T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAM OLMAYAN POCHHAMMER SEMBOLLERİ İLE TANIMLANAN BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

Ebru YILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR - 2014

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAM OLMAYAN POCHHAMMER SEMBOLLERİ İLE TANIMLANAN BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

Ebru YILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

KIRŞEHİR - 2014

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan:
Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Üye:
Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

Üye:
Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tez boyunca kullanılacak olan bazı ön bilgiler ve tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tam olmayan Gamma fonksiyonlarının temel özellikleri tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde, tam olmayan Pochhammer sembolleri ve tam olmayan hipergeometrik fonksiyonların tanımları verilmiştir. Ayrıca bu fonksiyonların bazı özellikleri ve diğer fonksiyonlarla ilişkileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gamma fonksiyonu, Pochhammer sembolü, Hipergeometrik fonksiyon, Tam olmayan Gamma fonksiyonları, Tam olmayan Pochhammer sembolleri.

ABSTRACT

This thesis consists of fourth chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some preliminaries and basic definitions that will be used throughout the thesis are given.

In the third chapter, basic properties of incomplete Gamma functions are mentioned.

In the fourth chapter, definitions of incomplete Pochhammer symbols and incomplete hypergeometric functions are presented. Besides, some properties of these functions and connections with the other functions are analysed.

Keywords: Gamma function, Pochhammer symbol, Hypergeometric function, Incomplete Gamma functions, Incomplete Pochhammer symbols.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince değerli ve derin bilgileriyle bana yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek destek olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA'ya, çalışmalarımız boyunca gösterdikleri ilgi ve önerilerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ'a ve Yrd. Doç. Dr. M. Baki YAĞBASAN'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayat boyu her sıkıntıda yanımda yer alan ve çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ebru YILDIZ

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\Gamma(\alpha)$	: Gamma fonksiyonu
$\Gamma(\alpha,x), \gamma(\alpha,x)$	: Tam olmayan Gamma fonksiyonları
$B(x,y)$	: Beta fonksiyonu
$(\lambda)_\nu$	: Pochhammer sembolü
$[\lambda;x]_\nu, (\lambda;x)_\nu$	: Tam olmayan Pochhammer sembolleri
erf	: Hata fonksiyonu
erfc	: Tamamlayıcı hata fonksiyonu
Φ	: Birinci çeşit konfluent hipergeometrik fonksiyonu
Ψ	: İkinci çeşit konfluent hipergeometrik fonksiyonu
${}_2F_1$	: Gauss hipergeometrik fonksiyonu
${}_pF_q$	: Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu
${}_1\Gamma_1,\ {}_1\gamma_1$	: Tam olmayan konfluent hipergeometrik fonksiyonları
${}_2\Gamma_1,\ {}_2\gamma_1$	: Tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonları
${}_p\Gamma_q,\ {}_p\gamma_q$	: Tam olmayan genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonları

1 GİRİŞ

Tam olmayan Gamma fonksiyonları uygulamalı matematik, nükleer ve moleküler fizik, istatistik, mühendislik ve daha bir çok alanda geniş bir kullanım alanı bulmuştur [3,9,11,13].

2012 yılında Srivastava, Chaudhry ve Agarwal [24], tam olmayan Gamma fonksiyonları yardımıyla tam olmayan Pochhammer sembollerini

$$\begin{aligned}(\lambda;x)_\nu =& \frac{\gamma(\lambda+\nu,x)}{\Gamma(\lambda)} \quad (\lambda,\nu\in\mathbb{C};x\geq 0)\\ [\lambda;x]_\nu =& \frac{\Gamma(\lambda+\nu,x)}{\Gamma(\lambda)} \quad (\lambda,\nu\in\mathbb{C};x\geq 0)\end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlamıştır. Üstelik bu semboller kullanılarak,

$$\begin{aligned}{}_2\gamma_1((a,x),b;c;z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;x)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}\\ {}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a;x]_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonları tanımlanmış ve

$${}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z) + {}_2\gamma_1((a,x),b;c;z) = {}_2F_1(a,b;c;z)$$

bağıntısının sağlandığı gösterilmiştir. Benzer şekilde bu semboller yardımıyla tam olmayan genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. Bu fonksiyonların özel durumları iletişim teorisi, olasılık teorisi ve yeraltı suyu pompalama modellemelerinde karşılaşılan problemlerin çözümlerinin kapalı form gösterimlerinde kullanılmıştır.

Bu çalışmada yukarıda sözü edilen [24] nolu makale ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER

2.1 GAMMA FONKSİYONU

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \qquad (\Re(z) > 0)$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır ve

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

rekürans bağıntısını sağlar. Bu rekürans bağıntısı kullanılarak, Gamma fonksiyonu $z = 0, -1, -2, \ldots$ hariç reel kısmı negatif olan kompleks sayılara

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}$$

$$(\Re(z) > -n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_0^-; \quad \mathbb{Z}_0^- = \mathbb{Z}^- \cup \{0\})$$

eşitliği yardımıyla genişletilir [1,6,14].

2.2 BETA FONKSİYONU

Beta fonksiyonu

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{2.1}$$

$$(\Re(x) > 0, \Re(y) > 0)$$

olarak tanımlanır. Bu tanıma eş değer olarak

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1} d\theta$$

$$(\Re(x) > 0, \Re(y) > 0)$$

ve

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

$$(\Re(x) > 0, \Re(y) > 0)$$

yazılabilir. Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu cinsinden ifadesi ise

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.2}$$

$$(x, y \neq 0, -1, -2, ...)$$

şeklindedir. Ayrıca (2.2) eşitliğinden kolaylıkla görülebilir ki

$$B(x,y) = B(y,x)$$

olup, bu eşitlik Beta fonksiyonunun simetri özelliği olarak adlandırılır [1,26].

2.3 POCHHAMMER SEMBOLÜ

$\lambda \in \mathbb{C}$ için Pochhammer sembolü

$$\begin{aligned}(\lambda)_n =& \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1) \quad (n \in \mathbb{N})\\ (\lambda)_0 =& 1\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Ayrıca Pochhammer sembolü Gamma fonksiyonu kullanılarak

$$(\lambda)_\nu = \frac{\Gamma(\lambda+\nu)}{\Gamma(\lambda)} \quad (\lambda, \nu \in \mathbb{C}) \tag{2.3}$$

şeklinde de yazılabilir [6,24].

Lemma 2.1 Pochhammer sembolünün bazı özellikleri şunlardır:($n, m, k, l \in \mathbb{N}_0$, $N \in \mathbb{N};\ \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$\begin{aligned}(\lambda)_{n+k} =& (\lambda)_n(\lambda+n)_k\\ (\lambda)_{-n} =& \frac{(-1)^n}{(1-\lambda)_n}\\ (\lambda)_n =& \frac{(\lambda+n-1)!}{(\lambda-1)!}\\ \left(\tfrac{1}{2}\right)_k =& 2^{-2k}\frac{(2k)!}{k!}\\ \left(\tfrac{3}{2}\right)_k =& 2^{-2k}\frac{(2k+1)!}{k!}\\ (\lambda)_{n-k} =& \frac{(-1)^k(\lambda)_n}{(1-\lambda-n)_k}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda)_{Nk} =& N^{Nk}\left(\frac{\lambda}{N}\right)_k\left(\frac{\lambda+1}{N}\right)_k\cdots\left(\frac{\lambda+N-1}{N}\right)_k \\
(\lambda)_{2k} =& 2^{2k}\left(\frac{\lambda}{2}\right)_k\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)_k \\
(\lambda+mk)_{nk} =& \frac{(\lambda)_{mk+nk}}{(\lambda)_{mk}} \\
(\lambda+k)_k =& \frac{(\lambda)_{2k}}{(\lambda)_k} \\
(\lambda+m)_k =& \frac{(\lambda)_k(\lambda+k)_m}{(\lambda)_m} \\
(\lambda-mk)_{nk} =& (-1)^{mk}(\lambda)_{nk-mk}(1-\lambda)_{mk} \qquad (n\geq m) \\
(\lambda-mk)_{nk} =& (-1)^{nk}\frac{(1-\lambda)_{mk}}{(1-\lambda)_{mk-nk}} \qquad (n<m) \\
(\lambda-k)_k =& (-1)^k(1-\lambda)_k \\
(\lambda-m)_k =& \frac{(1-\lambda)_m(\lambda)_k}{(1-\lambda-k)_m} \\
(\lambda+mk)_{n\pm lk} =& \frac{(\lambda)_n(\lambda+n)_{mk\pm lk}}{(\lambda)_{mk}} \\
(\lambda+k)_{n-k} =& \frac{(\lambda)_n}{(\lambda)_k} \\
(\lambda-mk)_{n\pm lk} =& \frac{(-1)^{lk}(\lambda)_n(1-\lambda)mk}{(1-\lambda-n)_{mk\pm lk}} \\
(\lambda-k)_{n-k} =& \frac{(-1)^k(\lambda)_n(1-\lambda)_k}{(1-\lambda-n)_{2k}} \\
(-n)_k =& \begin{cases} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} \ , & (0\leq k\leq n) \\ 0 \ , & (k>n) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Pochhammer sembolünün yukarıdaki özellikleri için [18,23,26] nolu referanslara da bakılabilir.

2.4 GAUSS HİPERGEOMETRİK FONKSİYONU

$c\neq 0,-1,-2,\ldots$ olmak üzere Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$
{}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{2.4}
$$

serisi ile tanımlanır ve

$$
z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{dy}{dz}-aby=0 \tag{2.5}
$$

hipergeometrik denkleminin bir çözümüdür. Bazen ${}_2F_1(a,b;c;z)$ yerine $F(a,b;c;z)$ gösterimi de kullanılır.

Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt \tag{2.6} $$
$$ (\Re(c) > \Re(b) > 0;\, |\arg\,(1-z)| < \pi) $$

integral gösterimine sahip olup,

$$ \frac{d^k}{dz^k}\, {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} {}_2F_1(a+k,b+k;c+k;z) \qquad (k \in \mathbb{N}_0) $$

türev formülünü ve

$$ \begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;z) =& (1-z)^{-a}\, {}_2F_1\left(a, c-b; c; -\frac{z}{1-z}\right) \\ =& (1-z)^{-b}\, {}_2F_1\left(c-a, b; c; -\frac{z}{1-z}\right) \\ =& (1-z)^{c-a-b}\, {}_2F_1\left(c-a, c-b; c; z\right) \end{aligned} $$

dönüşüm formüllerini sağlar. Ayrıca (2.4) den kolayca görülebileceği gibi Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1(b,a;c;z) $$

simetri özelliğine sahiptir.

Gauss hipergeometrik fonksiyonu ve yukarıdaki özellikleri ve de daha pek çok özelliği için [1,3,4,10,13,19,23,26,27] nolu referanslara bakılabilir.

2.5 KONFLUENT HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

$c \neq 0, -1, -2, \ldots$ olmak üzere birinci çeşit konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$ {}_1F_1(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \qquad (|z| < \infty) \tag{2.7} $$

serisi ile tanımlanır ve

$$ z\frac{d^2y}{dz^2} + (c-z)\frac{dy}{dz} - az = 0 \tag{2.8} $$

konfluent hipergeometrik denkleminin bir çözümüdür. Bazen ${}_1F_1(a;c;z)$ yerine $\Phi(a;c;z)$ veya $M(a;c;z)$ gösterimleri de kullanılır. Bu fonksiyon

$$ {}_1F_1(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{zt}dt \tag{2.9} $$

$$ (\Re(c) > \Re(a) > 0) $$

integral gösterimine sahip olup,

$$ \frac{d^k}{dz^k}\ {}_1F_1(a;c;z) = \frac{(a)_k}{(c)_k}\,{}_1F_1(a+k;c+k;z) \qquad (k \in \mathbb{N}_0) $$

türev formülünü ve birinci Kummer formülü olarak bilinen

$$ {}_1F_1(a;c;z) = e^z\ {}_1F_1(c-a;c;-z) \tag{2.10} $$

eşitliğini sağlar.

(2.8) konfluent hipergeometrik denkleminin diğer bir çözümü ise

$$ \Psi(a;c;z) = \frac{\pi}{\sin c\pi}\left[\frac{\Phi(a;c;z)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(c)} - z^{1-c}\frac{\Phi(1+a-c;2-c;z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-c)}\right] $$

şeklinde tanımlanır ve ikinci çeşit konfluent hipergeometrik (Tricomi) fonksiyonu olarak adlandırılır. Bazen $\Psi(a;c;z)$ yerine $U(a;c;z)$ gösterimi de kullanılır. Bu fonksiyon

$$ \Psi(a;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}e^{-zt}dt \qquad (\Re(a) > 0, \Re(z) > 0) \tag{2.11} $$

integral gösterimine ve

$$ \frac{d^k}{dz^k}\Psi(a;c;z) = (-1)^k (a)_k \Psi(a+k;c+k;z) \qquad (k \in \mathbb{N}_0) $$

türev formülüne sahiptir. Ayrıca

$$ \Psi(a;c;z) = z^{1-c}\Psi(1+a-c;2-c;z) \tag{2.12} $$

dönüşüm formülünü sağlar.

Konfluent hipergeometrik fonksiyonu hakkında daha fazla bilgi ve özellik için [1,2,3,10,13,19,22,26,27] nolu referanslara bakılabilir.

2.6 GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar

$$ {}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\ldots(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n(\beta_2)_n\ldots(\beta_q)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{2.13} $$

ile tanımlanır. Burada p ve q sıfır ya da pozitif bir tamsayı, α_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ ve β_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ kompleks parametreler olup, $\beta_j \neq 0, -1, -2, \ldots$ dır.

(2.13) de $p = 2, q = 1$ alınırsa

$$_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1; z) = F(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n}{(\beta_1)_n} \frac{z^n}{n!}$$

Gauss hipergeometrik fonksiyonu ve $p = q = 1$ alınırsa

$$_1F_1(\alpha_1; \beta_1; z) = \Phi(\alpha_1; \beta_1; z) = M(\alpha_1; \beta_1; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n}{(\beta_1)_n} \frac{z^n}{n!}$$

konfluent hipergeometrik fonksiyonu elde edilir.

(2.13) ile verilen seri
i) $p \leq q$ ise $|z| < \infty$ için yakınsak
ii) $p = q + 1$ ise $|z| < 1$ için yakınsak
iii) $p > q + 1$ ise $z = 0$ hariç tüm z ler için ıraksak
tır.

Üstelik (2.13) deki seri $p = q + 1$ durumunda $|z| = 1$ çemberi üzerindeki noktalarda,

$$\omega = \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j$$

dersek, $\Re(\omega) > 0$ ise mutlak yakınsak, $\Re(\omega) \leq -1$ ise ıraksak ve $-1 < \Re(\omega) \leq 0$ ise $z = 1$ hariç koşullu yakınsaktır.

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar

$$\begin{aligned} {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; z) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{\infty} t^{\alpha_1 - 1} e^{-t} \; {}_{p-1}F_q(\alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; zt) dt \\ &\qquad (\Re(\alpha_1) > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, b; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-1}, c; z) \\ &= \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \; {}_{p-1}F_{q-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}; zt) dt \\ &\qquad (\Re(c) > \Re(b) > 0) \end{aligned}$$

integral gösterimlerini ve

$$\frac{d^k}{dz^k}\;{}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q;z)$$
$$=\frac{(\alpha_1)_k\ldots(\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k\ldots(\beta_q)_k}{}_pF_q(\alpha_1+k,\alpha_2+k,\ldots,\alpha_p+k;\beta_1+k,\ldots,\beta_q+k;z)\ (k\in\mathbb{N}_0)$$

türev formülünü sağlar.

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar ve özellikleri hakkında daha fazla bilgi için [3,4,10,12,19,23,25-27] nolu referanslara bakılabilir.

2.7 HATA FONKSİYONLARI

Hata ve tamamlayıcı hata fonksiyonları sırasıyla

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt \tag{2.14}$$

$$\operatorname{erfc}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-t^2}dt \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\operatorname{erf}(z)+\operatorname{erfc}(z)=1 \tag{2.16}$$

bağıntısı sağlanır [3].

3 TAM OLMAYAN GAMMA FONKSİYONLARI

Tam olmayan Gamma fonksiyonları

$$\gamma(\alpha,x)=\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad (\Re(\alpha)>0; x\geq 0) \tag{3.1}$$

$$\Gamma(\alpha,x)=\int_x^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad (x\geq 0; x=0 \text{ için } \Re(\alpha)>0) \tag{3.2}$$

integralleri ile tanımlanır ve

$$\gamma(\alpha,x)+\Gamma(\alpha,x)=\Gamma(\alpha) \qquad (\Re(\alpha)>0) \tag{3.3}$$

bağıntısını sağlar ([11], s. 133).

Teorem 3.1 $\gamma(\alpha,x)$ fonksiyonu için seri gösterimleri

$$\text{(i)} \quad \gamma(\alpha,x)=x^\alpha\, e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(\alpha)_{n+1}} \qquad \alpha\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$\text{(ii)} \quad \gamma(\alpha,x)=x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\alpha+n)}\,\frac{x^n}{n!} \qquad \alpha\neq 0,-1,-2,\ldots$$

dir ([11], s. 135).

İspat. (i) (3.1) de $t=x(1-u)$ dönüşümü uygulandıktan sonra

$$e^{ux}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\,u^n}{n!}$$

seri açılımı dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha,x) &= \int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\
&= x^\alpha\, e^{-x}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}\, e^{ux}du \\
&= x^\alpha\, e^{-x}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\,u^n}{n!}\right\}du \\
&= x^\alpha\, e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left\{\int_0^1 u^n\,(1-u)^{\alpha-1}du\right\} \\
&= x^\alpha\, e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,B(n+1,\alpha) \\
&= x^\alpha\, e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \\
&= x^\alpha\, e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(\alpha)_{n+1}} \qquad \alpha\neq 0,-1,-2,...
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (3.1) de

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{n!}$$

seri açılımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha, x) &= \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^x t^{\alpha-1} \Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{n!}\Big] dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{\alpha+n-1} dt \\
&= x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha+n)} \frac{x^n}{n!} \qquad \alpha \neq 0, -1, -2, ...
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Sonuç 3.2 (3.3) bağıntısında Teorem 3.1 (ii) nin kullanılmasıyla

$$\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha+n)} \frac{x^n}{n!} \qquad \alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$$

elde edilir ([11], s. 135).

Teorem 3.3 Aşağıdaki reküran bağıntıları sağlanır ([11], s. 134):

$$\text{(i)} \quad \gamma(\alpha+1, x) = \alpha\gamma(\alpha, x) - x^{\alpha} e^{-x}$$

$$\text{(ii)} \quad \Gamma(\alpha+1, x) = \alpha\Gamma(\alpha, x) + x^{\alpha} e^{-x}$$

İspat. (i) (3.1) de α yerine $\alpha+1$ alınır ve kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha+1, x) &= \int_0^x t^{\alpha} e^{-t} dt \\
&= -x^{\alpha} e^{-x} + \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\
&= \alpha\, \gamma(\alpha, x) - x^{\alpha} e^{-x}
\end{aligned}$$

bulunur.

(ii) (3.2) de α yerine $\alpha+1$ alınır ve kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1,x) &= \int_x^\infty t^\alpha e^{-t}dt \\
&= \lim_{A\to\infty}\int_x^A t^\alpha e^{-t}dt \\
&= \lim_{A\to\infty}\Big(-t^\alpha e^{-t}\Big|_x^A + \alpha\int_x^A t^{\alpha-1}e^{-t}dt\Big) \\
&= \underbrace{-\lim_{A\to\infty}A^\alpha e^{-A}}_{=0} + x^\alpha e^{-x} + \alpha\int_x^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\
&= \alpha\Gamma(\alpha,x) + x^\alpha e^{-x}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.4 Tam olmayan Gamma fonksiyonlarının birinci basamaktan türevleri

$$\text{(i)}\quad \frac{d}{dx}\gamma(\alpha,x) = x^{\alpha-1}e^{-x}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{d}{dx}\Gamma(\alpha,x) = -x^{\alpha-1}e^{-x}$$

dir ([11], s. 135).

İspat. (i) (3.1) eşitliğinin her iki yanının x e göre türevi alınır ve türev için Leibniz kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\gamma(\alpha,x) &= \frac{d}{dx}\Big(\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt\Big) \\
&= x^{\alpha-1}e^{-x}
\end{aligned}$$

bulunur.

(ii) Benzer şekilde (3.2) eşitliğinin her iki yanının x e göre türevi alınarak kolayca ispatlanır. ■

Teorem 3.5 $n = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır ([11], s. 135):

$$\text{(i)}\quad \frac{d^n}{dx^n}\Big[x^{-\alpha}\gamma(\alpha,x)\Big] = (-1)^n\, x^{-\alpha-n}\,\gamma(\alpha+n,x)$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{d^n}{dx^n}\Big[x^{-\alpha}\Gamma(\alpha,x)\Big] = (-1)^n\, x^{-\alpha-n}\,\Gamma(\alpha+n,x)$$

İspat. (i) ve (ii) nin ispatları benzer olduğundan, sadece (i) yi ispatlamak yeterlidir.

(i) n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılır. $n=0$ için (i) aşikardır. Teorem 3.3 (i) ve Teorem 3.4 (i) nin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big[x^{-\alpha}\,\gamma(\alpha,x)\Big] &= -\alpha\, x^{-\alpha-1}\,\gamma(\alpha,x)+x^{-\alpha}\,\frac{d}{dx}\Big[\gamma(\alpha,x)\Big]\\ &= -x^{-\alpha-1}\Big[\gamma(\alpha+1,x)+x^{\alpha}\,e^{-x}\Big]+x^{-\alpha}\,x^{\alpha-1}\,e^{-x}\\ &= -x^{-\alpha-1}\,\gamma(\alpha+1,x) \qquad (3.4)\end{aligned}$$

bulunur ki, bu (i) eşitliğinin $n=1$ için doğru olduğunu gösterir. Şimdi (i) eşitliğinin $n=k$ için sağlandığını kabul edelim, yani

$$\frac{d^k}{dx^k}\Big[x^{-\alpha}\gamma(\alpha,x)\Big]=(-1)^k\,x^{-\alpha-k}\,\gamma(\alpha+k,x) \qquad (3.5)$$

olsun. (3.5) ve (3.4) ün dikkate alınmasıyla

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\Big[x^{-\alpha}\,\gamma(\alpha,x)\Big] &= \frac{d}{dx}\Big\{\frac{d^k}{dx^k}\Big[x^{-\alpha}\,\gamma(\alpha,x)\Big]\Big\}\\ &= \frac{d}{dx}\Big\{(-1)^k x^{-\alpha-k}\,\gamma(\alpha+k,x)\Big\}\\ &= (-1)^k\frac{d}{dx}\Big\{x^{-(\alpha+k)}\,\gamma(\alpha+k,x)\Big\}\\ &= (-1)^{k+1}\,x^{-\alpha-k-1}\,\gamma(\alpha+k+1,x)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (i) eşitliğinin $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.6 $n=0,1,2,3,\ldots$ olmak üzere

(i) $$\frac{d^n}{dx^n}\Big[e^x\,\gamma(\alpha,x)\Big]=(-1)^n e^x\,(1-\alpha)_n\,\gamma(\alpha-n,x)$$

(ii) $$\frac{d^n}{dx^n}\Big[e^x\,\Gamma(\alpha,x)\Big]=(-1)^n e^x\,(1-\alpha)_n\,\Gamma(\alpha-n,x)$$

dir ([11],s. 135).

İspat. (i) ve (ii) nin ispatları benzer olduğundan, sadece (i) yi ispatlamak yeterlidir.

(i) n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılır. $n=0$ için (i) aşikardır. Teorem 3.3 (i) ve Teorem 3.4 (i) nin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big[e^x\,\gamma(\alpha,x)\Big] &= e^x\,\gamma(\alpha,x)+e^x\,\frac{d}{dx}\Big[\gamma(\alpha,x)\Big]\\ &= e^x\,\Big[(\alpha-1)\,\gamma(\alpha-1,x)-x^{\alpha-1}\,e^{-x}\Big]+e^x x^{\alpha-1}e^{-x}\\ &= -(1-\alpha)\,e^x\,\gamma(\alpha-1,x) \qquad (3.6)\end{aligned}$$

bulunur ki, bu (i) eşitliğinin $n = 1$ için doğru olduğunu gösterir. Şimdi $n = k$ için (i) eşitliğinin geçerli olduğunu kabul edelim, yani

$$\frac{d^k}{dx^k}\Big[e^x\,\gamma(\alpha,x)\Big] = (-1)^k\,(1-\alpha)_k\,e^x\,\gamma(\alpha-k,x) \tag{3.7}$$

eşitliği sağlansın. (3.7) ve (3.6) nın dikkate alınmasıyla

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\Big[e^x\,\gamma(\alpha,x)\Big] &= \frac{d}{dx}\Big\{\frac{d^k}{dx^k}\Big[e^x\,\gamma(\alpha,x)\Big]\Big\}\\ &= \frac{d}{dx}\Big\{(-1)^k\,(1-\alpha)_k\,e^x\,\gamma(\alpha-k,x)\Big\}\\ &= (-1)^k(1-\alpha)_k\frac{d}{dx}\Big\{e^x\gamma(\alpha-k,x)\Big\}\\ &= (-1)^{k+1}\,\underbrace{(1-\alpha)_k\,(1-\alpha+k)}_{=(1-\alpha)_{k+1}}\,e^x\,\gamma(\alpha-k-1,x)\\ &= (-1)^{k+1}\,(1-\alpha)_{k+1}\,e^x\,\gamma(\alpha-k-1,x)\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu ise (i) eşitliğinin $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.7 : Φ, birinci çeşit konfluent hipergeometrik fonksiyonu için

$$\text{(i)}\quad \gamma(\alpha,x) = \alpha^{-1}\,x^{\alpha}\,e^{-x}\,\Phi(1;\alpha+1\,;\,x)$$

$$\text{(ii)}\quad \gamma(\alpha,x) = \alpha^{-1}\,x^{\alpha}\,\Phi(\alpha;\alpha+1\,;\,-x)$$

eşitlikleri sağlanır ([11], s. 133).

İspat. (i) $\gamma(\alpha,x)$ fonksiyonunun Teorem 3.1 (i) ile verilen seri gösteriminde Pochhammer sembolünün Lemma 2.1 de verilen birinci özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha,x) &= x^{\alpha}\,e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(\alpha)_{n+1}} \qquad \alpha \neq 0,-1,-2,...\\ &= x^{\alpha}\,e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{(1)_n}\,\frac{x^n}{\alpha\,(\alpha+1)_n}\\ &= x^{\alpha}\,e^{-x}\,\alpha^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{(\alpha+1)_n}\,\frac{x^n}{n!}\\ &= \alpha^{-1}\,x^{\alpha}\,e^{-x}\,\Phi(1;\alpha+1\,;\,x)\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (2.10) ile verilen birinci Kummer formülünden

$$\Phi(1;\alpha+1;x) = e^x\,\Phi(\alpha;\alpha+1\,;\,-x)$$

yazılabilir. Bu, (i) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha,x) &= \alpha^{-1}x^{\alpha}e^{-x}e^{x}\Phi(\alpha;\alpha+1;-x)\\ &= \alpha^{-1}x^{\alpha}\Phi(\alpha;\alpha+1;-x)\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 3.8 : Ψ, ikinci çeşit konfluent fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad \Gamma(\alpha,x) = x^{\alpha}\,e^{-x}\,\Psi(1;\alpha+1\,;\,x)\\ &\text{(ii)}\quad \Gamma(\alpha,x) = e^{-x}\,\Psi(1-\alpha;1-\alpha\,;\,x)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır ([11], s. 133).

İspat. (i) (3.2) de $t = x(1+u)$ dönüşümü yapılır ve (2.11) integral gösterimi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha,x) &= \int_x^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt\\ &= x^{\alpha}\,e^{-x}\int_0^{\infty}(1+u)^{\alpha-1}\,e^{-ux}du\\ &= x^{\alpha}\,e^{-x}\,\Psi(1;\alpha+1;\,x)\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (2.12) ile verilen dönüşüm formülünden

$$\Psi(1;\alpha+1;\,x) = x^{-\alpha}\,\Psi(1-\alpha;1-\alpha\,;\,x)$$

olup, bu (i) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha,x) &= x^{\alpha}\,e^{-x}\,\Psi(1;\alpha+1;\,x)\\ &= x^{\alpha}\,e^{-x}\,x^{-\alpha}\,\Psi(1-\alpha;1-\alpha\,;\,x)\\ &= e^{-x}\,\Psi(1-\alpha;1-\alpha\,;\,x)\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 3.9 Hata fonksiyonları ile tam olmayan Gamma fonksiyonları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir ([18], s. 726):

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad \Gamma(\tfrac{1}{2},x) = \sqrt{\pi}\operatorname{erfc}(\sqrt{x})\\ &\text{(ii)}\quad \gamma(\tfrac{1}{2},x) = \sqrt{\pi}\operatorname{erf}(\sqrt{x})\end{aligned}$$

İspat. (i) (3.2) de $t=\tau^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma(\alpha,x)=2\int_{\sqrt{x}}^{\infty}\tau^{2a-1}e^{-\tau^2}d\tau$$

bulunur. $\alpha=\frac{1}{2}$ alınır ve (2.15) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(\tfrac{1}{2},x)=&2\int_{\sqrt{x}}^{\infty}e^{-\tau^2}d\tau\\ =&\sqrt{\pi}\text{erfc}(\sqrt{x})\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (2.16), (3.3) ve (i) den

$$\begin{aligned}\gamma(\tfrac{1}{2},x)=&\Gamma(\tfrac{1}{2})-\Gamma(\tfrac{1}{2},x)\\ =&\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi}\text{erfc}(\sqrt{x})\\ =&\sqrt{\pi}(1-\text{erfc}(\sqrt{x}))\\ =&\sqrt{\pi}\text{erf}(\sqrt{x})\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. ■

Teorem 3.10 $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$\Gamma\Big(n+\tfrac{1}{2},x\Big)=\Gamma\Big(n+\tfrac{1}{2}\Big)\left\{\text{erfc}(\sqrt{x})+e^{-x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^{j+\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(j+\frac{3}{2}\big)}\right\}\tag{3.8}$$

dir ([8], s. 40).

İspat. n üzerinden tümevarımla yapılır. Teorem 3.3 (ii) ve Teorem 3.9 (i) den

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(\tfrac{1}{2}+1,x\Big)=&\tfrac{1}{2}\Gamma\Big(\tfrac{1}{2},x\Big)+x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\\ =&\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\text{erfc}(\sqrt{x})+x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\\ =&\Gamma\Big(\tfrac{3}{2}\Big)\text{erfc}(\sqrt{x})+x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\\ =&\Gamma\Big(\tfrac{3}{2}\Big)\left\{\text{erfc}(\sqrt{x})+e^{-x}\sum_{j=0}^{0}\frac{x^{j+\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(j+\frac{3}{2}\big)}\right\}\end{aligned}$$

bulunur ki, bu (3.8) eşitliğinin $n=1$ için doğru olduğunu gösterir. Şimdi $n=k$ için (3.8) in doğru olduğunu kabul edelim, yani

$$\Gamma\Big(k+\tfrac{1}{2},x\Big)=\Gamma\Big(k+\tfrac{1}{2}\Big)\left\{\text{erfc}(\sqrt{x})+e^{-x}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^{j+\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(j+\frac{3}{2}\big)}\right\}\tag{3.9}$$

olsun. Teorem 3.3 (ii) ve (3.9) dan

$$
\begin{aligned}
\Gamma\Big(k+\tfrac{3}{2},x\Big) =&\Big(k+\tfrac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(k+\tfrac{1}{2},x\Big)+x^{k+\frac{1}{2}}e^{-x}\\
=&\Big(k+\tfrac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(k+\tfrac{1}{2}\Big)\left\{\operatorname{erfc}(\sqrt{x})+e^{-x}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^{j+\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(j+\frac{3}{2}\big)}\right\}+x^{k+\frac{1}{2}}e^{-x}\\
=&\Gamma\Big(k+\tfrac{3}{2}\Big)\left\{\operatorname{erfc}(\sqrt{x})+e^{-x}\sum_{j=0}^{k}\frac{x^{j+\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(j+\frac{3}{2}\big)}\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise (3.8) in $n = k + 1$ için sağlandığını gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Tam olmayan Gamma fonksiyonları ve yukarıdaki özellikleri ve de daha pek çok özelliği için [2,3,8,9,11,13,18,26] nolu referanslara bakılabilir.

4 TAM OLMAYAN POCHHAMMER SEMBOLLERİ VE TAM OLMAYAN HİPERGEOMETRİK FONSİYONLAR

Bu bölümde Srivastava, Chaudhry ve Agarwal [24] tarafından tanımlanan tam olmayan Pochhammer sembolleri ve tam olmayan hipergeometrik fonksiyonları tanıtılacak ve özellikleri incelenecektir.

4.1 TAM OLMAYAN POCHHAMMER SEMBOLLERİ

(3.1) ve (3.2) eşitlikleri ile tanımlanan tam olmayan Gamma fonksiyonları yardımıyla tam olmayan Pochhammer sembolleri

$$(\lambda;x)_\nu = \frac{\gamma(\lambda+\nu,x)}{\Gamma(\lambda)} \qquad (\lambda,\nu\in\mathbb{C};x\geq 0) \tag{4.1}$$

$$[\lambda;x]_\nu = \frac{\Gamma(\lambda+\nu,x)}{\Gamma(\lambda)} \qquad (\lambda,\nu\in\mathbb{C};x\geq 0) \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır ve (3.3) bağıntısı ışığında tam olmayan Pochhammer sembolleri

$$(\lambda;x)_\nu + [\lambda;x]_\nu = (\lambda)_\nu \qquad (\lambda,\nu\in\mathbb{C};x\geq 0) \tag{4.3}$$

bağıntısını sağlar.

Teorem 4.1 $[\lambda;x]_n$ ve $[\lambda;x]_{-n}$ tam olmayan Pochhammer sembolleri

$$\text{(i)} \qquad [\lambda;x]_n = \frac{(-1)^n x^{\lambda+n}}{\Gamma(\lambda)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{-\lambda}\Gamma(\lambda,x)\right\} \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

$$\text{(ii)} \quad [\lambda;x]_{-n} = \frac{(-1)^n e^{-x}}{(1-\lambda)_n\Gamma(\lambda)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{e^{x}\Gamma(\lambda,x)\right\} \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. (i) (4.2) ve Teorem 3.5 (ii) den

$$\begin{aligned}[\lambda;x]_n &= \frac{\Gamma(\lambda+n,x)}{\Gamma(\lambda)} \\ &= \frac{(-1)^n x^{\lambda+n}}{\Gamma(\lambda)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{-\lambda}\Gamma(\lambda,x)\right\}\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (4.2) ve Teorem 3.6 (ii) den

$$\begin{aligned}[\lambda;x]_{-n} &= \frac{\Gamma(\lambda-n,x)}{\Gamma(\lambda)} \\ &= \frac{(-1)^n e^{-x}}{(1-\lambda)_n\Gamma(\lambda)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{e^x\Gamma(\lambda,x)\right\}\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 4.2 Aşağıdaki eşitliklerin her biri doğrudur:

$$\begin{aligned}&\text{(i)} \quad [1;x]_n = n![e^{-x}e_n(x)] \qquad (n\in\mathbb{N}_0)\\ &\text{(ii)} \quad [1;x]_{-n} = x^{1-n}E_n(x) \qquad (n\in\mathbb{N}_0)\\ &\text{(iii)} \quad (1;x)_n = n![1-e^{-x}e_n(x)] \qquad (n\in\mathbb{N}_0)\end{aligned}$$

Burada,

$$e_n(z) := \sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!} \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

ve

$$E_n(z) := \int_1^\infty e^{-zt}\frac{dt}{t^n} \qquad (\Re(z)>0; n\in\mathbb{N}_0)$$

dır.

İspat. (i) Teorem 4.1 (i) de $\lambda = 1$ alınır ve

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

Leibniz kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned}[1;x]_n &= (-1)^n x^{1+n}\frac{d^n}{dx^n}\{x^{-1}\Gamma(1,x)\} \\ &= (-1)^n x^{1+n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}(x^{-1})\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\Gamma(1,x)\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 3.4 (ii) den

$$\frac{d}{dx}\Gamma(1,x) = -e^{-x}$$

olup, dolayısıyla da

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\Gamma(1,x) = (-1)^{n-k}e^{-x}$$

yazılabileceği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
[1;x]_n &= (-1)^n x^{1+n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \{(-1)^k k! x^{-k-1}\}\{(-1)^{n-k} e^{-x}\} \\
&= n! e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= n! e^{-x} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \\
&= n! e^{-x} e_n(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (4.2) eşitliğinde $\lambda = 1,\ \nu = -n$ alınır ve (3.2) kullanıldıktan sonra $t = xz$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
[1;x]_{-n} = \frac{\Gamma(1-n,x)}{\Gamma(1)} &= \int_x^\infty t^{-n} e^{-t} dt \\
&= x^{1-n} \int_1^\infty z^{-n} e^{-xz} dz \qquad (\Re(x) > 0) \\
&= x^{1-n} E_n(x)
\end{aligned}$$

bulunur.

(iii) (4.3) bağıntısında Teorem 4.2 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(1;x)_n &= (1)_n - [1;x]_n \\
&= n! - n! e^{-x} e_n(x) \\
&= n![1 - e^{-x} e_n(x)]
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3 Hata fonksiyonları ile tam olmayan Pochhammer sembolleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$\text{(i)} \quad \left[\frac{1}{2};x\right]_0 = \operatorname{erfc}(\sqrt{x})$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\frac{1}{2};x\right)_0 = \operatorname{erf}(\sqrt{x})$$

İspat. (i) (4.1) ve Teorem 3.9 (i) den

$$\left[\frac{1}{2};x\right]_0 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2},x)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\operatorname{erfc}(\sqrt{x})}{\sqrt{\pi}} = \operatorname{erfc}(\sqrt{x})$$

bulunur.

(ii) (4.2) ve Teorem 3.9 (ii) den

$$\left(\frac{1}{2};x\right)_0=\frac{\gamma(\frac{1}{2},x)}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\sqrt{x})}{\sqrt{\pi}}=\mathrm{erf}(\sqrt{x})$$

elde edilir. ■

Teorem 4.4 $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\text{(i)}\qquad \left[\frac{1}{2};x\right]_n=\left(\frac{1}{2}\right)_n\left\{\mathrm{erfc}(\sqrt{x})+e^{-x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^{j+\frac{1}{2}}}{\Gamma(j+\frac{3}{2})}\right\}$$

$$\text{(ii)}\qquad \left(\frac{1}{2};x\right)_n=\left(\frac{1}{2}\right)_n\left\{1-\mathrm{erfc}(\sqrt{x})-e^{-x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^{j+\frac{1}{2}}}{\Gamma(j+\frac{3}{2})}\right\}$$

İspat. (i) (4.2) ve (3.8) den

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2};x\right]_n&=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n,x)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\\&=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left\{\mathrm{erfc}(\sqrt{x})+e^{-x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^{j+\frac{1}{2}}}{\Gamma(j+\frac{3}{2})}\right\}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)_n\left\{\mathrm{erfc}(\sqrt{x})+e^{-x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^{j+\frac{1}{2}}}{\Gamma(j+\frac{3}{2})}\right\}\end{aligned}$$

bulunur.

(ii) (4.3) ve (i) den

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2};x\right)_n&=\left(\frac{1}{2}\right)_n-\left[\frac{1}{2};x\right]_n\\&=\left(\frac{1}{2}\right)_n\left\{1-\mathrm{erfc}(\sqrt{x})-e^{-x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^{j+\frac{1}{2}}}{\Gamma(j+\frac{3}{2})}\right\}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. ■

Uyarı 4.5 p parametreli

$$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_p$$

dizilişi A_p ile gösterilsin. Bu taktirde $(A_p)_n$ Pochhammer sembolü, $(A_p;x)_n$ ve $[A_p;x]_n$ tam olmayan Pochhammer sembolleri

$$\begin{aligned}(A_p)_n&=(a_1)_n(a_2)_n(a_3)_n\ldots(a_p)_n\\(A_p;x)_n&=(a_1;x)_n(a_2)_n(a_3)_n\ldots(a_p)_n\\[A_p;x]_n&=[a_1;x]_n(a_2)_n(a_3)_n\ldots(a_p)_n\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. (4.3) den

$$\begin{aligned}(A_p;x)_n+[A_p;x]_n &= \{(a_1;x)_n+[a_1;x]_n\}(a_2)_n(a_3)_n\dots(a_p)_n\\ &= (a_1)_n(a_2)_n(a_3)_n\dots(a_p)_n\\ &= (A_p)_n\end{aligned}$$

olduğu görülür.

4.2 TAM OLMAYAN GAUSS HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

Tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonları

$$ {}_2\gamma_1((a,x),b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;x)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{4.4}$$

$$ {}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a;x]_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanır ve bu fonksiyonlar yardımıyla

$$ {}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z)+{}_2\gamma_1((a,x),b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z) \tag{4.6}$$

bağıntısı yazılabilir.

(4.6) dan dolayı sadece ${}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z)$ fonksiyonunun özelliklerini incelemek yeterli olacaktır.

Teorem 4.6 (Diferensiyel Denklem)

$$\omega=\omega(z)={}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z)+{}_2\gamma_1((a,x),b;c;z)$$

fonksiyonu

$$z(1-z)\frac{d^2\omega}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{d\omega}{dz}-ab\omega=0 \tag{4.7}$$

hipergeometrik denkleminin bir çözümüdür.

İspat. (4.6) dan

$$\omega=\omega(z)={}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z)+{}_2\gamma_1((a,x),b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)$$

olduğunu dikkate almak yeterlidir. ∎

Uyarı 4.7 Şimdiye kadar tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonlarını ayrı ayrı çözüm kabul eden diferensiyel denklemlerin bulunamadığını belirtmekte fayda vardır.

Teorem 4.8 (İntegral Gösterimi) ${}_2\Gamma_1$ fonksiyonu için bir integral gösterimi

$$ {}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t} \, {}_1F_1(b;c;zt)dt \tag{4.8} $$

$$ (x \geq 0; x = 0 \text{ için } \Re(a) > 0) $$

dır.

İspat. (4.2) de (3.2) nin dikkate alınmasıyla, $[a;x]_n$ tam olmayan Pochhammer sembolü için

$$ [a;x]_n = \frac{\Gamma(a+n,x)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a+n-1}e^{-t}dt \tag{4.9} $$

$$ (x \geq 0; x = 0 \text{ için } \; \Re(a) > 0) $$

şeklinde bir integral gösterimi yazılabilir. Bu (4.5) de kullanılırsa

$$ \begin{aligned} {}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \int_x^\infty t^{a+n-1}e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{(c)_n} \frac{(zt)^n}{n!} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t} \, {}_1F_1(b;c;zt)dt \end{aligned} $$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler esnasında seri ve integral sırasıyla

$$ |z| \leq \mathfrak{M} < \infty, \quad \mathfrak{M} > 0 $$

$$ x \geq 0; x = 0 \text{ için } \Re(a) > 0 $$

için mutlak yakınsak olduğundan toplam ve integral işleminin sırası değiştirilmiştir. ■

Sonuç 4.9 $x = 0$ için, ${}_2\Gamma_1$ tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonu ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonuna indirgenir. Dolayısıyla (4.8) de $x = 0$ alınırsa,

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t} \, {}_1F_1(b;c;zt)dt \quad (\Re(a) > 0) $$

integral gösterimi kolayca görülür ([22], s. 43).

Teorem 4.10 (Türev Formülü) ${}_2\Gamma_1$ fonksiyonu için

$$\frac{d^k}{dz^k}\Big[\,{}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z)\Big] = \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\;{}_2\Gamma_1((a+k,x),b+k;c+k;z) \quad (4.10)$$

$$(k \in \mathbb{N}_0)$$

dır.

İspat. k üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılır. $k=0$ için (4.10) aşikardır. (4.5) ifadesinin her iki yanının z ye göre türevi alınır ve

$$\begin{aligned} [a;x]_{n+1} &= a\,[a+1;x]_n \\ (a)_{n+1} &= a(a+1)_n \end{aligned}$$

özellikleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\Big[\,{}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z)\Big] &= \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a;x]_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[a;x]_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a;x]_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}}\frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{ab}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a+1;x]_n(b+1)_n}{(c+1)_n}\frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{ab}{c}\;{}_2\Gamma_1((a+1,x),b+1;c+1;z) \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir ki, bu $k=1$ için (4.10) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir. Şimdi (4.10) eşitliğinin $k=m$ için sağlandığını kabul edelim, yani

$$\frac{d^m}{dz^m}\Big[\,{}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z)\Big] = \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\;{}_2\Gamma_1((a+m,x),b+m;c+m;z) \quad (4.12)$$

olsun. (4.11) ve (4.12) den

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\Big[\,{}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z)\Big] &= \frac{d}{dz}\Big\{\frac{d^m}{dz^m}\Big[\,{}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z)\Big]\Big\} \\ &= \frac{d}{dz}\Big\{\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\;{}_2\Gamma_1((a+m,x),b+m;c+m;z)\Big\} \\ &= \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\frac{d}{dz}\Big\{\,{}_2\Gamma_1((a+m,x),b+m;c+m;z)\Big\} \\ &= \frac{(a)_m(a+m)(b)_m(b+m)}{(c)_m(c+m)}\;{}_2\Gamma_1((a+m+1,x),b+m+1;c+m+1;z) \\ &= \frac{(a)_{m+1}(b)_{m+1}}{(c)_{m+1}}\;{}_2\Gamma_1((a+m+1,x),b+m+1;c+m+1;z) \end{aligned}$$

bulunur. Bu (4.10) eşitliğinin $k = m + 1$ için doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.11 (4.10) eşitliğinde $x = 0$ alınırsa, ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu için

$$\frac{d^k}{dz^k}\left\{ {}_2F_1(a,b;c;z)\right\} = \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\ {}_2F_1(a+k,b+k;c+k;z) \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

türev formülü kolayca görülür ([3], s. 278).

Teorem 4.12 (Dönüşüm Formülü) ${}_2\Gamma_1$ fonksiyonu için

$${}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z) = (1-z)^{-a}\ {}_2\Gamma_1\left((a,x(1-z)),c-b;c;-\frac{z}{1-z}\right) \quad (4.13)$$

dir.

İspat. (4.8) de (2.10) eşitliği ile verilen

$${}_1F_1(b;c;z) = e^z\ {}_1F_1(c-b;c;-z)$$

birinci Kummer formülü kullanıldıktan sonra $\tau = (1-z)t$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
{}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z) &= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\ {}_1F_1(b;c;zt)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}e^{-(1-z)t}\ {}_1F_1(c-b;c;-zt)dt \\
&= \frac{(1-z)^{-a}}{\Gamma(a)}\int_{x(1-z)}^\infty \tau^{a-1}e^{-\tau}\ {}_1F_1\left(c-b;c;\left(-\frac{z}{1-z}\right)\tau\right)d\tau
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlikte (4.8) dikkate alınırsa

$${}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z) = (1-z)^{-a}\ {}_2\Gamma_1\left((a,x(1-z)),c-b;c;-\frac{z}{1-z}\right)$$

elde edilir. ■

Uyarı 4.13 $x \neq 0$ için ${}_2\Gamma_1$ tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonu a ve b parametrelerine göre simetrik olmadığından, (4.13) dönüşüm formülü kullanılarak başka bir dönüşüm formülü bulma olasılığı yoktur.

Sonuç 4.14 (4.13) de $x = 0$ alınırsa, ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu için

$${}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\ {}_2F_1\left(a,c-b;c;-\frac{z}{1-z}\right) \quad (4.14)$$

dönüşüm formülü kolayca görülür ([19], s. 60).

Teorem 4.15 (Özel Değer) ${}_2\Gamma_1$ fonksiyonu için

$$
\begin{aligned}
{}_2\Gamma_1((a,x),&b;c;1) \\
&= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} - \frac{x^a}{\Gamma(a+1)}\ {}_2F_2(c-b,a;c,a+1;-x) \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. (4.6) bağıntısında $z=1$ alınır ve (2.10) ile verilen

$$
{}_1F_1(b;c;z) = e^z\ {}_1F_1(c-b;c;-z)
$$

birinci Kummer formülü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
{}_2\Gamma_1((a,x),b;c;1) &= {}_2F_1(a,b;c;1) - \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x t^{a-1}e^{-t}\ {}_1F_1(b;c;t)dt \\
&= {}_2F_1(a,b;c;1) - \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x t^{a-1}\ {}_1F_1(c-b;c;-t)dt \\
&\qquad\qquad (\Re(a)>0; x\geq 0)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu son eşitlikte

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b;c;1) =& \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \\
& (\Re(c-a-b)>0; c\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-)
\end{aligned}
$$

Gauss toplam formülü ([19], s. 49) ve

$$
\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x t^{a-1}\ {}_1F_1(c-b;c;-t)dt = \frac{x^a}{\Gamma(a+1)}\ {}_2F_2(c-b,a;c,a+1;-x)
$$

integral formülü ([19], s. 104) dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
{}_2\Gamma_1((a,x),b;c;1) =& \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} - \frac{x^a}{\Gamma(a+1)}\ {}_2F_2(c-b,a;c,a+1;-x) \\
& (x\geq 0; \Re(a)>0; \Re(c-a-b)>0; c\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-)
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Teorem 4.16 (Birinci Rekürans Bağıntısı) ${}_2\Gamma_1$ fonksiyonu için bir rekürans bağıntısı

$$
\begin{aligned}
(b-c+1)&\ {}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z) \\
&= b\ {}_2\Gamma_1((a,x),b+1;c;z) - (c-1)\ {}_2\Gamma_1((a,x),b;c-1;z) \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. (4.8) integral gösterimi ve

$$(b-c+1)\ {}_1F_1(b;c;z) = b\ {}_1F_1(b+1;c;z) - (c-1)\ {}_1F_1(b;c-1;z)$$

reküırans bağıntısı ([19], s.124) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}(b-c+1)\ {}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z) &= \frac{b-c+1}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\ {}_1F_1(b;c;zt)dt \\ &= \frac{b}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\ {}_1F_1(b+1;c;zt)dt \\ &- \frac{(c-1)}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\ {}_1F_1(b;c-1;zt)dt \\ &= b\ {}_2\Gamma_1((a,x),b+1;c;z) - (c-1)\ {}_2\Gamma_1((a,x),b;c-1;z)\end{aligned}$$

bulunur. ■

Sonuç 4.17 (4.16) da $x=0$ alınırsa, ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu için

$$\begin{aligned}&(b-c+1)\ {}_2F_1(a,b;c;z) \\ &\qquad = b\ {}_2F_1(a,b+1;c;z) - (c-1)\ {}_2F_1(a,b;c-1;z)\end{aligned}$$

rekürans bağıntısı kolayca görülür ([3], s. 283).

Teorem 4.18 (İkinci Rekürans Bağıntısı) ${}_2\Gamma_1$ fonksiyonu için rekürans bağıntısı

$$\begin{aligned}&\frac{az}{c}\ {}_2\Gamma_1((a+1,x),b+1;c+1;z) \\ &\qquad = {}_2\Gamma_1((a,x),b+1;c;z) - {}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z) \qquad (4.17)\end{aligned}$$

dir.

İspat. (4.8) integral gösterimi ve

$$z\ {}_1F_1(b;c+1;z) = c\ {}_1F_1(b;c;z) - c\ {}_1F_1(b-1;c;z)$$

rekürans bağıntısı ([3], s. 305) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}az\ {}_2\Gamma_1((a+1,x),b+1;c+1;z) &= \frac{a}{\Gamma(a+1)}\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\{zt\ {}_1F_1(b+1;c+1;zt)\}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\{c\ {}_1F_1(b+1;c;zt) - c\ {}_1F_1(b;c;zt)\}dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\ {}_1F_1(b+1;c;zt)dt \\ &- \frac{c}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\ {}_1F_1(b;c;zt)dt \\ &= c\{\ {}_2\Gamma_1((a,x),b+1;c;z) - {}_2\Gamma_1((a,x)b;c;z)\}\end{aligned}$$

olup, her iki tarafın c ile bölünmesiyle

$$\frac{az}{c}\ {}_2\Gamma_1((a+1,x),b+1;c+1;z) = {}_2\Gamma_1((a,x),b+1;c;z) - {}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z)$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.19 (4.17) de $x=0$ alınırsa, ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu için

$$\frac{az}{c}\ {}_2F_1(a+1,b+1;c+1;z) = {}_2F_1(a,b+1;c;z) - {}_2F_1(a,b;c;z) \quad (4.18)$$

reküransbağıntısı kolayca görülür ([3], s. 283).

Teorem 4.20 ${}_2\Gamma_1((a;x),b;c;z)$ tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile $\gamma(\alpha,x)$ tam olmayan Gamma fonksiyonu arasındaki ilişki

$$ {}_2\Gamma_1((a,x),b;b+1;-z) = \frac{bz^{-b}}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-b-1}e^{-t}\gamma(b,zt)dt \quad (4.19)$$

$$(x \geq 0; x=0 \text{ için } \Re(a)>0)$$

dir.

İspat. (4.8) de $c=b+1$ ve z yerine $-z$ alındıktan sonra

$${}_1F_1(s;s+1;-z) = sz^{-s}\gamma(s,z)$$

eşitliği ([19], s. 127) kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}_2\Gamma_1((a,x),b;b+1;-z) &= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\ {}_1F_1(b;b+1;-zt)dt \\ &= \frac{bz^{-b}}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-b-1}e^{-t}\gamma(b,zt)dt \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.21 (4.19) da $x=0$ alınırsa,

$${}_2F_1(a,b;b+1;-z) = \frac{bz^{-b}}{\Gamma(a)}\int_0^\infty t^{a-b-1}e^{-t}\gamma(b,zt)dt \qquad (\Re(a)>0) \quad (4.20)$$

eşitliği kolayca görülür.

Uyarı 4.22 (4.20) de (4.14) dönüşüm formülünün kullanılmasıyla çok iyi bilinen

$$\int_0^\infty \tau^{s-1}e^{-\tau\beta}\gamma(b,\tau)d\tau = \frac{\Gamma(b+s)}{b(1+\beta)^{b+s}}\ {}_2F_1\left(1,b+s;b+1;\frac{1}{1+\beta}\right)$$

$$(\Re(b+s)>0; \Re(\beta)>0)$$

eşitliği ([12], s. 325) yeniden elde edilebilir. Gerçekten de (4.20) de $a = b + s$ alındıktan sonra $t = \frac{\tau}{z}$ dönüşümü yapılırsa

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(b+s, b; b+1; -z) &= \frac{bz^{-b}}{\Gamma(b+s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \gamma(b, zt) dt \qquad (\Re(b+s) > 0) \\
&= \frac{bz^{-b}}{\Gamma(b+s)} \int_0^\infty \tau^{s-1} e^{-\frac{\tau}{z}} z^{-s} \gamma(b, \tau) d\tau \\
&= \frac{bz^{-b-s}}{\Gamma(b+s)} \int_0^\infty \tau^{s-1} e^{-\frac{\tau}{z}} \gamma(b, \tau) d\tau
\end{aligned}
$$

olup, $z = \frac{1}{\beta}$ alınırsa

$$
{}_2F_1\left(b+s, b; b+1; -\frac{1}{\beta}\right) = \frac{b\beta^{b+s}}{\Gamma(b+s)} \int_0^\infty \tau^{s-1} e^{-\tau\beta} \gamma(b, \tau) d\tau \qquad (\Re(\beta) > 0)
$$

bulunur. Sol tarafta (4.14) dönüşüm formülü kullanılırsa

$$
\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{-b-s} {}_2F_1\left(b+s, 1; b+1; \frac{1}{1+\beta}\right) = \frac{b\beta^{b+s}}{\Gamma(b+s)} \int_0^\infty \tau^{s-1}\ e^{-\tau\beta} \gamma(b, \tau) d\tau
$$

ya da

$$
\int_0^\infty \tau^{s-1} e^{-\tau\beta} \gamma(b, \tau) d\tau = \frac{\Gamma(b+s)}{b(1+\beta)^{b+s}}\ {}_2F_1\left(1, b+s; b+1; \frac{1}{1+\beta}\right)
$$

elde edilir.

Teorem 4.23 ${}_2\Gamma_1((a; x), b; c; z)$ tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile $\mathrm{erf}(z)$ hata fonksiyonu arasındaki ilişki

$$
{}_2\Gamma_1\left((a,x), \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}; -z\right) = \frac{1}{2\Gamma(a)} \sqrt{\frac{\pi}{z}} \int_x^\infty t^{a-\frac{3}{2}} e^{-t} \mathrm{erf}(\sqrt{zt}) dt
$$

$$
(x \geq 0; x = 0 \text{ için } \Re(a) > 0)
$$

dir.

İspat. (4.19) da $b = \frac{1}{2}$ alınır ve Teorem 3.9 (ii) dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
{}_2\Gamma_1\left((a,x), \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}; -z\right) &= \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-\frac{3}{2}} e^{-t} \gamma\left(\tfrac{1}{2}, zt\right) dt \\
&= \frac{1}{2\Gamma(a)} \sqrt{\frac{\pi}{z}} \int_x^\infty t^{a-\frac{3}{2}} e^{-t} \mathrm{erf}(\sqrt{zt}) dt
\end{aligned}
$$

bulunur. ■

Teorem 4.24 ${}_2\Gamma_1((a; x), b; c; z)$ tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile $\Gamma(\alpha, x)$ tam olmayan Gamma fonksiyonu arasındaki ilişki

$$
{}_2\Gamma_1((a,x), b; b; z) = {}_1\Gamma_0((a,x); -; z) = \frac{(1-z)^{-a}}{\Gamma(a)} \Gamma(a, x(1-z)) \tag{4.21}
$$

$$
(|z| < 1; x \geq 0)
$$

dir.

İspat. (4.8) de $c = b$ alındıktan sonra $t = \frac{\tau}{1-z}$ dönüşümü yapılır ve (3.2) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} {}_2\Gamma_1((a,x),b;b;z) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} \; {}_1F_1(b;b;zt) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t(1-z)} dt \\ &= \frac{(1-z)^{-a}}{\Gamma(a)} \int_{x(1-z)}^\infty \tau^{a-1} e^{-\tau} d\tau \\ &= \frac{(1-z)^{-a}}{\Gamma(a)} \Gamma(a, x(1-z)) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.25 (4.21) de $x = 0$ alınırsa,

$$ {}_2F_1(a,b;b;z) = \; {}_1F_0(a;-;z) = (1-z)^{-a}, \qquad (|z| < 1) \tag{4.22}$$

dır ([26], s. 44).

Teorem 4.26 ${}_2\Gamma_1((a;x),b;c;z)$ tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile $\operatorname{erfc}(z)$ tamamlayıcı hata fonksiyonu arasındaki ilişki

$$ {}_2\Gamma_1\left(\left(\tfrac{1}{2},x\right),b;b;1-z\right) = \frac{1}{\sqrt{z}} \operatorname{erfc}(\sqrt{xz})$$

dir.

İspat. (4.21) de $a = \frac{1}{2}$ alınır, z yerine $1 - z$ yazılır ve Teorem 3.9 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}_2\Gamma_1\left(\left(\tfrac{1}{2},x\right),b;b;1-z\right) &= \; {}_1\Gamma_0\left(\left(\tfrac{1}{2},x\right);-;1-z\right) \\ &= \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}, xz\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}} \operatorname{erfc}(\sqrt{xz}) \end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 4.27 (İkinci İntegral Gösterimi) ${}_2\Gamma_1$ fonksiyonu için diğer bir integral gösterimi ise

$$ {}_2\Gamma_1((a,x),b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \; {}_1\Gamma_0((a,x);-;zt) dt \tag{4.23}$$

$$(\Re(c) > \Re(b) > 0; x \geq 0)$$

dir.

İspat. (4.5) de

$$\frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{B(b+n, c-b)}{B(b, c-b)} = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1} dt \tag{4.24}$$

$$(\Re(c) > \Re(b) > 0; n \in \mathbb{N}_0)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
{}_2\Gamma_1((a,x), b; c; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a;x]_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [a;x]_n \left(\frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1} dt \right) \frac{z^n}{n!} \\
&= \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} [a;x]_n \frac{(zt)^n}{n!} \right) dt \\
&= \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \; {}_1\Gamma_0((a,x); -; zt) dt
\end{aligned}$$

$$(\Re(c) > \Re(b) > 0; x \geq 0)$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.28 (4.23) de $x = 0$ alınır ve (4.22) kullanılırsa, ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu için

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt$$

$$(\Re(c) > \Re(b) > 0; |\arg(1-z)| < \pi)$$

integral gösterimi kolayca görülür ([19], s. 47).

4.3 TAM OLMAYAN GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

Uyarı 4.3 de verilen notasyonlar kullanılarak genelleştirilmiş tam olmayan hipergeometrik fonksiyonları

$$\begin{aligned}
{}_p\gamma_q((A_p, x); B_q; z) &= {}_p\gamma_q((a_1, x), a_2, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A_p; x)_n}{(B_q)_n} \frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1; x)_n (a_2)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ve

$$
\begin{aligned}
{}_p\Gamma_q((A_p,x);B_q;z) &= {}_p\Gamma_q((a_1,x),a_2,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[A_p;x]_n}{(B_q)_n}\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a_1;x]_n(a_2)_n\dots(a_p)_n}{(b_1)_n\dots(b_q)_n}\frac{z^n}{n!} \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır. $x=0$ durumunda, ${}_p\Gamma_q$ $(p,q\in\mathbb{N}_0)$ genelleştirilmiş tam olmayan hipergeometrik fonksiyonu ${}_pF_q$ $(p,q\in\mathbb{N}_0)$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonuna indirgenir. Ayrıca (4.25) ve (4.26) kullanılarak

$$
{}_p\gamma_q((A_p,x);B_q;z)+{}_p\Gamma_q((A_p,x);B_q;z)={}_pF_q(A_p;B_q;z) \qquad (4.27)
$$

bağıntısı kolayca görülür. (4.27) bağıntısı, (4.6) nın bir genellemesi olarak düşünülebilir.

Uyarı 4.29

$$
|(\lambda;x)_n|\le|(\lambda)_n| \text{ ve } |[\lambda;x]_n|\le|(\lambda)_n| \qquad (n\in\mathbb{N}_0;\lambda\in\mathbb{C};x\ge 0)
$$

eşitsizlikleri sağlandığından (4.25) ve (4.26) tanımlarındaki sonsuz serilerin mutlak yakınsaklığı için yeterli şartlar, ${}_pF_q$ $(p,q\in\mathbb{N}_0)$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonunun bilinen şartlarından çıkartılabilir [3,4,10,19,23,25,26].

${}_p\Gamma_q$ fonksiyonu için aşağıda verilen teoremlerin her birinin ispatı önceki kısımdaki teoremlerin ispatına benzer olduğundan yapılmayacaktır.

Teorem 4.30 (İlk İntegral Gösterimi) ${}_p\Gamma_q$ fonksiyonu için integral gösterimi

$$
\begin{aligned}
&{}_p\Gamma_q((a_1,x),a_2,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;z) \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(a_1)}\int_x^{\infty} t^{a_1-1}e^{-t}{}_{p-1}F_q(a_2,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;zt)dt \qquad (4.28) \\
&\qquad\qquad (x\ge 0; x=0 \text{ için } \Re(a_1)>0)
\end{aligned}
$$

dir.

Sonuç 4.31 (4.28) de $x=0$ alınırsa, ${}_pF_q$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu için

$$
\begin{aligned}
&{}_pF_q(a_1,a_2,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;z) \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(a_1)}\int_0^{\infty} t^{a_1-1}e^{-t}\,{}_{p-1}F_q(a_2,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;zt)dt \quad (\Re(a_1)>0)
\end{aligned}
$$

integral gösterimi kolayca görülür ([12], s. 337).

Teorem 4.32 (İkinci İntegral Gösterimi) ${}_p\Gamma_q$ fonksiyonu için diğer bir integral gösterimi

$$
\begin{aligned}
{}_p\Gamma_q((a_1,x),a_2,\ldots,a_{p-1},b;b_1,\ldots,b_{q-1},c;z) &= \frac{1}{B(b,c-b)} \\
\cdot \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}{}_{p-1}\Gamma_{q-1}((a_1,x),a_2,\ldots,a_{p-1};b_1,\ldots,b_{q-1};zt)dt \quad (4.29) \\
(\Re(c)>\Re(b)>0;x\geq 0)
\end{aligned}
$$

dir.

Sonuç 4.33 (4.29) da $x=0$ alınırsa, ${}_pF_q$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu için

$$
\begin{aligned}
&{}_pF_q(a_1,a_2,\ldots,a_{p-1},b;b_1,\ldots,b_{q-1},c;z) \\
&= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\ {}_{p-1}F_{q-1}(a_1,a_2,\ldots,a_{p-1};b_1,\ldots,b_{q-1};zt)dt \\
&\qquad (\Re(c)>\Re(b)>0)
\end{aligned}
$$

integral gösterimi kolayca görülür ([19], s. 85).

Teorem 4.34 (Türev Formülü) ${}_p\Gamma_q$ fonksiyonu için türev formülü

$$
\begin{aligned}
\frac{d^k}{dz^k}\Big[{}_p\Gamma_q((a_1,x),a_2,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)\Big] &= \frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k} \\
\cdot\, {}_p\Gamma_q((a_1+k,x),a_2+k,\ldots,a_p+k;b_1+k,\ldots,b_q+k;z) \quad (4.30) \\
(k\in\mathbb{N}_0)
\end{aligned}
$$

dir.

Sonuç 4.35 (4.30) da $x=0$ alınırsa, ${}_pF_q$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu için

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^k}{dz^k}\Big[{}_pF_q(a_1,a_2,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)\Big] \\
&= \frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k}\ {}_pF_q(a_1+k,a_2+k,\ldots,a_p+k;b_1+k,\ldots,b_q+k;z)
\end{aligned}
$$

türev formülü kolayca görülür ([19], s. 107).

4.4 BAZI SONUÇLAR

Kısım 4.3 den, $p = q = 1$ özel durumuna karşılık gelen tam olmayan konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının seri gösterimleri

$$ {}_1\gamma_1((a,x);c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;x)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{4.31} $$

$$ {}_1\Gamma_1((a,x);c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a;x]_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{4.32} $$

ve integral gösterimleri

$$ {}_1\gamma_1((a,x);c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1} e^{-t}\ {}_0F_1(-;c;zt)dt \tag{4.33} $$

$$ (x \geq 0; \Re(a) > 0) $$

$$ {}_1\Gamma_1((a,x);c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t}\ {}_0F_1(-;c;zt)dt \tag{4.34} $$

$$ (x \geq 0; x = 0 \text{ için } \Re(a) > 0) $$

şeklinde yazılabilir. Açıktır ki

$$ {}_1\Gamma_1((a,x);c;z) +\ {}_1\gamma_1((a,x);c;z) =\ {}_1F_1(a;c;z) $$

bağıntısı da sağlanır. Ayrıca $c = a$ için

$$ {}_1\Gamma_1((a,x);a;z) +\ {}_1\gamma_1((a,x);a;z) =\ {}_1F_1(a;a;z) = e^z \tag{4.35} $$

dır.

Teorem 4.36 ${}_1\Gamma_1$ fonksiyonu için

(i) $$ {}_1\Gamma_1((a,x);c+1;z) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)} z^{-\frac{c}{2}} \int_x^{\infty} t^{a-\frac{c}{2}-1} e^{-t} I_c(2\sqrt{zt})dt $$

(ii) $$ {}_1\Gamma_1((a,x);c+1;-z) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)} z^{-\frac{c}{2}} \int_x^{\infty} t^{a-\frac{c}{2}-1} e^{-t} J_c(2\sqrt{zt})dt $$

$$ (x \geq 0; x = 0 \text{ için } \Re(a) > 0) $$

dir. Burada $I_c(z)$, $J_c(z)$

$$ I_c(z) = \frac{(\frac{z}{2})^c}{\Gamma(c+1)}\ {}_0F_1\left(-;c+1;\frac{z^2}{4}\right) \quad (c \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-) \tag{4.36} $$

ve

$$ J_c(z) = \frac{(\frac{z}{2})^c}{\Gamma(c+1)}\ {}_0F_1\left(-;c+1;-\frac{z^2}{4}\right) \quad (c \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-) \tag{4.37} $$

eşitlikleri ile tanımlanan sırasıyla birinci çeşit modifiye Bessel ve birinci çeşit Bessel fonksiyonlarıdır [3].

İspat. (i) (4.34) de c yerine $c+1$ alındıktan sonra (4.36) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}_1\Gamma_1((a,x);c+1;z) =& \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\ {}_0F_1(-;c+1;zt)dt \\ =& \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)} z^{-\frac{c}{2}} \int_x^\infty t^{a-\frac{c}{2}-1}e^{-t}I_c(2\sqrt{zt})dt \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (4.34) de z yerine $-z$ yazılır, c yerine $c+1$ alınır ve (4.37) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}_1\Gamma_1((a,x);c+1;-z) =& \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\ {}_0F_1(-;c+1;-zt)dt \\ =& \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)} z^{-\frac{c}{2}} \int_x^\infty t^{a-\frac{c}{2}-1}e^{-t}J_c(2\sqrt{zt})dt \end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 4.37 ${}_1\gamma_1$ fonksiyonu için

(i) $${}_1\gamma_1((a,x),c+1;z) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)} z^{-\frac{c}{2}} \int_0^x t^{a-\frac{c}{2}-1}e^{-t}I_c(2\sqrt{zt})dt$$

(ii) $${}_1\gamma_1((a,x),c+1;-z) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)} z^{-\frac{c}{2}} \int_0^x t^{a-\frac{c}{2}-1}e^{-t}J_c(2\sqrt{zt})dt$$

$$(x \geq 0; \Re(a) > 0)$$

dir.

İspat. (i) (4.33) de c yerine $c+1$ alındıktan sonra (4.36) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}_1\gamma_1((a,x);c+1;z) =& \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1}e^{-t}\ {}_0F_1(-;c+1;zt)dt \\ =& \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)} z^{-\frac{c}{2}} \int_0^x t^{a-\frac{c}{2}-1}e^{-t}I_c(2\sqrt{zt})dt \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (4.33) de z yerine $-z$ yazılır, c yerine $c+1$ alınır ve (4.37) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}_1\gamma_1((a,x);c+1;-z) =& \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1}e^{-t}\ {}_0F_1(-;c+1;-zt)dt \\ =& \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)} z^{-\frac{c}{2}} \int_0^x t^{a-\frac{c}{2}-1}e^{-t}J_c(2\sqrt{zt})dt \end{aligned}$$

bulunur. ■

4.5 UYGULAMALAR

${}_p\gamma_q \ (p,q \in \mathbb{N}_0)$ ve ${}_p\Gamma_q \ (p,q \in \mathbb{N}_0)$ tam olmayan genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonları mühendislik ve uygulamalı bilimlerde çok kullanışlı fonksiyonlardır. Bu kısımda bu fonksiyonların özel durumlarının iletişim teorisi, olasılık teorisi ve yeraltı suyu pompalama modellemelerine kullanımları üzerinde durulacaktır.

4.5.1 İletişim Teorisine Uygulamaları

İletişim teorisinde oldukça önemli bir yere sahip olan genelleştirilmiş Marcum Q ve q fonksiyonları

$$Q_M(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha^{M-1}} \int_\beta^\infty t^M e^{-\frac{1}{2}(t^2+\alpha^2)} I_{M-1}(\alpha t)dt \tag{4.38}$$

$$q_M(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha^{M-1}} \int_0^\beta t^M e^{-\frac{1}{2}(t^2+\alpha^2)} I_{M-1}(\alpha t)dt \tag{4.39}$$

şeklinde tanımlanır. Literatür tarandığında Marcum Q ve q fonksiyonları ve bu fonksiyonların genellemeleri üzerine bir çok araştırmaya rastlanır [5,15,16,20].

Bu fonksiyonların, tam olmayan konfluent hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifadeleri Srivastava, Chaudhry ve Agarwal [24] tarafından

$$Q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x}) = e^{-\omega} \ {}_1\Gamma_1((M,x);M;\omega)$$

ve

$$q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x}) = e^{-\omega} \ {}_1\gamma_1((M,x);M;\omega)$$

şeklinde verilmiştir.

Gerçekten de (4.38) ve (4.39) dan

$$Q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x}) = \frac{e^{-\omega}}{(\sqrt{2\omega})^{M-1}} \int_{\sqrt{2x}}^\infty t^M e^{-\frac{t^2}{2}} I_{M-1}(\sqrt{2\omega}\ t)dt$$

ve

$$q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x}) = \frac{e^{-\omega}}{(\sqrt{2\omega})^{M-1}} \int_0^{\sqrt{2x}} t^M e^{-\frac{t^2}{2}} I_{M-1}(\sqrt{2\omega}\ t)dt$$

olup, $u=\frac{t^2}{2}$ dönüşümü yapıldıktan sonra elde edilen eşitliklerde sırasıyla Teorem 4.34 (i) ve Teorem 4.35 (i) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} Q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x}) &= e^{-\omega}\omega^{-\frac{M-1}{2}}\int_x^\infty u^{\frac{M-1}{2}}e^{-u}I_{M-1}(2\sqrt{u\omega})du \\ &= e^{-\omega}\ {}_1\Gamma_1((M,x);M;\omega) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x}) &= e^{-\omega}\omega^{-\frac{M-1}{2}}\int_0^x u^{\frac{M-1}{2}}e^{-u}I_{M-1}(2\sqrt{u\omega})du \\ &= e^{-\omega}\ {}_1\gamma_1((M,x);M;\omega) \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca (4.35) göz önüne alınırsa

$$Q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x})+q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x})=1$$

dır.

4.5.2 Olasılık Teorisine Uygulamaları

Uzun yıllardır açık bir problem olarak kalan χ^2 olasılık dağılımının kümülatif yoğunluk fonksiyonunun kapalı form temsili, Chaudhry ve Qadir [7] tarafından

$$e((x,\omega);M)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma(M+n,x)}{\Gamma(M+n)}\frac{\omega^n}{n!} \tag{4.40}$$

ve

$$E((x,\omega);M)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(M+n,x)}{\Gamma(M+n)}\frac{\omega^n}{n!} \tag{4.41}$$

fonksiyonlarının tanımlanmasıyla ortadan kalkmıştır.

Nadarajah [17] bu fonksiyonların Marcum Q ve q fonksiyonları cinsinden ifadelerini

$$\begin{aligned} e((x,\omega);M) &= e^{\omega}[1-Q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x})] \\ &= e^{\omega}q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} E((x,\omega);M) &= e^{\omega}Q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x}) \\ &= e^{\omega}[1-q_M(\sqrt{2\omega},\sqrt{2x})] \end{aligned}$$

şeklinde vermiştir.

Srivastava, Chaudhry ve Agarwal [24], bu fonksiyonların tam olmayan konfluent hipergeometrik fonksiyonları cinsinden

$$e((x,\omega);M) = {}_1\gamma_1((M,x);M;\omega)$$

ve

$$E((x,\omega);M) = {}_1\Gamma_1((M,x);M;\omega)$$

şeklinde yazılabileceğini göstermişlerdir. Gerçekten de

$$\begin{aligned} e((x,\omega);M) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(M+n,x)}{\Gamma(M+n)} \frac{\omega^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(M+n,x)}{\Gamma(M)} \frac{1}{\frac{\Gamma(M+n)}{\Gamma(M)}} \frac{\omega^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M;x)_n}{(M)_n} \frac{\omega^n}{n!} \\ &= {}_1\gamma_1((M,x);M;\omega) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} E((x,\omega);M) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(M+n,x)}{\Gamma(M+n)} \frac{\omega^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(M+n,x)}{\Gamma(M)} \frac{1}{\frac{\Gamma(M+n)}{\Gamma(M)}} \frac{\omega^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[M;x]_n}{(M)_n} \frac{\omega^n}{n!} \\ &= {}_1\Gamma_1((M,x);M;\omega) \end{aligned}$$

dir.

Ayrıca (4.35) den

$$e((x,\omega);M) + E((x,\omega);M) = e^{\omega}$$

bağıntısı da sağlanır.

4.5.3 Yeraltı Suyu Pompalama Modellemelerine Uygulamaları

Yeraltı suyu pompalama modellemelerindeki bazı problemlerin çözümlerinde ortaya çıkan $\mathcal{M}(\alpha,\beta)$ ve $\mathcal{M}^*(\alpha,\beta)$ fonksiyonları

$$\mathcal{M}(\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-t}\operatorname{erf}(\beta\sqrt{t})}{t}dt \tag{4.42}$$

ve

$$\mathcal{M}^*(\alpha,\beta)=\frac{\alpha e^{-\beta}}{\pi}\int_0^1\frac{e^{-\alpha^2\beta t}}{(1+\alpha^2 t)\sqrt{t}}dt \tag{4.43}$$

şeklinde tanımlanır [21].

Teorem 4.38 $\mathcal{M}(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun seri gösterimi [21] ve $\mathcal{M}^*(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun seri gösterimi [24] sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\text{(i)}\quad \mathcal{M}(\alpha,\beta)=\frac{2\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n,\alpha(1+\beta^2)\right)\left(\frac{1}{2}\right)_n(1)_n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\left(\frac{3}{2}\right)_n}\frac{\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)^n}{n!}$$

$$\text{(ii)}\quad \mathcal{M}^*(\alpha,\beta)=\frac{e^{-\beta}}{\pi\sqrt{\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{1}{\beta}\Big)^n\gamma\left(\tfrac{1}{2}+n,\alpha^2\beta\right)$$

İspat. (i) Teorem 3.9 (ii) ve Teorem 3.1 (i) den

$$\begin{aligned}\operatorname{erf}(\beta\sqrt{t})=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma\Big(\tfrac{1}{2},\beta^2 t\Big)\\=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\beta^2 t)^{\frac{1}{2}}e^{-\beta^2 t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta^2 t)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+1}}\\=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\beta^2 t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta^2 t)^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+1}}\end{aligned}$$

yazılabileceği (4.42) de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\alpha,\beta)=&\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-t}\operatorname{erf}(\beta\sqrt{t})}{t}dt\\=&\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-(1+\beta^2)t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta^2)^n t^n}{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+1}}\right)dt\\=&\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta^2)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+1}}\left(\int_{\alpha}^{\infty}t^{n-\frac{1}{2}}e^{-(1+\beta^2)t}dt\right)\end{aligned}$$

olup, $u=(1+\beta^2)t$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\alpha,\beta)=&\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+1}}\int_{\alpha(1+\beta^2)}^{\infty}u^{n-\frac{1}{2}}e^{-u}du\\
=&\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)^n}{\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}}\Gamma\Big(\tfrac{1}{2}+n,\alpha(1+\beta^2)\Big)\\
=&\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)^n}{\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+n)}{\Gamma(\frac{3}{2})}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Gamma\Big(\frac{1}{2}+n,\alpha(1+\beta^2)\Big)}{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}\\
=&\frac{2\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)^n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n}\left(\tfrac{1}{2}\right)_n\frac{\Gamma\Big(\frac{1}{2}+n,\alpha(1+\beta^2)\Big)}{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}\\
=&\frac{2\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\Big(\frac{1}{2}+n,\alpha(1+\beta^2)\Big)\left(\frac{1}{2}\right)_n(1)_n}{\Gamma(\frac{1}{2}+n)\left(\frac{3}{2}\right)_n}\frac{\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur.

(ii)

$$(1+\alpha^2t)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(1)_n\frac{(-\alpha^2t)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha^2t)^n$$

seri açılımının (4.43) de dikkate alınmasıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^*(\alpha,\beta)=&\frac{\alpha e^{-\beta}}{\pi}\int_0^1 e^{-\alpha^2\beta t}(1+\alpha^2t)^{-1}t^{-\frac{1}{2}}dt\\
=&\frac{\alpha e^{-\beta}}{\pi}\int_0^1 e^{-\alpha^2\beta t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha^2t)^n\right)t^{-\frac{1}{2}}dt\\
=&\frac{\alpha e^{-\beta}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha^2)^n\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}e^{-\alpha^2\beta t}dt
\end{aligned}$$

olup, $\alpha^2\beta t=u$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^*(\alpha,\beta)=&\frac{e^{-\beta}}{\pi\sqrt{\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{1}{\beta}\Big)^n\int_0^{\alpha^2\beta}u^{n-\frac{1}{2}}e^{-u}du\\
=&\frac{e^{-\beta}}{\pi\sqrt{\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{1}{\beta}\Big)^n\gamma\big(\tfrac{1}{2}+n,\alpha^2\beta\big)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Ayrıca bu fonksiyonların tam olmayan hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifadeleri Teorem 4.38 (i) deki serinin düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\alpha,\beta) &= \frac{2\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n, \alpha(1+\beta^2))\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}(1)_n}{\Gamma(\frac{1}{2}+n)(\frac{3}{2})_n} \frac{\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)^n}{n!} \\
&= \frac{2\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}; \alpha(1+\beta^2)\right]_n (1)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} \frac{\left(\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right)^n}{n!} \\
&= \frac{2\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\, {}_2\Gamma_1\left((\tfrac{1}{2}, \alpha(1+\beta^2)), 1; \frac{3}{2}; \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \right)
\end{aligned}$$

ve Teorem 4.38 (ii) deki serinin düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^*(\alpha,\beta) =& \frac{e^{-\beta}}{\pi\sqrt{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma\left(\frac{1}{2}+n, \alpha^2\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{(1)_n}{(1)_n} \left(-\frac{1}{\beta}\right)^n \\
=& \frac{e^{-\beta}}{\sqrt{\pi\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}; \alpha^2\beta\right)_n (1)_n}{n!} \left(-\frac{1}{\beta}\right)^n \\
=& \frac{e^{-\beta}}{\sqrt{\pi\beta}}\, {}_2\gamma_0\Big(\left(\tfrac{1}{2}, \alpha^2\beta\right), 1; -; -\frac{1}{\beta}\Big)
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir [24].

KAYNAKLAR

[1] Altın A. *Uygulamalı Matematik*, Gazi Kitabevi, Ankara, **2011**.

[2] Abramowitz M.; Stegun I.A. *Handbook of Mathematical Functions with formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Applied Mathematics Series 55, Tenth Printing, National Bureau of Standards, Washington, DC, **1972**; Reprinted by Dover Publications, New York,**1965**.

[3] Andrews L.C. *Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians*, Macmillan Company, New York,**1984**.

[4] Bailey W.N. *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 32, Cambridge University Press, Cambridge, **1935**; Reprinted by Stechert-Hafner Service Agency, New York and London, **1964**.

[5] Cantrell P.E.; Ojha A.K. *Comparison of generalized Q- functions algorithms*, IEEE Trans. Inform. Theory IT-33 (**1987**), 591-596.

[6] Carlson B.C. *Special Functions of Applied Mathematics*, Academic Press, New York, **1977**.

[7] Chaudhry M.A.; Qadir A. *Incomplete exponential and hypergeometric functions with applications to non-central* χ^2 *- distribution*, Comm. Statist. Theory Methods, 34, **2005**, 525-535.

[8] Chaudhry M.A.; Zubair S.M. *Generalized incomplete gamma functions and applications*, Journal of Computational and Applied Math. 55, **1994**, 99-124.

[9] Chaudhry M.A.; Zubair S.M. *On a Class of Incomplete Gamma Functions with Applications*, Chapman and Hall(CRC Press Company), Boca Raton, **2001**.

[10] Erdélyi A.; Magnus W.; Oberhettinger F.; Tricomi F.G. *Higher Transcendental Functions*, Vol.I, McGraw-Hill Book Company, New York, **1953**.

[11] Erdélyi A.; Magnus W.; Oberhettinger F.; Tricomi F.G. *Higher Transcendental Functions*, Vol.II, McGraw-Hill Book Company, New York, **1953**.

[12] Erdélyi A.; Magnus W.; Oberhettinger F.; Tricomi F.G. *Tables of Integral Transforms*, Vol.I, McGraw-Hill Book Company, New York, **1954**.

[13] Gradshteyn I.M.; Rhyzik I.M. *Table of Integrals, Series and Products*, Seventh Edition, Academic Press. New York, **2007**.

[14] Kilbas A. A.; Srivastava H.M.; Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematical Studies 204, Elsevier (Nort-Holland) Science Publishers, Amsterdam, **2006**.

[15] Li R.; Kam P.Y.; Fu H. *Computing and bounding the generalized Marcum Q- via a geometric approach*, Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT'06), Seattle, Washington, June **2006**, 1090-1094.

[16] Li R.; Kam P.Y.; Fu H. *New representations and bounds for the generalized Marcum Q- function via a geometric approach, and an application*, IEEE Trans. Comm., 58, **2010**, 157-169.

[17] Nadarajah S. *A note on incomplete exponential functions*, Arab. J. Sci.Engrg., 32, **2007**, 223-224.

[18] Prudnikov A.P.; Brychkov Yu. A.; Marichev O.I. *Integrals and series*, vol. II, Gordon and Breach Science Publishers, New York **1992**.

[19] Rainville E.D. *Special Functions*, Macmillan Company, New Yokk, **1960**; Reprinted by Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, **1971**.

[20] Shnidman D.A. *The calculation of the probability of detection and the generalized Marcum Q- function*, IEEE Trans. Inform. Theory IT-35, **1989**, 389-400.

[21] Simon M.K.; Alouini M.S. *Digital Communication Over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis*, John Wiley and Sons, New York, **2000**.

[22] Slater L.J. *Confluent Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, **1960**.

[23] Slater L.J. *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, **1966**.

[24] Srivastava H.M.; Chaudhry M.A.; Agarwal R.P. *The incomplete Pochhammer symbols and their applications the hypergeometric and related functions*, Integral Transforms Spec. Funct., 23, 2012, 659-683.

[25] Srivastava H.M.; Karlsson P.W. *Multiple Gaussian Hypergeometric Series*, Halsted Press, (Ellis Horwood Limited,Chichester), John Wiley and Sons, New York, **1985**.

[26] Srivastava H.M.; Manocha H.L. *A Treatise on generating functions*, Halsted Press Wiley, New York **1984**.

[27] Wang Z.X.; Guo D.R. *Special Functions*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, **1989**.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı	:	Ebru YILDIZ
Doğum Yeri	:	İzmir
Doğum Tarihi	:	22.09.1989
Ünvanı	:	Yüksek Lisans Öğrencisi
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Bilgileri

Orta Öğrenim	:	Özel Yesevi Lisesi, 2003 - 2006
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2006 - 2010
Yüksek Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2010 - ...