \leq \frac{\Pi}{2}$ olmak üzere $t = \sin^2\theta$ dönüşümü yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
B_x(\nu,\mu;b) &= \int_0^T 2\sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta)^{\nu-1}(1-\sin^2\theta)^{\mu-1}e^{[-\frac{b}{\sin^2\theta}(1-\sin^2\theta)]}d\theta\\
&= 2\int_0^T \sin^{2\nu-1}\theta\cos^{2\mu-1}\theta e^{[-b\sec^2\theta\csc^2\theta]}d\theta
\end{aligned}
$$

ii) $0 < T = \frac{x}{1-x} < \infty$ olmak üzere $t = \frac{u}{1+u}$ dönüşümü yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
B_x(\nu,\mu;b) &= \int_0^T \frac{1}{(1+u)^2}(\frac{u}{1+u})^{\nu-1}(1-\frac{u}{1+u})^{\mu-1}e^{[-\frac{b(1+u)^2}{u}]}du\\
&= e^{-2b}\int_0^T \frac{u^{\nu-1}}{(1+u)^{\nu+\mu}}e^{[-b(u+u^{-1})]}du
\end{aligned}
$$

iii) $0 \leq \sinh^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-x}} < \infty$ olmak üzere yukarıdaki gösterimde $u = \sinh^2\theta$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} B_x(\nu,\mu;b) &= 2e^{-2b}\int_0^T \frac{(\sinh^2\theta)^{\nu-1}}{(1+\sinh^2\theta)^{\nu+\mu}} e^{[-b(\sinh^2\theta+\frac{1}{\sinh^2\theta})]}\sinh\theta\cosh\theta d\theta \\ &= 2e^{-2b}\int_0^T \tanh^{2\nu-1}\theta\sec h^{2\mu}\theta e^{[-b(\sinh^2\theta+\csc h^2\theta)]}d\theta \end{aligned}$$

integral gösterimleri bulunur.

KAYNAKLAR

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover, New York, 1970.

[2] Altın, A., *Uygulamalı Matematik*, Gazi Kitabevi, Ankara, 2011.

[3] Andrews, L.C., *Special Functions for Engineers and Applied Mathematics*, New York, 1985.

[4] Andrews, G.; Askey, R.; Roy, R., *Special Functions*, Cambridge university Press, New York, 1999.

[5] Ayaz, Ö.; *Genişletilmiş beta fonksiyonu ile tanımlanan bazı özel fonksiyonlar*, Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Kırşehir, 2014.

[6] Bozer, M.; Özarslan, M.A., *Notes on generalized gamma, beta and hypergeometric functions*, *J. Comput. Anal. Appl.*, **2013**, 15, 1194-1201.

[7] Chaudhry, M.A.; Zubair, S.M., *Generalized incomplete gamma functions with applications*, *J. Comput. Appl. Math.*, **1994**, 55, 99-124.

[8] Chaudhry, M.A.; Zubair, S.M., *On a class incomplete Gamma functions with applications*, Chapman&Hall/CRC, Saudi Arabia, 2002.

[9] Chaudhry, M.A.; Qadir, A.; Rafique, M.; Zubair, S.M., *Extension of Euler's Beta Function*, *J. Comput. Appl. Math.*, **1997**, 78 (1), 19-32.

[10] Chaudhry, M.A.; Qadir, A.; Srivastava, H.M.; Paris, R.B., *Extended hypergeometric and confluent hypergeometric functions*, *Appl. Math. Comput.*, **2004**, 159, 589-602.

[11] Carlson, B.C., *Special Functions of Applied Mathematics*, Academic Press, New York, 1977.

[12] Çetinkaya, A., *The incomplete second Appell hypergeometric functions*, *Appl. Math. Comput.*, **2013**, 219, 8332-8337.

[13] Dedic, Lj.; Matic, M.; Pecaric, J., *On some inequalities for generalized beta function*, *Math. Inequal. Appl.*, **2000**, 3 (4), 473-483.

[14] Erdelyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F., *Tables of İntegral Transforms 1*, Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill, New York, 1954.

[15] Exton, H., *Multiple hypergeometric functions and applications*, Ellis-Horwood Ltd., Chichester, 1976.

[16] Gradshteyn, I.; Ryzhik, I., *Tables of Integrals, Series and Product*, English translation edited by Alan Jeffery, Academic Press, New York, 1994.

[17] Harris, F.E., *Incomplete Bessel, Generalized Incomplete Gamma or Leakly Aquifer Functions*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2008**, 215 (1), 260-269.

[18] Ito, K., *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, The MIT Press, Cambridge and London,1993.

[19] Miller, A.R., *Remarks on a generalized beta function*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **1998**, 100, 23-32.

[20] Nakhi, Y.B.; Kalla, S.L., *A generalized beta function and associated probability density*, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **2002**, 30 (8), 467-478.

[21] Olver F.W.J.; Lozier, D.W.; Boisvert, R.F.; Clark, C.W.; *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, NY, 2010.

[22] Özarslan, M.A., *Some remarks on extended hypergeometric, extended confluent hypergeometric and extended Appell's functions*, *J. Comput. Anal. Appl.*, **2012**, 14, 1148-1153.

[23] Özarslan, M.A.; Özergin, E., *Some generating relations for extended hypergeometric functions via generalized fractional derivative operator*, *Math. Comput. Modelling*, **2010**, 52, 1825-1833.

[24] Özergin, E.; Özarslan, M.A.; Altın, A., *Extension of gamma, beta and hypergeometric functions*, *J. Comput. Appl. Math.*, **2011**, 235, 4601-4610.

[25] Spanier, J.; Odlham, K.B., *An Atlas of Functions*, Springer, Hemisphere, New York, 1987.

[26] Şahin, R.; *Çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar*, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Ankara, 2011.

[27] Şahin, R.; Altın, A., *An extension of F_1, F_2, F_3 Appell's hypergeometric functions*, *Ars Combin.*, **2011**, 100, 97-105.

[28] Temme, N.M., *Special Functions: An Introduction to the Clasiccal Functions of Mathematical Physics*, Wiley, New York, 1996.

[29] Wang, Z.X.; Guo, D.R.; *Special Functions*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1989.

[30] Yıldız, E.; *Tam olmayan Pochhammer sembolleri ile tanımlanan bazı özel fonksiyonlar*, Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Kırşehir, 2014.

[31] Ege, İ.; *Neutrix calculus'un tam olmayan beta ve gama özel fonksiyonlarına ve kısmi türevlerine olan uygulamaları*, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Ankara, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

25.04.1989 tarihinde Samsun'da doğdu. İlkokul ve liseyi Samsun'un Terme ilçesinde okudu. 2006 yılında liseden mezun oldu. 2007 yılında Ahi Evran Üniversitesi Matematik Bölümü'nde okumaya hak kazandı. 2011 yılında bu bölümden mezun oldu. Halen Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde yüksek lisans programına devam etmektedir.