T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# TERSLENEBİLİR VE SİMETRİK HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMELERİ

Ruhi YALÇIN

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2022

T.C.

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

# TERSLENEBİLİR VE SİMETRİK HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMELERİ

Ruhi YALÇIN

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

DOÇ. DR. HANDAN KÖSE

KIRŞEHİR / 2022

# TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ruhi YALÇIN

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-nin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

# ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında yardımlarını ve tecrübelerini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Handan KÖSE'ye teşekkürlerimi bir borç bilirim. Çalışmamın hazırlanışında hayatımın her döneminde ellerini üzerimden eksik etmeyen bana tüm yürekleriyle inanan aileme maddi ve manevi imkanı sağlayan annem Necde YALÇIN ve babam Fazlı YALÇIN'a ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

TEMMUZ, 2022 Ruhi YALÇIN

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa No**

# SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $R$ | : Birimli Halka |
| $\mathbb{Z}$ | : Tam sayılar halkası |
| $\mathbb{Z}_n$ | : $n$ moduna göre kongrüans sınıflarının halkası |
| $C(R)$ | : $R$ halkasının merkezi |
| $N(R)$ | : $R$ halkasındaki üstel sıfırlı elemanların kümesi |
| $P(R)$ | : $R$ halkasının asal radikali |
| $R[x]$ | : $x$ bilinmeyeni ile $R$ üzerindeki polinom halkası |
| $R[x; x^{-1}]$ | : $R$ üzerindeki Laurent polinom halkası |
| $\alpha$ | : $R$ nin endomorfizması |
| $T_n(R)$ | : $R$ üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matris halkası |
| $T(R, R)$ | : $R$ nin aşikar genişlemesi |
| $D(R, \mathbb{Z})$ | : $R$ nin $\mathbb{Z}$ boyunca Dorroh genişlemesi |

# ÖZET

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TERSLENEBİLİR VE SİMETRİK HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMELERİ**

**Ruhi YALÇIN**

**Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**MATEMATİK Anabilim Dalı**

**Danışman: DOÇ. DR. HANDAN KÖSE**

Tez temel kavramlar ve üç ana başlıktan oluşmaktadır. İlki merkezi terslenebilir halkalardır. Merkezi terslenebilir halkalar; terslenebilir halkaların bir genelleştirmesidir. Terslenebilir halkalar merkezi terslenebilirdir ve merkezi terslenebilir halkalar zayıf terslenebilirdir. İkinci ana başlıkta; simetrik halkaların bir genelleştirmesi olan merkezi simetrik halkalar çalışıldı. Simetrik halkaların hangi özelliklerinin merkezi simetrik halka durumunda korunduğuna değinildi. Üçüncü ana başlıkta; terslenebilir ve simetrik halkaların bir endomorfizmaya göre katı versiyonu verildi. Ayrıca $\alpha-$ terslenebilir ve $\alpha-$ simetrik halkaların bir genelleştirmesi olan sırasıyla merkezi $\alpha-$ terslenebilir ve merkezi $\alpha-$ simetrik halkalar olarak adlandırılan yeni bir sınıf tanıtıldı. Bu genel durumda bazı sonuçlar verildi.

TEMMUZ 2022, 67 Sayfa.

**Anahtar Kelimeler:** Terslenebilir halka, Simetrik halka, $\alpha-$ Terslenebilir halka, $\alpha-$ Simetrik halka, Merkezi terslenebilir halka, Merkezi simetrik halka.

# ABSTRACT

**MSc THESIS**

## GENERALIZATIONS OF REVERSIBLE AND SYMMETRIC RINGS

**Ruhi YALÇIN**

**Kırşehir Ahi Evran University**
**Science and Engineering Institute**
**Mathematics Department**

**Supervisor: ASSOC. HANDAN KÖSE**

This thesis consists of abstract, basic concepts, introduction and three main chapters. The first main section is central reversible rings as a generalization of reversible and central reversible rings are weakly reversible. In the second main chapter, we study central symmetric rings as a generalization of symmetric rings. We investigate which properties of symmetric rings hold for the central case. In the third main chapter, we consider a skew version of reversible and symmetric rings with respect to a ring endomorphism $\alpha$, in particular we study $\alpha -$ reversible and $\alpha -$ symmetric rings. Also, it is introduced new classes of rings, called central $\alpha -$ reversible and central $\alpha -$ symmetric rings as a generalization of $\alpha -$ reversible and $\alpha -$ symmetric rings. It is proved some results in this general setting.

July 2022, 67 Pages.

**Keywords:** Reversible ring, Symmetric ring, $\alpha$-Reversible ring, $\alpha$-Symmetric ring, Central reversible ring, Central symmetric ring.

# 1. GİRİŞ

Tez boyunca bütün halkalar birimli alınacaktır. Cohn [5] te terslenebilir halka kavramını tanımladı. $R$ bir halka olmak üzere $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $ba = 0$ oluyorsa $R$ ye *terslenebilir halka* denir. Köse ve arkadaşları tarafından merkezi terslenebilir halka kavramı tanıtıldı [14]. Eğer $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $ba$ halkanın merkezinde ise $R$ ye *merkezi terslenebilir halka* denir. Liang ve Gang [20] de zayıf terslenebilir halka kavramını tanıttılar. Eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b, r \in R$ için $Rbra$; $R$ nin sol nil ideali ise $R$ ye *zayıf terslenebilir halka* denir.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel kavramlara yer verildi.

Üçüncü bölümde, [14] temel alınarak merkezi terslenebilir halkaların bazı genişlemeleri incelenildi. Terslenebilir halkaların bir genelleştirmesi olarak merkezi terslenebilir halkalar çalışıldı. Açık olarak, terslenebilir halkalar merkezi terslenebilir ve merkezi terslenebilir halkalar zayıf terslenebilirdir. Buna rağmen terslenebilir olmayan ancak merkezi terslenebilir olan ve merkezi terslenebilir olmayan ancak zayıf terslenebilir olan halka örnekleri verildi. Bu sebeple merkezi terslenebilir halkaların sınıfı terslenebilir halkalar ve zayıf terslenebilir halkaların arasında kalır. Bunların dışında merkezi terslenebilir halkaların Abelyan olduğu ispatlandı ve Abelyan olan ancak merkezi terslenebilir olmayan halka örneği verildi. Ayrıca her merkezi terslenebilir halkanın zayıf terslenebilir, 2-asallı, Abelyan ve dik sonlu olduğu gösterildi.

Bir $R$ Armendariz halkası için, "$R$ merkezi terslenebilirdir ancak ve ancak $R[x]$ polinom halkası merkezi terslenebilirdir ancak ve ancak $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinom halkası merkezi terslenebilirdir " ifadeleri ispatlandı. Üstelik " Eğer $R$ merkezi terslenebilir ise bu durumda $R$ nin Dorroh genişlemesi merkezi terslenebilirdir " ifadesi ispatlandı [14] .

Kafkas ve arkadaşları tarafından simetrik halka ve merkezi simetrik halka kavramları tanımlandı [11]. $R$ halkası için eğer $abc = 0$ olacak şekilde her $a, b, c \in R$ için $acb = 0$ oluyorsa $R$ ye *simetrik halka* denir [16]. Eğer $abc = 0$ olacak şekildeki her $a, b, c \in R$ için $bac$ halkanın merkezinde oluyorsa $R$ ye *merkezi simetrik halka* denir [11].

Dördüncü bölümde, [11] numaralı kaynak referans alındı. Bu bölümde simetrik halkaların bir genelleştirmesi olarak merkezi simetrik halkalar çalışıldı. Simetrik halkaların hangi özelliklerinin hangi durumda; merkezi simetrik halkalar için sağlandığı araştırıldı. Açık olarak simetrik halkalar merkezi simetrik ve merkezi simetrik halkalar merkezi terslenebilirdir. Ayrıca merkezi simetrik olan ancak simetrik olmayan ve merkezi terslenebilir olan ancak merkezi simetrik olmayan örnekler verildi. Bu sebeple merkezi simetrik halkaların sınıfı; simetrik halkalar ve merkezi terslenebilir halka sınıflarının arasında kalır. Üstelik merkezi simetrik halkaların simetrik olması için gerekli koşullar araştırıldı. Merkezi simetrik halkaların sonlu dik toplam altında kapalı olduğu gösterildi. Ayrıca merkezi simetrik bir halkanın homomorfik görüntüsünün merkezi simetrik olmadığına yönelik örnek verildi. Bu durumda hangi koşullar altında bir halkanın homomorfik görüntüsünün merkezi simetrik olduğu gösterildi.

Son olarak beşinci bölümde Pourtaherian ve Rakhimov [24] te terslenebilir ve simetrik halkaların bir $\alpha$ endomorfizmasına göre katı versiyonu, özellikle $\alpha-$ terslenebilir ve $\alpha-$ simetrik halka kavramlarını çalıştılar.

$R$ halkası için $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $b\alpha(a) = 0$ (sağ $\alpha-$ terslenebilir) ve $\alpha(b)a = 0$ (sol $\alpha-$ terslenebilir) oluyorsa $R$ ye $\alpha-$ *terslenebilir halka* denir. Eğer $abc = 0$ olacak şekildeki $a, b, c \in R$ için $ac\alpha(b) = 0$ (sağ $\alpha-$ simetrik) ve $\alpha(b)ac = 0$ (sol $\alpha-$ simetrik) oluyorsa $R$ ye $\alpha-$ *simetrik halka* denir. Ayrıca [24] te $\alpha-$ terslenebilir ve $\alpha-$ simetrik halkaların genelleştirmeleri olarak yeni bir sınıf olan merkezi $\alpha-$ terslenebilir ve merkezi $\alpha-$ simetrik halkalar tanıtıldı. Genel durumda bazı sonuçlar ispatlandı.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezde kullanılan bütün temel kavramlar bu bölümde verilmektedir.

**Tanım 2.1.** $R$ bir halka olsun. Eğer $e \in R$ için $e^2 = e$ ise $e$ ye *eşkare eleman (idempotent)* denir. Eğer $e$ eşkare eleman ise $1 - e$ de bir eşkare elemandır.

**Örnek 2.2.** [14] $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a \equiv d(mod2), b \equiv c \equiv 0(mod2), a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$

halkası matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte göz önüne alınsın. $R$ halkasının yegane eşkare elemanları $0$ (sıfır) ve birim matristir.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun.

Buradan aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$a^2 + bc = a \tag{2.1}$$

$$ab + bd = b \tag{2.2}$$

$$ca + dc = c \tag{2.3}$$

$$cb + d^2 = d \tag{2.4}$$

(2.1) denklemden (2.4) denklem çıkartıldığında $a^2 - d^2 = a - d$ bulunur. Buradan $a = d$ veya $a + d = 1$ elde edilir.

**I. Durum** : Kabul edelim ki; $a = d$ olsun. Bu durumda (2.2). denklemden $=0$ veya $d = \frac{1}{2}$ bulunur. $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan $b = 0$ elde edilir. Benzer şekilde (2.3). denklemden $c = 0$ bulunur. Böylece $a = 0$ veya $a = 1$ olur.

**II. Durum** : Kabul edelim ki; $a + d = 1$ olsun. $a \equiv d(mod2)$ olduğundan $a = d + 2k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Diğer taraftan $a + d = 1$ iken $d + k = \frac{1}{2} \in Z$ olur ki; bu ise çelişkidir.

O halde eşkare eleman $0$ (sıfır) ve birim matristir.

**Önerme 2.3.** $R$ bir halka olsun. $e^2 = e$ eşkare elemanı eğer merkezde ise $1 - e$ eşkare elemanı da merkezdedir.

**İspat**. $e^2 = e \in R$ eşkare elemanı merkezde olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $er = re$. Buradan $(1 - e)r = r - er = r - re = r(1 - e)$ olduğundan $1 - e$ eşkare elemanı da merkezdedir. ■

**Tanım 2.4.** $R$ bir halka olmak üzere $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n$ pozitif tamsayısı varsa $a$ ya *üstel sıfırlı (nilpotent) eleman* denir ve bu şartı sağlayan en küçük $n$ pozitif tamsayısına $a$ nın *nilpotent indeksi* denir.

**Örnek 2.5.** [17] $\mathbb{Z}_8$ halkasını göz önüne alınsın. Bu halkada üstel sıfırlı elemanların kümesi $\mathrm{nil}(\mathbb{Z}_8) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$.

**Tanım 2.6.** [4] $R$ bir halka olsun. $a \in R$ için eğer $aRa = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa $R$ ye *yarı asal (semiprime) halka* denir.

**Tanım 2.7.** [16] $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ nin sıfırdan başka üstel sıfırlı elemanı yoksa $R$ ye *indirgenmiş (reduced) halka* denir.

**Örnek 2.8.** [18] $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası indirgenmiş halkadır.

**Tanım 2.9.** [5] $R$ bir halka olsun. Eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $ba = 0$ oluyorsa $R$ ye *terslenebilir (reversible) halka* denir.

**Örnek 2.10.** [29] İndirgenmiş halkalar terslenebilirdir. Gerçekten; $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = b(ab)a = 0$ olup $R$ indirgenmiş olduğundan $ba = 0$ elde edilir. Yani; $R$ terslenebilir halkadır.

**Teorem 2.11.** [15] $R$ bir halka olsun. Bu durumda $R$ indirgenmiştir ancak ve ancak $a^2 = 0$ olacak şekildeki her $a \in R$ için $a = 0$ şeklindedir.

Tez boyunca tamlık bölgesi ile; sıfır bölensiz halka anlaşılacaktır.

**Tanım 2.12.** $R$ bir halka olsun. $a \in R$ için

$$r_R(a) = \{x \in R \mid ax = 0\}$$

$$l_R(a) = \{x \in R \mid xa = 0\}$$

kümelerine sırasıyla $a$ nın $R$ deki *sağ (right)* ve *sol (left) sıfırlayanı (annihilator)* denir.

**Tanım 2.13.** $R$ bir halka olsun. $R$ halkasının merkezi;

$$C(R) = \{r \in R \mid \text{ her } a \in R \text{ için } ar = ra\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.14.** [4] $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ nin bir elemanının sağ (sol) sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretiliyorsa $R$ ye *sağ (sol) devirli üzerine (principally projective) halka* denir. Kısaca *p.p.* ile gösterilir.

**Tanım 2.15.** [4] $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ nin devirli sağ ideallerinin sağ (sol) sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretiliyorsa $R$ ye *sağ (sol) devirli yarı-Baer halka* denir.

**Tanım 2.16.** [2] $R$ bir halka olsun. $I$; $R$ nin bir ideali olmak üzere eğer $I$ nın her elemanı üstel sıfırlı ise $I$ ya *nil ideal* denir.

**Tanım 2.17.** [14] $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ nin her eşkare elemanı merkezde ise $R$ ye *Abelyan* denir.

**Tanım 2.18.** [14] $R$ bir halka olsun. $a, b \in R$ için $ab = 1$ olması $ba = 1$ olmasını gerektiriyorsa $R$ ye *dik sonlu (directly finite)* denir.

**Tanım 2.19.** [19] $R$ bir halka olsun. Eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $aRb = 0$ oluyorsa $R$ ye *yarı-değişmeli (semicommutative) halka* denir.

**Örnek 2.20.** [13] Terslenebilir halkalar yarı değişmelidir. Gerçekten; $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. $R$ terslenebilir olduğundan $ba = 0$ elde edilir. Her $r \in R$ için $b(ar) = 0$ olur. $R$ terslenebilir olduğundan $arb = 0$ bulunur. Yani; $aRb = 0$ olup $R$ yarı değişmelidir.

**Tanım 2.21.** $R \neq 0$ bir halka olsun. Eğer $aRb = 0$ olacak şekildeki $a, b \in R$ için $a = 0$ ya da $b = 0$ oluyorsa $R$ ye *asal (prime) halka* denir.

**Tanım 2.22.** $R$ bir halka ve $a, b \in R$ için eğer $ab = 0$ olması $a = 0$ ya da $b = 0$ olmasını gerektiriyorsa $R$ ye *tamlık bölgesi (domain)* denir.

**Örnek 2.23.** [17] $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte bir tamlık bölgesidir.

**Tanım 2.24.** $R$ bir halka olsun.

(1) $R$ nin *asal radikali*; $P(R) = \cap\{P : P, R$ nin asal idealidir$\}$ ile tanımlanır.

(2) Eğer $P(R) = N(R)$ oluyorsa $R$ ye *2-asallı* denir.

**Tanım 2.25.** $R$ bir halka olsun. $R_1$ ve $R_2$ ; $R$ nin iki alt halkası olmak üzere eğer

(1) Her $r \in R$ için $r = r_1 + r_2$ olacak şekilde $r_1 \in R_1$ , $r_2 \in R_2$ vardır.

ve

(2) $R_1 \cap R_2 = \{0\}$.

şartları sağlanıyorsa $R$ ye $R_1$ ve $R_2$ alt halkalarının *dik (direct) toplamı* denir ve $R = R_1 \oplus R_2$ ile gösterilir.

**Tanım 2.26.** [16] $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ nin her üstel sıfırlı elemanı merkezde ise $R$ ye *merkezi indirgenmiş (central reduced) halka* denir.

**Tanım 2.27.** [17] $R$ bir halka olsun. $S \subseteq R$ olmak üzere eğer her $x, y \in S$ için $xy \in S$ oluyorsa $S$ ye *çarpımsal kapalı alt küme (multiplicatively closed set)* denir.

**Tanım 2.28.** [1] $R$ bir halka ve $x$ bir bilinmeyen olmak üzere;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

şeklinde ifadeye $R$ *katsayılı polinom* denir. $R$ katsayılı bütün polinomların kümesi

$$R[x]=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \mid n\in\mathbb{N}, a_i\in R\right\}$$

ile gösterilir.

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j\in R[x]$$

olmak üzere, bu iki polinomun toplamı ve çarpımı

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{k}(a_i+b_i)x^i$$

ve

$$f(x)g(x)=\sum_{i=0}^{m+n}c_ix^i$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $k=\text{maks}\{m,n\}$ ve

$$c_t=\sum_{j=0}^{t}a_jb_{t-j}=a_0b_t+a_1b_{t-1}+\ldots+a_{t-2}b_2+a_{t-1}b_1+a_tb_0$$

şeklindedir. Bu işlemlerle $R[x]$ kümesi bir halkadır. Bu halkaya $R$ üzerindeki *polinom halkası* denir.

**Tanım 2.29.** [28] $R$ bir halka olsun.

$$R[x;x^{-1}]=\left\{\sum_{i=k}^{n}a_ix^i \mid a_i\in R\right\}$$

(k ve n negatif tamsayı olabilir) kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya *Laurent polinom halkası* denir.

**Tanım 2.30.** [25] $R$ bir halka olsun. $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ ve $g(x)=b_0+b_1x...+b_mx^m\in R[x]$ için eğer $f(x)g(x)=0$ iken her $i,j$ için $a_ib_j=0$ oluyorsa $R$ ye *Armendariz halka* denir.

İndirgenmiş halkaların Armendariz olduğu iyi bilinen bir sonuçtur [3].

**Tanım 2.31.** [7] $R$ bir halka olsun. $D(R,\mathbb{Z}) = \big\{(r,n) \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\big\}$ kümesi $(r_1,n_1),(r_2,n_2) \in D(R,\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$(r_1,n_1) + (r_2,n_2) = (r_1 + r_2, n_1 + n_2)$$

$$(r_1,n_1)(r_2,n_2) = (r_1r_2 + n_1r_2 + n_2r_1, n_1n_2)$$

işlemleri ile bir halkadır. Bu halkaya $R$ *nin* $\mathbb{Z}$ *boyunca Dorroh genişlemesi denir.*

**Önerme 2.32.** $R$ bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $R = eR \oplus (1-e)R$.

**İspat**. Her $r \in R$ için $r = er + (1-e)r$ şeklinde yazılabilir olduğundan $R = eR + (1-e)R$ elde edilir. Diğer yandan $r \in eR \cap (1-e)R$ olsun. Bu durumda $r = es = (1-e)t$ olacak şekilde $s,t \in R$ vardır. $er = r = 0$ olup $eR \cap (1-e)R = \big\{0\big\}$ bulunur. O halde $R = eR \oplus (1-e)R$. ■

**Tanım 2.33.** $G$ bir grup ve $R$ bir halka olsun. $R[G]$ grup halkası:

$$R[G] = \Big\{\alpha \mid \alpha = \sum_{g\in G} a(g)g \ \text{ burada } \ a(g) \in R \text{ ve sonlu bileşen dışında } a(g) = 0\Big\}$$

aşağıdaki toplama ve çarpma işlemleri ile tanımlanır.

$$\sum_{g\in G} a(g)g + \sum_{g\in G} b(g)g = \sum_{g\in G} \ [a(g) + b(g)]g$$

$$\Big(\sum_{g\in G} a(g)g\Big) + \Big(\sum_{h\in G} b(h)h\Big) = \sum_{g,h\in G} [a(g)b(h)]gh.$$

**Örnek 2.34.** $G =< a : a^3 = 1_G >$ bir devirli grubu göz önüne alınsın. Bir $r \in \mathbb{C}[G]$ için $r = z_0 1_G + z_1 a + z_2 a^2$ olacak şekilde $z_0, z_1, z_2$ karmaşık sayıları vardır. $s = w_0 1_G + w_1 a + w_2 a^2 \in C[G]$ için $r + s = (z_0 + w_0)1_G + (z_1 + w_1)a + (z_2 + w_2)a^2$ ve $rs = (z_0w_0 + z_1w_2 + z_2w_1)1_G + (z_0w_1 + z_1w_0 + z_2w_2)a + (z_0w_2 + z_2w_0 + z_1w_1)a^2$ şeklindedir.

**Tanım 2.35.** [12] $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ deki bütün tersinir elemanlar merkezde ise, $R$ ye *tersinir-merkezi (unit-central) halka* denir.

## 3. TERSLENEBİLİR HALKALARIN GENELLEŞTİRMELERİ

Bu bölümde terslenebilir halkaların bir genelleştirmesi olan ve merkezi terslenebilir olarak adlandırılan halka sınıfı çalışıldı. Üstelik terslenebilir halkaların bazı sonuçlarının; merkezi terslenebilir halkalara nasıl genişletildiği ispatlandı.

### 3.1. Merkezi Terslenebilir Halkalar

**Tanım 3.1.** [14] $R$ bir halka olsun. Eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $ba$ halkanın merkezinde ise $R$ ye *merkezi terslenebilir (central reversible) halka* denir.

**Lemma 3.2.** Eğer $R$ bir terslenebilir halka ise bu durumda $R$ merkezi terslenebilirdir.

**İspat**. $R$ terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $R$ terslenebilir olduğundan $ba = 0$ olup $0$ (sıfır) halkanın merkezinde olduğundan $ba \in C(R)$. O halde $R$ merkezi terslenebilirdir. ■ Aşağıdaki örnek merkezi terslenebilir olan ancak terslenebilir olmayan halka örneğidir.

**Örnek 3.3.** [14] $R$ değişmeli ve indirgenmiş bir halka olsun.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

$3\times 3$ tipinde üst üçgensel matrislerin (matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemleri altında) halkası olsun. Öncelikle $S$ nin terslenebilir olmayan bir halka olduğu gösterilecektir.

$$x = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \text{ ve } y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S$$

olmak üzere $xy = 0$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$a_1a_2 = 0. \tag{3.1}$$

$$a_1b_2 + b_1a_2 = 0. \tag{3.2}$$

$$a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2 = 0. \tag{3.3}$$

$$a_1d_2 + d_1a_2 = 0. \tag{3.4}$$

$R$ değişmeli olduğundan $a_2a_1 = 0$ bulunur. (3.2). denklemi soldan $b_1a_2$ ile çarpıldığında $b_1a_2a_1b_2 + (b_1a_2)^2 = 0$. Böylece $(b_1a_2)^2 = 0$ ve $R$ indirgenmiş olduğundan $b_1a_2 = 0$ elde edilir. (3.3). denklemi $a_2$ ile çarpıldığında $a_2a_1c_2 + a_2b_1d_2 + a_2c_1a_2 = 0$, $a_2c_1a_2 = 0$ elde edilir. $a_2c_1a_2 = 0$ ifadesi sağdan $c_1$ ile çarpıldığında $(a_2c_1)^2 = 0$. Böylece $a_2c_1 = 0$ ve $c_1a_2 = 0$ elde edilir.
(3.4). denklemi sağdan $a_1$ ile çarpıldığında $a_1d_2a_1 + d_1a_2a_1 = 0$ ve $a_1d_2a_1 = 0$ bulunur. $a_1d_2a_1 = 0$ ifadesi $d_2$ ile çarpıldığında $(a_1d_2)^2 = 0$. Böylece $a_1d_2 = 0, d_2a_1 = 0$ elde edilir. (3.4). denklemden $d_1a_2 = 0$ ve $a_2d_1 = 0$ bulunur. (3.3). denklemden $a_1c_2 + b_1d_2 = 0$ elde edilir. Bu ifade $a_1$ ile çarpıldığında $a_1c_2a_1 + b_1d_2a_1 = 0$ ve buradan $a_1c_2a_1 = 0$. Böylece $(a_1c_2)^2 = 0$ ve $a_1c_2 = c_2a_1 = 0$ olup $b_1d_2 + c_1a_2 = 0$ elde edilir. Bu ifade $b_1d_2$ ile çarpıldığında $b_1d_2 = 0 = d_2b_1$ bulunur. Sonuç olarak

$$yx = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Böylece $S$ terslenebilir değildir. Şimdi $S$ nin merkezi terslenebilir olduğunu verelim. Bunun için $yx$ in merkezde olduğu gösterilecektir.

$$c = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & a_3 & d_3 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \in S$$

için

$$(yx)c=\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & a_3 & d_3 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2d_1a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$c(yx)=\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & a_3 & d_3 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3b_2d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Böylece her $c \in S$ için $c(yx) = (yx)c$ elde edilir. O halde $S$ merkezi terslenebilir halkadır. Diğer taraftan $S$ nin terslenebilir olmadığı;

$$x=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } y=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$$

için $xy = 0$ olmasına rağmen

$$yx=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

ile de görülür.

Şimdi merkezi terslenebilir halkaların hangi koşullar altında terslenebilir olduğu verilecektir.

**Önerme 3.4.** [14] $R$ merkezi terslenebilir bir halka olsun. Eğer $R$ aşağıdaki koşullardan birini sağlıyorsa bu durumda $R$ terslenebilirdir.

(1) $R$ yarı asaldır.

(2) $R$ sağ (sol) p.p. halkadır.

(3) $R$ sağ (sol) devirli yarı-Baer halkadır.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ merkezi terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $ba$ merkezdedir. Şimdi aşağıdaki durumlar göz önüne alınsın.

(1) $R$ yarı asal bir halka olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $ba \in C(R)$ olduğundan $baRba = Rbaba = 0$ ve buradan $ba = 0$ bulunur. Böylece $R$ terslenebilirdir.

(2) $R$ bir sağ p.p. halka olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $ab = 0$ ise $b \in r_R(a) = eR$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ eşkare elemanı vardır. Buradan $b \in eR$ olup $b = er$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Bu eşitlik soldan $e$ ile çarpıldığında $eb = eer = e^2r = er = b$ elde edilir.
Bu durumda $eb = b$ ve $R$ birimli olduğundan $e = e1 \in eR = r_R(a)$, $ae = 0$ bulunur. $ba$ merkezde olduğundan $ba = (eb)a = e(ba) = b(ae) = b0 = 0$ bulunur. Böylece $R$ terslenebilirdir. Benzer bir ispat halkanın sol p.p. olması durumunda verilir.

(3) $R$ bir sağ devirli yarı-Baer halka olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $aR \leq R$ sağ ideali, bu durumda $r_R(aR) = eR$ olacak şekilde bir $e$ eşkare elemanı vardır. Buradan $b = eb$ ve $ae = 0$ elde edilir. $ba$ merkezde olduğundan $ba = (eb)a = e(ba) = b(ae) = b0 = 0$ bulunur. Böylece $R$ terslenebilirdir. Benzer bir ispat halkanın sol devirli yarı-Baer olması durumunda da verilir.

■

Asağıdaki sonuç Önerme 3.4. den elde edilir.

**Sonuç 3.5.** Eğer $R$ merkezi terslenebilir bir halka ise bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.

(1) $R$ sağ p.p. halkadır.

(2) $R$ sol p.p. halkadır.

(3) $R$ sağ devirli yarı-Baer halkadır.

(4) $R$ sol devirli yarı-Baer halkadır.

**Tanım 3.6.** $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ nin sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise $R$ ye *bölmeli (division) halka* denir.

**Uyarı 3.7.** Merkezi terslenebilir bir halkanın homomorfik görüntüsü merkezi terslenebilir olmak zorunda değildir.

**Örnek 3.8.** [14] $D$ bir bölmeli halka, $R = D[x, y]$ ve $xy \neq yx$ olmak üzere $R$ nin $I =< xy >$ ideali göz önüne alınsın. $R$ bir tamlık bölgesi olduğundan merkezi terslenebilirdir. Diğer taraftan $(x+I)(y+I) = 0$ olmasına rağmen $(y+I)(x+I)$; $R/I$ bölüm halkasında merkezde değildir. Yani $R/I$ merkezi terslenebilir değildir.

Aşağıda bir halkanın homomorfik görüntüsünün ne zaman merkezi terslenebilir olduğu verilmek tedir.

**Lemma 3.9.** [14] $R$ bir tersinir-merkezi halka olsun. Eğer $I$; $R$ nin nil ideali ise bu durumda $R/I$ merkezi terslenebilirdir.

**İspat**. $a, b \in R$ için $(a + I)(b + I) = 0 + I$ olsun. İddia; $(b + I)(a + I) \in C(R/I)$.
Bu durumda $(a + I)(b + I) = 0 + I$ ise $a, b \in I$ . Buradan $I$ nil ideal olduğundan $(ab)^n = 0$ olacak şekilde $n > 0$ vardır.

Buradan $(ba)^{n+1} = b(ababa...)a = b(ab)^n a = 0$ elde edilir. Yani $ba \in N(R)$.
$R$ tersinir-merkezi olduğundan $1-ba$ tersinir olup merkezdedir. Kabulden $1-ba$ merkezdedir. Buradan $ba$ merkezdedir. Böylece $(b + I)(a + I) \in C(R/I)$. O halde $R/I$ merkezi terslenebilirdir. ■

Aşağıdaki örnek bir $R$ halkası ve $R$ nin bir $I$ ideali için $R/I$ bölüm halkasının merkezi terslenebilir olmasına rağmen $R$ nin merkezi terslenebilir olmasının gerekmediğine yöneliktir.

**Örnek 3.10.** [14] $F$ herhangi bir cisim olmak üzere;

$$R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

olsun. $R$ nin

$$I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ideali göz önüne alınsın.

$$R/I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + I \mid c \in F \right\}$$

olup $R/I$ nın değişmeli olmasından $R/I$ merkezi terslenebilirdir.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

için $AB = 0$ ve

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ şeklindedir. } C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \in R$$

için $c_1 \neq c_3$ olmak üzere

$$(BA)C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2c_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(BA) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve buradan $(BA)C \neq C(BA)$ olup $R$ merkezi terslenebilir değildir.

**Lemma 3.11.** [14] $R$ bir halka olsun. Eğer $R/I$ bölüm halkası, $I$ indirgenmiş ideali ile, merkezi terslenebilir halka ise bu durumda $R$ merkezi terslenebilirdir.

**İspat**. $R/I$ merkezi terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $(a+I)(b+I) = ab+I = 0+I$ olup $R/I$ merkezi terslenebilir halka olduğundan $(b+I)(a+I)$ merkezdedir. Buradan her $r \in R$ için $bar - rba \in I$ elde edilir. Ayrıca $(bar - rba)^2 = 0$ ve $I$ indirgenmiş olduğundan $bar - rba = 0$ şeklindedir. Böylece her $r \in R$ için $bar = rba$ bulunur. O halde $R$ merkezi terslenebilirdir. ■

**Tanım 3.12.** [20] $R$ bir halka olsun. Her $a, b, r \in R$ için eğer $ab = 0$ olması $Rbra$ nın $R$ nin bir sol nil ideali olmasını gerektiriyorsa $R$ ye *zayıf terslenebilir (weakly reversible) halka* denir.

Şimdi merkezi terslenebilir halka sınıfının; terslenebilir ve zayıf terslenebilir halka sınıflarının arasında kaldığı gösterilecektir.

**Teorem 3.13.** [14] $R$ bir halka olsun. Aşağıdaki koşullar göz önüne alınsın.

(1) $R$ terslenebilirdir.

(2) $R$ merkezi terslenebilirdir.

(3) $R$ zayıf terslenebilirdir.

Bu durumda (1) ⇒ (2) ⇒ (3) dir.

**İspat**.
(1) ⇒ (2) Lemma 3.2. den elde edilir.
(2) ⇒ (3) Kabul edelim ki; $R$ merkezi terslenebilir bir halka olsun. $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $abx = 0$ dır. $R$ merkezi terslenebilir olduğundan, $bxa$ merkezdedir. Bu durumda her $r, x \in R$ için
$(rbxa)^2 = (rbxa)(rbxa) = r(bxa)rbxa = rrbx(ab)(xa) = 0$ elde edilir. Böylece $R$ zayıf terslenebilirdir. ■

**Lemma 3.14.** [20] $R$ bir halka olsun. Bu durumda $R$ zayıf terslenebilir bir halkadır ancak ve ancak $T_n(R)$ zayıf terslenebilir bir halkadır.

Aşağıdaki örnek zayıf terslenebilir olan ancak merkezi terslenebilir olmayan bir halka örneğidir.

**Örnek 3.15.** [14] $R$ zayıf terslenebilir bir halka olsun ve aşağıdaki halka göz önüne alınsın:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in R \right\}.$$ [8, Örnek 2.9] dan $S$ zayıf terslenebilirdir.

Şimdi $S$ nin merkezi terslenebilir olmadığını ispatlayalım.

$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in S$ için

$$xy = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ olmasına rağmen

$$yx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = x$$

olup $x$ merkezde değildir. Gerçekten

$z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$ için $xz = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve

$zx = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olup $zx \neq xz$ dir. Böylece $S$ merkezi terslenebilir değildir.

**Lemma 3.16.** [14] Her terslenebilir halka Abelyandır.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ terslenebilir bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun.
Bu durumda $r \in R$ için $(1-e)(er-ere) = er-ere-eer+eere = 0$ elde edilir. Kabulden $(er-ere)(1-e) = er-ere-ere+eree = 0$ olup $er = ere$. Benzer şekilde her $r \in R$ için $(re-ere)(1-e) = re-ree-ere+eree = 0$ olup kabulden $(1-e)(re-ere) = re-ere-ere+eere = re-ere = 0$ bulunur. Buradan her $r \in R$ için $re = ere$ elde edilir. Böylece $R$ Abelyandır. ■

Lemma 3.16. ya ek olarak merkezi durum için aşağıdaki önerme verilmektedir.

**Önerme 3.17.** [14] Eğer $R$ merkezi terslenebilir bir halka ise bu durumda $R$ Abelyandır.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ merkezi terslenebilir bir halka olsun. Her $e^2 = e \in R$ ve her $r \in R$ için $(1-e)(er-ere) = 0$ olup $(er-ere)(1-e) = er-ere$ halkanın merkezindedir. $er-ere$ elemanı $e$ ile yer değiştirildiğinde $e(er-ere) = (er-ere)e = 0$ ve $er-ere = 0$ elde edilir. Buradan

$$er = ere \tag{3.5}$$

bulunur.
Benzer şekilde her $r \in R$ için $(re-ere)(1-e) = 0$ olup $(1-e)(re-ere) = re-ere$ halkanın merkezindedir. $re-ere$ elemanı $e$ ile yer değiştirildiğinde $0 = e(re-ere) = (re-ere)e$ ve $re-ere = 0$ elde edilir. Buradan

$$re = ere \tag{3.6}$$

bulunur. (3.5) ve (3.6) dan her $r \in R$ için $er = re$ olup $R$ Abelyandır. ■
Aşağıdaki örnekte Lemma 3.17. tersinin doğru olmadığına yönelik örnek verilmektedir.

**Örnek 3.18.** [14] $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a \equiv d(mod2), b \equiv c \equiv 0(mod2), a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$

halkası göz önüne alınsın.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $R$ nin tek eşkare elemanları olduğundan $R$ Abelyandır.

Diğer taraftan;

$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $xy = 0$ olmasına rağmen

$(yx) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olup $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in R$ için $yx$ merkezde değildir.

Gerçekten, $(yx)z = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$zyx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde olup $(yx)z \neq z(yx)$ dir.

Böylece $R$ merkezi terslenebilir değildir.

**Lemma 3.19.** Her Abelyan halka dik sonludur.

**İspat**. $R$ bir Abelyan halka ve $a, b \in R$ için $ab = 1$ olsun. $(ba)^2 = baba = b1a = ba$ olduğundan $ba$ bir eşkare elemandır. Kabulden $ba$ merkezdedir. $ba$ merkezde olduğundan her $c \in R$ için $bac = cba = (cba)1 = cba(ab) = ca(ba)b = cabab = c$ elde edilir. Bu ise birimin tekliğinden $ba = 1$ olmasını gerektirir. Böylece $R$ dik sonludur. ■

**Sonuç 3.20.** [14] Her merkezi terslenebilir halka dik sonludur.

**İspat**. Her merkezi terslenebilir halka Abelyan ve her Abelyan halka dik sonlu olduğundan sonuç açıktır. ■

**Lemma 3.21.** Her terslenebilir halka yarı-değişmelidir.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Kabulden $ba = 0$ bulunur. Eşitliğin her iki tarafı sağdan $r \in R$ ile çarpıldığında $bar = 0$ ve $R$ terslenebilir halka olduğundan $arb = 0$ elde edilir. Böylece $R$ yarı-değişmelidir. ■

**Tanım 3.22.** [19] $R$ bir halka olsun. Eğer $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ ve her $r \in R$ için $arb$ bir üstel sıfırlı eleman ise $R$ ye *zayıf yarı-değişmeli (weakly semicommutative) halka* denir.

**Tanım 3.23.** [23] $R$ bir halka olsun. Eğer ab=0 olacak şekilde her $a, b \in R$ için $aRb \subseteq C(R)$ oluyorsa $R$ ye *merkezi yarı-değişmeli halka (central semicommutative)* denir.

**Lemma 3.24.** Her merkezi terslenebilir halka zayıf yarı-değişmelidir.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ merkezi terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $ba$ merkezdedir. Buradan $(arb)^2 = (arb)(arb) = ar(ba)rb = a(ba)rrb = 0$ olup her $r \in R$ için $arb$ üstel sıfırlı bir elemandır. Bu ise $R$ nin zayıf yarı-değişmeli olduğunu gösterir. ■

**Lemma 3.25.** [14] $R$ bir halka olsun. Bu durumda $R$ nin asal ve terslenebilir halka olması için gerek ve yeter şart $R$ nin tamlık bölgesi olmasıdır.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ asal ve terslenebilir bir halka olsun. $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Buradan $r \in R$ için $abr = 0$ ve kabulden $bra = 0$ elde edilir. $R$ asal olduğundan $a = 0$ ya da $b = 0$ şeklindedir.
Tersine $R$ tamlık bölgesi olsun. İlk olarak $R$ nin asal olduğu gösterilecektir. Her $r \in R$ için $arb = 0$ olsun. Bu durumda kabulden $a = 0$ ya da $rb = 0$ elde edilir. Yine kabulden $r = 0$ ya da $b = 0$ ancak $r$ keyfi olduğundan $b = 0$ bulunur. Böylece $a = 0$ ya da $b = 0$ olup $R$ asaldır. Şimdi $R$ nin terslenebilir olduğu gösterilecektir. $ab = 0$ olsun ve kabulden $a$ ya da $b$ den en az biri sıfırdır. Buradan $ba = 0$ bulunur. O halde $R$ terslenebilirdir. ■

**Lemma 3.26.** $R$ bir halka olsun. Bu durumda $R$ asal ve merkezi terslenebilir bir halka olması için gerek ve yeter şart $R$ nin tamlık bölgesi olmasıdır.

**İspat**. Kabul edelim ki $R$ asal ve merkezi terslenebilir bir halka olsun. $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $abr = 0$ ve $R$ merkezi terslenebilir olduğundan $bra$ merkezdedir. $bra$ elemanını $b$ ile yer değiştirildiğinde $bbra = brabra = 0$ elde edilir. Kabulden her $t \in R$ için $b(bra) = 0$ sağdan $t \in R$ ile çarpıldığında $b(bra)t = 0$ ve $R$ merkezi terslenebilir olduğundan $bratb$ merkezdedir. $bratb$ elemanını özel olarak $ra$ ile yer değiştirildiğinde $ra(bratb) = brat(bra) = br(ab)rat = 0$ olup $(bra)t(bra) = 0$ ve buradan $(bra)R(bra) = 0$ elde edilir. $R$ asal olduğundan $bra = 0$ ve böylece $bRa = 0$ olup $a = 0$ ya da $b = 0$ bulunur. O halde $R$ tamlık bölgesidir. Tersine kabul edelim ki $R$ tamlık bölgesi olsun. Lemma 3.25. ten $R$ asal ve terslenebilir bir halkadır. Her terslenebilir halka merkezi terslenebilir olduğundan sonuç açıktır. ■

**Teorem 3.27.** [14] Eğer $R$ merkezi terslenebilir bir halka ise bu durumda 2-asallıdır. Tersi ise halkanın yarı asal olması durumunda doğrudur.

**İspat**. $R$ merkezi terslenebilir bir halka olsun. $P(R)$, $R$ nin bir nil ideali olduğundan $P(R) \subseteq N(R)$ şeklindedir. $a \in N(R)$ olsun. Bu durumda pozitif bir $n$ tamsayısı için $a^n = 0$ şeklindedir. Kabul edelim ki; bir $Q$ asal ideali için $a \notin Q$ olsun. $R$ merkezi terslenebilir olduğundan $a$ merkezdedir. $r_{n-1}, r_{n-2}, ..., r_2, r_1 \in R$ olmak üzere $ar_{n-1}ar_{n-2}....ar_2ar_1a$ = $r_{n-1}r_{n-2}...r_2r_1a^n = 0$ elde edilir. Bütün asal $P$ idealleri için $aR(ar_{n-1}ar_{n-2}....ar_2ar_1a) \subseteq P$ olup $a \notin Q$ olduğundan $aR(ar_{n-4}ar_{n-3}....ar_2ar_1a) \subseteq P$ şeklindedir. Bu şekilde ilerlendiğinde $aRa \subseteq P$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $N(R) \subseteq P(R)$ bulunur. Tersine $R$ yarı asal ve 2-asallı bir halka olsun. Bu durumda $P(R) = 0$ dolayısıyla $N(R) = 0$ dır. Buradan $R$ indirgenmiş olup merkezi terslenebilirdir. ■

## 3.2. Merkezi Terslenebilir Halkaların Bazı Genişlemeleri

Bu bölümde merkezi terslenebilir halkaların bazı genişlemeleri ele alınacaktır.

**Önerme 3.28.** $\{R_i\}_{i\in I}$ halkaların bir sınıfı olsun. Burada $I$ sonlu indeks kümesidir. Bu durumda her $i \in I$ için $R_i$ merkezi terslenebilirdir ancak ve ancak $\oplus_{i\in I} R_i$ merkezi terslenebilirdir.

**İspat**. Kabul edelim ki; her $i \in I$ için $R_i$ merkezi terslenebilir olsun.

$$a = (a_i)_{i\in I}, b = (b_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} R_i$$

olmak üzere $ab = 0$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $a_i b_i = 0$ olur. $R_i$ merkezi terslenebilir olduğundan $b_i a_i$ elemanı $R_i$ halkasında merkezdedir. Her $c = (c_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} R_i$ için

$$(ba)c = (b_i a_i)_{i\in I}(c_i)_{i\in I} = (b_i a_i c_i)_{i\in I} = (c_i b_i a_i)_{i\in I} = (c_i)(b_i a_i)_{i\in I} = c(ba)$$

olup $ba$; $\oplus_{i\in I} R_i$ halkasının merkezindedir.
Tersine kabul edelim ki; $\oplus_{i\in I} R_i$ merkezi terslenebilir ve bir $i \in I$ için $a_i, b_i \in R_i$ olmak üzere $a_i b_i = 0$ olsun. Bu durumda

$$a = (0, ..., 0, a_i, 0, ..., 0), b = (0, ..., 0, b_i, 0, ..., 0) \in \oplus_{i\in I} R_i$$

için $ab = 0$ olup kabulden $ba$ elemanı $\oplus_{i\in I} R_i$ halkasının merkezindedir. Yani her $c = (c_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} R_i$ olup $(ba)c = c(ba)$. Buradan $(b_i a_i)_{i\in I}(c_i)_{i\in I} = (c_i)_{i\in I}(b_i a_i)_{i\in I}$ olup $b_i a_i c_i = c_i b_i a_i$ bulunur. O halde $b_i a_i$ elemanı $R_i$ halkasının merkezindedir. ■

Şimdi merkezi terslenebilir halkaların sonlu dik toplam altında kapalı olduğu gösterilecektir.

**Sonuç 3.29.** $R$ bir halka ve $e^2 = e \in C(R)$ olsun. Bu durumda $eR$ ve $(1 - e)R$ merkezi terslenebilirdir ancak ve ancak $R$ merkezi terslenebilirdir.

**İspat**. $e$ eşkare elemanı merkezde olduğundan $eR$ ve $(1 - e)R$; $R$ halkasının idealleridir. $R = eR \oplus (1 - e)R$ olduğundan Önerme 3.28. den istenen sonuç elde edilir. ■

$R$ ve $M$ halkalar olsun. $R \oplus M$ bileşensel toplama ve $(r_1, m_1), (r_2, m_2) \in R \oplus M$ olmak üzere $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$ çarpma işlemleriyle bir halkadır. Bu halkaya *$R$ nin $M$ boyunca aşikar genişlemesi (trivial extension of R by M)* denir ve $T(R, M)$ ile gösterilir. Ayrıca bu halka bilinen matris işlemleri ile

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in R, m \in M \right\}$$

halkasına izomorftur.

**Teorem 3.30.** [13] Eğer $R$ indirgenmiş bir halka ise bu durumda $T(R, R)$ terslenebilirdir.

**İspat**. Kabul edelim ki $R$ indirgenmiş bir halka ve

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R, R)$$

için

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0$$

olsun. Buradan $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$ denklemleri elde edilir. $R$ indirgenmiş olduğundan $(ca)^2 = caca = 0$ olup $ca = 0$. Ayrıca $ad + bc = 0$ eşitliğinin her iki tarafını soldan $c$ ile çarpıldığında $cad + cbc = 0$ ve buradan $cbc = 0$ bulunur. Üstelik $(bc)^2 = bcbc = 0$ bulunur. $R$ indirgenmiş olduğundan $bc = cb = 0$ ve $ad = 0 = da$ elde edilir. Böylece

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & cb + da \\ 0 & ca \end{pmatrix} = 0$$

olup $T(R, R)$ terslenebilirdir. ■

**Önerme 3.31.** [14] Eğer $R$ merkezi indirgenmiş bir halka ise bu durumda $T(R, R)$ merkezi terslenebilirdir.

**İspat**.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R, R)$$

olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0$$

olsun.

Bu durumda $ac = 0 = ad + bc$ bulunur. Kabulden $R$ merkezi indirgenmiş olduğundan $ca$ merkezdedir. Bu durumda $(ad)^3 = (-bc)(ad)(-bc) = b(ca)dbc = bdbcac = 0$ olup $R$ merkezi indirgenmiş olduğundan $ad$ merkezdedir.

Üstelik $(da)^4 = dadad(ad)a = dadad(-bc)a = dadacad(-b) = 0$ olup $da$ merkezdedir ve $(cb)^4 = cbcbc(bc)b = cbcbc(-ad)b = -cbcb(ca)db = 0$ olup $cb$ merkezdedir. Bu durumda $da$ ve $cb$ merkezdedir. Böylece

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

merkezdedir. ■

**Uyarı 3.32.** $R$ bir halka ve $S \subseteq R$ çarpımsal kapalı bir küme olsun. Bu durumda $R \times S$ üzerinde $\sim$ bağıntısı $(a, s) \sim (a', s')$ olması için gerek ve yeter şart $u(as' - a's) = 0$ olacak şekilde bir $u \in S$ vardır. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve her bir $[(a, s)]$ denklik sınıfı $\frac{a}{s}$ ile gösterilir. Bütün denklik sınıfların kümesi

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in R, s \in S \right\}$$

kümesi

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}$$

ve

$$\frac{a}{s}\frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$$

işlemleriyle birlikte bir halkadır.

**Önerme 3.33.** [14] $R$ bir halka olsun. Bu durumda $R$ merkezi terslenebilirdir ancak ve ancak $S^{-1}R$ merkezi terslenebilirdir.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ merkezi terslenebilir bir halka ve $\frac{a}{r}, \frac{b}{s} \in S^{-1}R$ için

$$\frac{a}{r}\frac{b}{s} = 0$$

olsun. Buradan $a, b \in R$ ve $r, s \in S$ için

$$\frac{a}{r}\frac{b}{s} = \frac{ab}{rs} = 0$$

olduğundan $ab = 0$ elde ederiz. Kabulden $ba$ merkezdedir. O halde her $\frac{c}{t} \in S^{-1}R$ için

$$(\frac{b}{s})(\frac{a}{r})(\frac{c}{t}) = (\frac{c}{t})(\frac{b}{s})(\frac{a}{r})$$

olur. Böylece $S^{-1}R$ merkezi terslenebilirdir.

Tersine kabul edelim ki $S^{-1}R$ merkezi terslenebilir olsun. $R$ halkası $S^{-1}R$ halkasına gömülebilir olduğundan sonuç açıktır. ■

**Sonuç 3.34.** [14] $R$ bir halka olsun. Bu durumda $R$ merkezi terslenebilirdir ancak ve ancak $R[x, x^{-1}]$ merkezi terslenebilirdir.

**İspat**. $S = \{1, x^2, x^3, ...\}$, $R[x]$ in kümesi merkezi regular elemanlarından oluşur. İstenilen sonuç Önerme 3.33. den elde edilir. ■

**Teorem 3.35.** [14] $R$ bir Armendariz halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $R$ merkezi terslenebilirdir.

(2) $R[x]$ merkezi terslenebilirdir.

(3) $R[x, x^{-1}]$ merkezi terslenebilirdir.

**İspat**. $(1) \Rightarrow (2)$

Kabul edelim ki; $R$ merkezi terslenebilir bir halka olsun.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \, , g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$$

için $f(x)g(x) = 0$ olsun. $R$ Armendariz olduğundan her bir $i$ ve $j$ için $a_i b_j = 0$ şeklindedir. Kabulden her bir $i$ ve $j$ için $b_j a_i$ merkezdedir. Buradan $g(x)f(x)$, $R[x]$ halkasında merkezdedir. Böylece $R[x]$ merkezi terslenebilirdir.

$(2) \Rightarrow (1)$

$R$ halkası; $R[x]$ polinom halkasının bir althalkası olduğundan sonuç açıktır.

$(2) \Rightarrow (3)$

Sonuç 3.34. den elde edilir. ■

**Önerme 3.36.** [14] $R$ bir halka olsun. Bu durumda $R$ merkezi terslenebilirdir ancak ve ancak $R$ nin Dorroh genişlemesi $D(R, \mathbb{Z})$ merkezi terslenebilirdir.

**İspat**. Kabul edelim ki $R$ merkezi terslenebilir olsun. $(r_1, n_1), (r_2, n_2) \in D(R, \mathbb{Z})$ için

$$(r_1, n_1)(r_2, n_2) = 0$$

olsun.

$$(r_1, n_1)(r_2, n_2) = (r_1 r_2 + n_1 r_2 + n_2 r_1, n_1 n_2) = (0_R, 0); r_1 r_2 + n_1 r_2 + n_2 r_1 = 0_R$$

ve $n_1 n_2 = 0$ olup $n_1 = 0$ ya da $n_2 = 0$ bulunur.

**I. durum** : Kabul edelim ki; $n_1 = 0$ olsun.

$$(r_2, n_2)(r_1, 0) = (r_2 r_1 + n_2 r_1 + 0 r_2, 0) = (r_2 r_1 + n_2 r_1, 0) = ((r_2 + n_2 1_R) r_1, 0)$$

$R$ merkezi terslenebilir olduğundan $(r_2 + 1_R n_2) r_1$ ; $R$ de merkezdedir. Buradan

$$(r_2, n_2)(r_1, n_1) = (r_2r_1 + n_2r_1 + n_1r_2, n_2n_1) = (0_R, 0); n_1 = 0$$

olduğunda

$$r_2r_1 + n_2r_1 = 0, r_1(r_2 + n_21_R) = 0.$$

$r_1 \in R$ , $r_2 + n_21_R \in R$ olduğundan $(r_2 + n_21_R)r_1 \in C(R)$.
Böylece $D(R, \mathbb{Z})$ merkezi terslenebilirdir.
**II. durum** : Kabul edelim ki; $n_2 = 0$ olsun. Her $(r, m) \in D(R, \mathbb{Z})$ olsun.
$(r, m)((r_2 + n_21_R)r_1, 0) = (r(r_2 + n_21_R)r_1 + m(r_2 + n_21_R)r_1 + 0r, m0)$
$= (r(r_2 + n_21_R)r_1 + m(r_2 + n_21_R)r_1, 0)$
$= ((r_2 + n_21_R)r_1r + m(r_2 + n_21_R)r_1, 0)$
$= ((r_2 + n_21_R)r_1r + m(r_2 + n_2 + 1_R)r_1, 0r, m0)$
$= (((r_2 + n_21_R)r_1, 0)(r, m)) = ((r_2 + n_21_R)r_1, 0)(r, m)$
Buradan $D(R, \mathbb{Z})$ Dorroh genişlemesi merkezi terslenebilirdir.
Tersine kabul edelim ki; $D(R, \mathbb{Z})$ merkezi terslenebilir olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $(a, 0)(b, 0) = (0, 0)$ olup kabulden $(b, 0)(a, 0)$; $D(R, \mathbb{Z})$ de merkezdedir. Özel olarak; $(r, 0)$ ile yer değiştirildiğinde $(b, 0)(a, 0)(r, 0) = (r, 0)(b, 0)(a, 0)$ bulunur. Buradan $bar = rab$ olup $R$ merkezi terslenebilirdir. ■

# 4. SİMETRİK HALKALARIN GENELLEŞTİRMELERİ

Bu bölümde merkezi simetrik halka olarak adlandırılan simetrik halkaların bir genelleştirmesi verilmektedir. Simetrik halkalardaki bazı sonuçlar; merkezi simetrik halkalara genişletilir.

## 4.1. Merkezi Simetrik Halkalar

**Tanım 4.1.** [11] $R$ bir halka olsun. $abc = 0$ olacak şekilde her $a, b, c \in R$ için $acb = 0$ oluyorsa $R$ ye *simetrik (symmetric) halka* denir.

**Uyarı 4.2.** Denk bir koşul $abc = 0$ iken $bac = 0$ olmasıdır.

Aşağıda simetrik halkaların bir genelleştirmesi olan merkezi simetrik halka kavramı verilmektedir.

**Tanım 4.3.** [11] $R$ bir halka olsun. $abc = 0$ olacak şekilde her $a, b, c \in R$ için $bac \in C(R)$ ise $R$ ye *merkezi simetrik (central symmetric) halka* denir.

Her simetrik halka merkezi simetrik halka olmasına rağmen, her merkezi simetrik halka simetrik olmak zorunda değildir.

**Örnek 4.4.** [11] $x, y, z$ bilinmeyenler olmak üzere

$$R = \{a_0 + a_1x + a_2y + a_3z \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}$$

kümesi göz önüne alınsın. $R$ üzerinde bileşensel toplama ve çarpma işlemi:

$$\begin{gathered}(a_0 + a_1x + a_2y + a_3z)(b_0 + b_1x + b_2y + b_3z) = \\ a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_2b_0)y + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2)z\end{gathered}$$

ile tanımlandığında $R$ birimli bir halkadır. Bu çarpımda $xy = z$ ve $1$ birimi dışında bütün çarpımlar sıfırdır [27, Örnek 5.1]. Ayrıca $x^2 = y^2 = 0$, $xz = xxy = 0 = xyx = zx$ ve

$zy = xyy = 0 = yxy = yz$ olduğundan $z$ merkezdedir. Böylece $R$ merkezi simetriktir. Diğer taraftan $yx = yx1 = 0$ ancak $xy1 = z$ olup $R$ simetrik değildir.

Aşağıdaki önerme merkezi simetrik bir halkanın hangi koşullar altında simetrik olduğunu ortaya koymaktadır.

**Önerme 4.5.** [11] Eğer $R$ bir simetrik halka ise bu durumda $R$ merkezi simetriktir. Tersi $R$ nin aşağıdaki koşullardan birini sağlaması durumunda doğrudur.

(1) $R$ bir yarı asal halkadır.

(2) $R$ bir sağ (sol) p.p. halkadır.

(3) $R$ bir sağ (sol) devirli yarı-Baer halkadır.

**İspat**. Her simetrik halkanın merkezi simetrik olduğu açıktır. Tersine $R$ bir merkezi simetrik halka ve $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. $R$ merkezi simetrik olduğundan $bca$ merkezdedir. Şimdi aşağıdaki durumlar göz önüne alınsın.

(1) $R$ bir yarı asal halka olsun. Her $x \in R$ için $(bca)x(bca) = (bca)(bca)x = 0$ olup $R$ yarı asal olduğundan $bca = 0$ elde edilir. Böylece $R$ simetriktir.

(2) $R$ bir sağ p.p. halka olsun. Bu durumda $r_R(a) = eR$ olacak şekilde bir $e$ eşkare elemanı vardır. Buradan $bc \in r_R(a)$ ve $bc = er$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Böylece $ebc = e^2r = bc$ elde edilir. $e \in eR = r_R(a)$ olduğundan $ae = 0$ bulunur. $bca = e(bca) = bc(ae) = 0$ olup $R$ simetriktir. Benzer bir ispat $R$ nin bir sol p.p. halka olması durumunda verilebilir.

(3) $R$ bir sağ devirli yarı-Baer halka ve $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. $R$ sağ devirli yarı-Baer olduğundan $r_R(aR) = eR$ olacak şekilde bir $e$ eşkare elemanı vardır. Buradan $ae = 0$ bulunur. Diğer taraftan her $x \in R$ için $axbca = abcax = 0$ olup $bca \in r_R(aR) = eR$. Böylece $bca = ebca = bcae = 0$. O halde $R$ simetriktir. Benzer bir ispat halkanın sol devirli yarı-Baer olması durumunda verilebilir.

■

**Sonuç 4.6.** [11] Eğer $R$ bir merkezi simetrik halka ise aşağıdaki koşullar denktir.

(1) $R$ bir sağ p.p. halkadır.

(2) $R$ bir sol p.p. halkadır.

(3) $R$ bir sağ devirli yarı-Baer halkadır.

(4) $R$ bir sol devirli yarı-Baer halkadır.

**İspat**. Önerme 4.5. den açıktır. ■

**Lemma 4.7.** Bütün indirgenmiş halkalar simetriktir.

**İspat**. $R$ indirgenmiş bir halka ve $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. $(bca)^2 = bc(abc)a = 0$ ve $R$ indirgenmiş olduğundan $bca = 0$ bulunur. O halde $R$ simetriktir. ■

Halkanın merkezi indirgenmiş olması durumunda aşağıdaki lemma verilmektedir.

**Lemma 4.8.** [11] Eğer $R$ bir merkezi indirgenmiş halka ise bu durumda $R$ merkezi simetriktir.

**İspat**. $R$ bir merkezi indirgenmiş halka ve $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. Bu durumda $(cab)^2 = c(abc)ab = 0$ olup ve $R$ merkezi indirgenmiş olduğundan $cab$ merkezdedir. Diğer taraftan $(bca)^2 = bc(abc)a = 0$ olup ve $R$ merkezi indirgenmiş olduğundan $bca$ merkezdedir. Böylece her $r \in R$ için $(arbc)^2 = ar(bca)rbc = abcar^2bc = 0$ olup ve $R$ merkezi indirgenmiş olduğundan $arbc$ merkezdedir. Her $r \in R$ için $(abrc)^3 = abr(cab)r(cab)rc = ab(cab)r(cab)rrc = 0$ olup ve $R$ merkezi indirgenmiş olduğundan $abrc$ merkezdedir. $(bcra)^2 = bcr(abc)ra = 0$ olup ve $R$ merkezi indirgenmiş olduğundan $bcra$ merkezdedir. $(carb)^2 = car(bca)rb = c(abc)arrb = 0$ olup ve $R$ merkezi indirgenmiş olduğundan $carb$ merkezdedir. Herhangi $r, s \in R$ için $(arbsc)^2 = arbs(carb)sc = (arb)carbssc = ar(bca)rbs^2c = (abc)arrbs^2c = 0$ olup ve $R$ merkezi indirgenmiş olduğundan $arbsc$ merkezdedir. Ayrıca $acbac$ merkezde ve $(acbac)^2 = 0$ olduğundan $(bac)^4 = b(acbac)b(acbac) = 0$ bulunur. $R$ bir merkezi indirgenmiş halka olduğundan $bac$ merkezdedir. O halde $R$ bir merkezi simetrik halkadır. ■

**Önerme 4.9.** [11] $R$ bir merkezi simetrik halka olsun. Bu durumda $R$ bir Abelyan halkadır.

**İspat**. Kabul edelim ki $R$ bir merkezi simetrik halka olsun. $e$; $R$ de bir eşkare eleman ve $r \in R$ olsun. $e(re - ere) = 0$ ve $(er - ere)e = 0$ olup $R$ merkezi simetrik olduğundan $(re - ere)e$ ve $e(er - ere)$ merkezdedir. $(re - ere)e \in C(R)$ olduğundan özel olarak $e$ ile yer değiştirildiğinde. $e(re - ere)e = (re - ere)e^2 = 0$ ve buradan $re = ere$ elde edilir. Benzer şekilde $e(re - ere) \in C(R)$ olduğundan özel olarak yerdeğiştirdiğimizde $e^2(er - ere) = e(er - ere)e = 0$ ve buradan $er = ere$ elde edilir. Böylece her $r \in R$ için $er = re$ olup $e$ merkezdedir. O halde $R$ Abelyandır. ■

Aşağıdaki teoremde bir merkezi simetrik halkanın hangi durumlarda indirgenmiş olduğu verilmektedir.

**Teorem 4.10.** [11] $R$ bir merkezi simetrik halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır.

(1) Eğer $R$ bir yarı asal halka ise o zaman $R$ indirgenmiştir.

(2) Eğer $R$ bir sağ (sol) p.p. halka ise o zaman $R$ indirgenmiştir.

**İspat**. $R$ bir merkezi simetrik halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun.

(1) Bu durumda her $r \in R$ için $ra^2 = 0$ olup $ara$ merkezdedir. Buradan $s \in R$ için $(ara)s(ara) = arasara = ara^2ras = 0$ yani $(ara)R(ara) = 0$ bulunur. $R$ bir yarı asal halka olduğundan $ara = 0$ ve buradan $aRa = 0$ elde edilir. $R$ bir yarı asal halka olduğundan $a = 0$ olup böylece $R$ indirgenmiştir.

(2) $R$ bir sağ p.p. halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $r_R(a) = eR$ olacak şekilde bir $e$ eşkare elemanı vardır. Buradan $a \in r_R(a)$ olup $ae = 0$ ve $a = ea$ bulunur. Önerme 4.9. den $e$ merkezde olup $a = ea = ae = 0$.

■

Her simetrik halkanın terslenebilir olduğu iyi bilinir. Bu ifadenin tersi ise yarı asal halkalar için sağlanır. Böylece aşağıdaki önerme verilmektedir.

**Önerme 4.11.** [11] $R$ bir merkezi simetrik halka olsun. Bu durumda $R$ merkezi terslenebilirdir. Eğer $R$ bir yarı asal halka ise ifadenin tersi doğrudur.

**İspat**. $R$ bir merkezi simetrik halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $ab1 = 0$ olup kabulden $ba1 = ba$ merkezdedir. Böylece $R$ merkezi terslenebilirdir. Şimdi $R$ bir yarı asal merkezi terslenebilir halka ve $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. $a, b$ ve $c$ yi sıfırdan farklı kabul edebiliriz. Her $r \in R$ için $ab(cr) = 0$ olup buradan $crab$ merkezdedir. Her $t \in R$ için $(crab)^2t = cr(abc)rabt = (crab)t(crab)$ şeklindedir. $R$ bir yarı asal halka olduğundan $crab = 0$ bulunur. Her $s \in R$ için $cra(bs) = 0$ ve buradan $bscra$ merkezdedir. Üstelik $(bscra)^2 = bs(crab)scra = 0$. Benzer şekilde $R$ bir yarı asal halka olduğundan $bscra = 0$ bulunur. Özel olarak $s = a$ ve $r = b$ alındığında $(bac)^2 = bacbac = 0$ elde edilir. Her $t \in R$ için $(bac)^2t = 0$ ve $R$ merkezi terslenebilir olduğundan $bactbac$ merkezdedir ve $(bactbac)^2 = 0$. Bu durumda $bactbacRbactbac = 0$ elde edilir. $R$ yarı asal halka olduğundan $bactbac = 0$ bulunur. Buradan $bac = 0$ olup $R$ bir simetrik halkadır.

■

**Sonuç 4.12.** Her merkezi indirgenmiş halka merkezi terslenebilirdir.

**İspat**. Lemma 4.8. den her merkezi indirgenmiş halka merkezi simetrik olup Önerme 4.11. den merkezi terslenebilirdir. ■

Bir merkezi simetrik halkanın homomorfik görüntüsü merkezi simetrik olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnekte bu gösterilmektedir.

**Örnek 4.13.** $\mathbb{Z}_2(y)$; $\mathbb{Z}_2[y]$ polinom halkasının kesirler cismini ve $R = \mathbb{Z}_2(y)[x]$; $x$ bilinmeyen ve $xy + yx = 1$ bağıntısıyla $\mathbb{Z}_2(y)$ üzerinde polinom halkasını göstersin. ([10, Sayfa 30], [7, Uyarı 3.9] ve [27, Örnek 5.3]) ten $R$ nin esas ideal bölgesi ve dolayısıyla değişmeli olmayan tamlık bölgesi olduğu açıktır. $I = x^2R$ olsun. Bu durumda $I$; $R$ nin bir maksimal idealidir. $S = R/I$ bölüm halkası ve $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. $R$ bir tamlık bölgesi olduğundan $a$,$b$,$c$ den en az biri sıfırdır. Böylece $bac = 0$ olup $bac$ merkezdedir. O halde $R$ bir merkezi simetrik halkadır. Diğer taraftan $\overline{x}, \overline{y} \in S$ için $\overline{x}^2 = \overline{0}$ olup $\overline{x}\,\overline{y} + \overline{y}\,\overline{x} = \overline{1}$ elde edilir. Son eşitliği sağdan $\overline{x}$ ile çarpıldığında $\overline{x}^2 = \overline{0}$ eşitliğinden yararlanıldığında $\overline{x}\,\overline{y}$ $\overline{x} = \overline{x}$ bulunur. Eğer $S$ bir merkezi simetrik halka olsaydı; $(\overline{x}\,\overline{y} - \overline{1})\overline{x} = \overline{0}$ olması $\overline{x}(\overline{x}\,\overline{y} - \overline{1}) = -\overline{x}$ nin merkezde olmasını gerektirirdi. $\overline{x}$ merkezde olmadığından bu bir çelişkidir.

**“ Bir halkanın homomorfik görüntüsü ne zaman merkezi simetrik olur? ”** sorusuna cevap aranmaktadır.

**Lemma 4.14.** [11] $R$ bir tersinir-merkezi halka olsun. Eğer $I$; $R$ nin bir nil ideali ise bu durumda $R$ ve $R/I$ merkezi simetrik halkalardır.

**İspat**. İlk olarak bir tersinir-merkezi halkada, üstel sıfırlı elemanların merkezde olduğu gösterilecektir. $a \in N(R)$ olsun. Bu durumda $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n$ pozitif tamsayısı vardır. $(1+a)(1-a+a^2-a^3+...+(-1)^{n-1}a^{n-1}) = 1$ olup $(1+a)$ merkezdedir. Buradan $a$ merkezde bulunur. $a, b, c \in R$, $\overline{a} := a + I$ ve $\overline{R} := R/I$ olmak üzere $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{0}$ olsun. Bu durumda $abc \in I$ ve $I$ bir nil ideal olduğundan $abc$ bir üstel sıfırlı elemandır. Buradan $1+abc$ merkezde ve böylece $abc$ merkezdedir. Şimdi $(\overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b})^2 = \overline{0}$ ve $(\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a})^2 = \overline{0}$ olması $(cab)^2 \in I$ ve $(bca)^2 \in I$ olmasını gerektirir. O halde $cab$ ve $bca$ merkezdedir. Her $r \in R$ için $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{r} = \overline{0}$ olması $(\overline{c}\,\overline{r}\,\overline{a}\,\overline{b})^2 = \overline{0}$ olmasını gerektirir. Buradan $(crab)^2 \in I$ ve $(crab)^2$ bir üstel sıfırlı elemandır. O halde her $r \in R$ için $crab$ merkezdedir. Benzer şekilde $(\overline{b}\,\overline{s}\,\overline{c}\,\overline{a})^2 = \overline{b}\,\overline{s}\,\overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{s}\,\overline{c}\,\overline{a} = \overline{0}$ olması her $s \in R$ için $bsca$ elemanının merkezde olmasını gerektirir. Üstelik $\overline{c}\,\overline{r}\,\overline{a}\,\overline{b}$ bir üstel sıfırlı eleman ve merkezde olduğundan $(\overline{b}\,\overline{s}\,\overline{c}\,\overline{r}\,\overline{a})^2 = \overline{0}$ bulunur. Buradan $s, r \in R$ için $bscra$ merkezdedir. $\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}$ bir üstel sıfırlı eleman ve merkezde olduğundan $(\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c})^4 = \overline{0}$ olup $bac$ merkezdedir. Böylece $\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}$ merkezdedir. ■

Aşağıdaki örnekte bir $R$ halkası ve $R$ nin bir $I$ ideali için $R/I$ bir merkezi simetrik halka olmasına rağmen $R$ nin merkezi simetrik olmadığı verilmektedir.

**Örnek 4.15.** [11] $F$ bir cisim $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ ve $e_{ij}$; $i$. satır, $j$. sütun bileşeni $1$ diğer yerlerde 0 (sıfır) olan matrisi göstersin.
$I = e_{12}R$ olsun. Bu durumda $I$, $R$ nin bir idealidir ve $R/I$ bir değişmeli halkadır. Bu sebeple $R/I$ merkezi simetriktir. $A = e_{22}, B = e_{11} + e_{12}$ ve $C = A + B$ elemanları göz önüne alınsın. Bu durumda $ABC = 0$ olmasına rağmen $BAC = e_{12}$ merkezde değildir. Gerçekten $e_{11}e_{12} = e_{12}$ ve $e_{12}e_{11} = 0$. Buradan $R$ merkezi simetrik değildir.

$R$ bir halka ve $I$; $R$ nin bir ideali olsun. Eğer $aRb \subseteq I$ olması $a \in I$ ya da $b \in I$ olmasını gerektiriyorsa $I$ ya *asal ideal* denir. Eğer $ab \in I$ olması $a \in I$ ya da $b \in I$ olmasını gerektiriyorsa $I$ ya *tamamen asal ideal* denir. Tamamen asal idealler asal ideallerdir. Ancak tersi doğru değildir. Herhangi bir $n$ pozitif tamsayısı için bir cisim üzerinde $n \times n$ tipindeki bütün matrislerin halkası göz önüne alınsın. Sıfır ideali; asal ideal olmasına rağmen tamamen asal değildir.

Aşağıdaki lemmada tamamen asal ve indirgenmiş bir $I$ ideali ile $R/I$ bir merkezi simetrik halka iken $R$ nin de simetrik halka olduğu gösterilmektedir.

**Lemma 4.16.** [11] $R$ bir halka ve $I$; $R$ nin tamamen asal ve indirgenmiş bir ideali olsun. Eğer $R/I$ bir merkezi simetrik halka ise bu durumda $R$ simetriktir. Üstelik $R$ merkezi simetriktir.

**İspat**. $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. Bu durumda $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{0}$. Her $\overline{r} \in R/I$ için $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{r} = \overline{0}$ şeklindedir. $R/I$ merkezi simetrik olduğundan $\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{r}$ merkezdedir. Ayrıca her $\overline{r} \in R/I$ için $\overline{r}\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ = $\overline{0}$ olup $R/I$ merkezi simetrik olduğundan $\overline{b}\,\overline{r}\,\overline{a}\,\overline{c}$ merkezdedir. Buradan $(\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c})^4 = (\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b})\,\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}(\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b})\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}$ elde edilir. Üstelik $\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}\,(\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b})\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c}(\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c})\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}(\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c})\,\overline{c}$ olup $\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}(\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c})\,\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c}(\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c})\,\overline{c} = \overline{a}(\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c})\,\overline{c}\,\overline{c} = \overline{0}$ bulunur. Buradan $(bac)^4 \in I$ ve $I$ tamamen asal olduğundan $bac \in I$ olup $a \in I$ veya $b \in I$ veya $c \in I$ bulunur. Böylece $cab \in I$ ve $(cab)^2 = 0$ bulunur. $I$ indirgenmiş olduğundan $cab = 0$ elde edilir. Benzer şekilde her $r, s, u \in R$ için $(bsca)^2 = 0$ ve $bsca = 0$, $(arbsc)^2 = 0$ ve $arbsc = 0$, $(cuarbs)^2 = 0$ ve $cuarbs = 0$. Buradan her $r, s, u \in R$ için $bscuar = 0$. Bu ise $(bac)^2 = bacbac = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $bac = 0$ bulunur. O halde $R$ simetrik yani merkezi simetriktir. ■

**Tanım 4.17.** [22] $R$ bir halka olsun. $a, b, c \in R$ için eğer $abc \in N(R)$ iken $acb \in N(R)$ ise $R$ ye *zayıf simetrik (weak symmetric ) halka* denir.

Aşağıda merkezi simetrik olmayan ancak zayıf simetrik olan bir halkanın varlığına yönelik bir örnek verilmektedir.

**Örnek 4.18.** [11] Bileşenleri tamsayılar halkasından gelen 3×3 tipindeki üst üçgensel matrislerin

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

halkası göz önüne alınsın.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$$

için $ABC = 0$. Buna rağmen

$$BAC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $BAC$ merkezde değildir. Buradan $R$ bir merkezi simetrik halka değildir. Ayrıca [22, Önerme 2.3] ten $R$ zayıf simetriktir.

**Uyarı 4.19.** Önerme 4.9. un tersi genelde doğru değildir. Yani her Abelyan halka merkezi simetrik olmak zorunda değildir.

**Örnek 4.20.** [5]

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a \equiv d\ (mod 2), b \equiv c \equiv 0\ (mod 2) \right\}$$

halkası göz önüne alınsın. 0 (sıfır) ve $I_2$ (birim) matrisler ; $R$ nin tek eşkare elemanları olduğundan $R$ Abelyan halkadır.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in R$$

için $ABC = 0$ olmasına rağmen

$$BAC = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan merkezde değildir.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in R$$

için

$$(BAC)X = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 72 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X(BAC) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 32 & 16 \end{pmatrix}$$

$(BAC)X \neq X(BAC)$ olduğundan $BAC$; $R$ halkasının merkezinde yer almaz.
Aşağıdaki sonuç Önerme 4.9. un tersinin sağ devirli projektif halkalar için doğru olduğunu göstermektedir.

**Önerme 4.21.** [11] $R$ bir sağ p.p. halka olsun. Eğer $R$ Abelyan ise bu durumda $R$ merkezi simetriktir.

**İspat**. $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. Kabulden $r_R(a) = eR$ olacak şekilde bir $e$ eşkare elemanı vardır. $e \in eR$ olduğundan $ae = 0$ ve $bc = ebc$ elde edilir. $R$ Abelyan olduğundan $bca = ebca = bcae = 0$ bulunur. Böylece $R$ simetrik yani merkezi simetriktir ■

**Sonuç 4.22.** [11] Her merkezi simetrik halka dik sonludur.

**İspat**. Her Abelyan halka dik sonlu olduğundan sonuç Önerme 4.9. dan açıktır. ■

**Önerme 4.23.** [11] $R$ bir merkezi simetrik halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(1) $R$ merkezi yarı-değişmelidir.

(2) $R$ zayıf yarı-değişmelidir.

**İspat**. (1) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $rab = 0$ olur ki; $arb$ merkezdedir. Böylece $R$ merkezi yarı-değişmelidir.
(2) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $ab1 = 0$ olup $ba$ merkezdedir. Her $r \in R$ için

$(arb)^2 = arbarb = ar(ba)rb = ar^2b(ab) = 0$ elde edilir. Böylece $arb$ üstel sıfırlı eleman olup $R$ zayıf yarı-değişmelidir. ■

**Önerme 4.24.** [11] $R$ bir halka olsun. Bu durumda $R$ bir tamlık bölgesidir ancak ve ancak $R$ nin asal ve merkezi simetriktir.

**İspat**. İlk olarak $R$ bir tamlık bölgesi ve $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. Bu durumda $ab = 0$ olup $a = 0$ ya da $b = 0$ bulunur. O halde $R$ asaldır. $a, b, c \in R$ olmak üzere $abc = 0$ olsun. Bu durumda $a = 0$ ya da $b = 0$ ya da $c = 0$. Buradan $bac = 0$ olup merkezdedir. O halde $R$ merkezi simetriktir.
Tersine $R$ asal ve merkezi simetrik halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $rab = 0$ ve $abr = 0$ elde edilir. $R$ merkezi simetrik olduğundan $arb$ ve $bar$ merkezdedir. Buradan her $r \in R$ için $(arb)R(arb) = R(arb)(arb) = Rar(bar)b = Ra(bar)rb = R(ab)ar^2b = 0$ elde edilir. $R$ asal olduğundan her $r \in R$ için $arb = 0$ ve $aRb = 0$ bulunur. $R$ asal olduğundan $a = 0$ ya da $b = 0$ bulunur. O halde $R$ bir tamlık bölgesidir. ■

**Teorem 4.25.** [11] Eğer $R$ bir merkezi simetrik halka ise bu durumda $R$, $2-$asallıdır. Tersi halkanın yarı asal olması durumunda doğrudur.

**İspat**. $P(R)$ bir nil ideal olduğundan $P(R) \subseteq N(R)$ olduğu açıktır. İspatı tamamlamak için $N(R) \leq P(R)$ olduğunu göstermeliyiz. $a \in N(R)$ ve kabul edelim ki $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $ra^2 = 0$ olup $ara$ merkezdedir. Her $s \in R$ için $ara$ yı $sa$ ile yer değiştirildiğinde $arasa = 0 \in P$ elde edilir. Her $P$ asal ideali için $a \in P$ olup buradan $a \in P(R)$ bulunur. Kabul edelim ki; $a^3 = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $ra^3 = 0$, $ar^3 = 0$ ve kabulden $a^2ra$ ve $ara^2$ merkezdedir. Her $s \in R$ için $a^2ra$ ile $sa$ yer değiştirildiğinde $a^2rasa = 0$ elde edilir. Her $t \in R$ için $ta^2rasa = 0$ olup kabulden $arasata$ merkezdedir. Her $z \in R$ için $arasata$ ile $az$ yer değiştirildiğinde ve her $r \in R$ için $ara^2$ nin merkezde olmasından $(az)(arasata) = (arasata)(az) = aras(ata^2)z = (ata^2)arasz = 0$ elde edilir. $z, t, r$ ve $s$ keyfi olduğundan $a \in P(R)$ elde edilir. Nilpotent indeksi üzerinde tümevarım yapıldığında $P(R)$ nin $R$ nin bütün üstel sıfırlı elemanlarını içerdiği görülür. Buradan $R$ halkası $2-$asallıdır.

Tersine $R$ yarı asal ve $2-$ asallı bir halka olsun. Bu durumda $R$ simetrik ve dolayısıyla merkezi simetriktir. ■

**Sonuç 4.26.** [11] $R$ bir merkezi simetrik halka olsun. Bu durumda $R/P(R)$ merkezi simetriktir.

$R$ bir halka olmak üzere eğer her $a \in R$ için $a = aba$ olacak şekilde $b \in R$ varsa $R$ ye *von Neumann düzenli* halka denir. Eğer her $a \in R$ için $a = a^2b$ olacak şekilde $b \in R$ varsa $R$ ye *güçlü düzenli (strongly regular)* halka denir. Şimdi simetrik, merkezi simetrik, düzenli, güçlü düzenli ve Abelyan halkalar arasındaki ilişkiyi verelim.

**Teorem 4.27.** [11] $R$ bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) $R$ güçlü düzenlidir.

(2) $R$ von Neumann düzenli ve simetriktir.

(3) $R$ von Neumann düzenli ve merkezi simetriktir.

(4) $R$ von Neumann düzenli ve Abelyandır.

**İspat**. $(1) \Rightarrow (2)$ Güçlü düzenli halkaların von Neumann düzenli olduğu açıktır. $a, b, c \in R$ olmak üzere $abc = 0$ olsun. Bu durumda $(bca)^2 = bc(abc)a = 0$ ve bir $r \in R$ için $(bac)^2 r = bac$ olup $bca = 0$ elde edilir. Bu durumda $R$ simetriktir.
$(2) \Rightarrow (3)$ Her simetrik halka merkezi simetrik olduğundan sonuç açıktır.
$(3) \Rightarrow (4)$ Her merkezi simetrik halka Abelyan olduğundan sonuç açıktır.
$(4) \Rightarrow (1)$ $a \in R$ olsun. $R$ von Neumann düzenli olduğundan $a = aba$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. Diğer taraftan $(ab)^2 = abab = ab$ bir eşkare eleman olup $R$ Abelyan olduğundan $ab$ merkezdedir. Buradan $a = (ab)a = a^2b$ elde edilir. Her $a \in R$ için $a$ güçlü düzenli olduğundan $R$ güçlü düzenlidir. ■

# 5. TERSLENEBİLİR VE SİMETRİK HALKALARIN KATI VERSİYONU

Bu bölümde; terslenebilir ve simetrik halkaların diğer bir genelleştirmesi olan $\alpha$-terslenebilir ve $\alpha$-simetrik halkalar çalışılacaktır. Burada $\alpha$ bir halka endomorfizmasıdır.

## 5.1. $\alpha -$ Terslenebilir Halkalar ve $\alpha -$ Simetrik Halkalar

**Tanım 5.1.** [24] $R$ bir halka olsun. Eğer $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için ve $b\alpha(a) = 0$ oluyorsa $R$ ye *sağ $\alpha -$ terslenebilir (right $\alpha -$ reversible) halka* denir. Eğer $ab = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $\alpha(b)a = 0$ oluyorsa $R$ ye *sol $\alpha -$ terslenebilir (left $\alpha -$ reversible) halka* denir. Eğer $R$ hem sağ hem de sol $\alpha -$ terslenebilir ise $R$ ye *$\alpha -$ terslenebilir ($\alpha -$ reversible) halka* denir.

Aşağıda terslenebilir olan ancak $\alpha -$ terslenebilir olmayan bir halka örneği verilmektedir.

**Örnek 5.2.** [24] $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkası bileşensel toplama ve çarpma işlemleriyle göz önüne alınsın. $\alpha : R \to R$ endomorfizması $\alpha\big((a, b)\big) = \big(b, a\big)$ ile tanımlansın. $R$ değişmeli ve indirgenmiş bir halkadır. Dolayısıyla $R$ terslenebilirdir.
$(0, 1), (1, 0) \in R$ için $\big(0, 1\big)\big(1, 0\big) = 0$ olmasına rağmen

$$(1, 0)\, \alpha\big((0, 1)\big) = \big(1, 0\big)\big(1, 0\big) = \big(1, 0\big) \neq 0$$

olduğundan $R$ sağ $\alpha -$ terslenebilir halka değildir. Bu yüzden $R$ $\alpha -$ terslenebilir halka değildir.

**Tanım 5.3.** [9] $R$ bir halka olsun. $a, b \in R$ olmak üzere eğer $a\alpha(b) = 0 \Leftrightarrow ab = 0$ oluyorsa $R$ ye $\alpha -$ *uyumludur* ($\alpha -$ *compatibility*) denir.

Aşağıdaki önermede $\alpha -$ terslenebilir halka ve indirgenmiş halka arasındaki ilişkiye değinilmektedir.

**Önerme 5.4.** [24] $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ indirgenmiş ve $\alpha -$ uyumlu ise bu durumda $R$ $\alpha -$ terslenebilirdir.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ bir indirgenmiş $\alpha -$ uyumlu halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $\alpha -$ uyumluluktan $a\alpha(b) = 0$ ve indirgenmişlikten $\alpha(b)a = 0$ bulunur. O halde $R$ sol $\alpha -$ terslenebilirdir. Diğer taraftan $R$ indirgenmiş olduğundan $ab = 0$ iken $ba = 0$ ve $\alpha -$ uyumluluktan $b\alpha(a) = 0$ elde edilir. O halde $R$ sağ $\alpha -$ terslenebilirdir. $R$ hem sağ hem de sol $\alpha -$ terslenebilir olduğundan $R$ $\alpha -$ terslenebilir halkadır. ∎

Aşağıdaki teoremde terslenebilir ve $\alpha -$ terslenebilir halkalar arasındaki ilişki verilmektedir.

**Teorem 5.5.** [24] $R$ bir $\alpha -$ uyumlu halka olsun. Bu durumda $R$ terslenebilirdir ancak ve ancak $R$; $\alpha -$ terslenebilirdir.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ bir terslenebilir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $R$ terslenebilir olduğundan $ba = 0$ ve $\alpha -$ uyumluluktan $b\alpha(a) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $R$ sağ $\alpha -$ terslenebilir halkadır. Diğer taraftan $\alpha -$ uyumluluktan $ab = 0$ iken $a\alpha(b) = 0$ elde edilir. $R$ terslenebilir olduğundan $\alpha(b)a = 0$ bulunur. Dolasıyla $R$ sol $\alpha -$ terslenebilir halkadır. Bu yüzden $R$; $\alpha -$ terslenebilirdir.
Tersine kabul edelim ki; $R$ bir $\alpha -$ terslenebilir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $R$ sağ $\alpha -$ terslenebilir olduğundan $b\alpha(a) = 0$ ve $\alpha -$ uyumluluktan $ba = 0$ bulunur. O halde $R$ bir terslenebilir halkadır. ∎

**Tanım 5.6.** [9] $R$ bir halka olsun. Eğer $a\alpha(a) = 0$ olacak şekilde her $a \in R$ için $a = 0$ oluyorsa $R$ nin $\alpha-$endomorfizmasına *katıdır (rigid)* denir. Eğer $R$ nin bir katı $\alpha$ endomorfizması varsa $R$ ye $\alpha -$ *katı* ($\alpha -$ *rigid*) *halka* denir.

**Önerme 5.7.** [9] $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ bir $\alpha-$katı halka ise bu durumda $R$ indirgenmiştir.

**İspat**. Öncelikle $\alpha-$katı endomorfizmanın monomorfizma olduğu açıktır. Gerçekten $\alpha(a) = 0$ iken $a\alpha(a) = 0$ olup $\alpha -$ katı endomorfizma olduğundan $a = 0$ bulunur. Böylece $\alpha$ bir monomorfizmadır. Ayrıca eğer $R$ bir $\alpha -$ katı halka ise $R$ indirgenmiştir. Gerçekten $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = 0$ bulunur.

$$a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = a\alpha(a)\alpha(a)\alpha(\alpha(a)) = a\alpha(a)\alpha(a\alpha(a)) = 0$$

olup $R$ $\alpha-$ katı olduğundan $a\alpha(a)=0$ elde edilir. Tekrar $R$ nin $\alpha-$ katı halka olmasından $a=0$ bulunur. Böylece $R$ indirgenmiştir. ■

**Teorem 5.8.** $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ halkası $\alpha-$ katı halka ise bu durumda $R$ halkası $\alpha-$ uyumludur.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ bir $\alpha-$ katı halka ve $a,b\in R$ için $ab=0$ olsun. Önerme 5.7. den $R$ indirgenmiş $ba=0$ buradan $\alpha(ba)=0$ eşitliği soldan $a$ sağdan $\alpha^2(b)$ ile çarpıldığında $a\alpha(ba)\alpha^2(b)=0$ ve

$$a\alpha(b)\alpha(a)\alpha(\alpha(b))=(a\alpha(b))\alpha(a\alpha(b))=0$$

elde edilir. $R$ bir $\alpha-$ katı halka olduğundan $a\alpha(b)=0$ bulunur.
Tersine $a,b\in R$ için $a\alpha(b)=0$ olsun. Bu durumda

$$ba\alpha(ba)=ba\alpha(b)\alpha(a)=0$$

olup $R$ bir $\alpha-$ katı halka olduğundan $ba=0$ ve $R$ indirgenmiş olduğundan $ab=0$ bulunur. O halde $R$ $\alpha$-uyumludur. ■

**Teorem 5.9.** [24] $R$ bir halka olsun. Bu durumda $R$ $\alpha-$ katıdır ancak ve ancak $R$ indirgenmiştir, $\alpha-$ terslenebilirdir ve $\alpha$ bir monomorfizmadır.

**İspat**. $R$ bir $\alpha-$ katı halka ise Önerme 5.7. den $R$ indirgenmiş ve $\alpha$ nın monomorfizma olduğu açıktır. Üstelik Teorem 5.8. ve Önerme 5.4. ten $R$ $\alpha-$ terslenebilirdir. Tersine kabul edelim ki; $R$ indirgenmiş, $\alpha-$ terslenebilir ve $\alpha$ bir monomorfizma olsun. $a\in R$ için $a\alpha(a)=0$ olsun. $R$ sağ $\alpha-$ terslenebilir olduğundan $\alpha(a)\alpha(a)=0$ ve buradan $\alpha(a^2)=0$ bulunur. $\alpha$ monomorfizma olduğundan $a^2=0$ ve $R$ indirgenmiş olduğundan $a=0$ elde edilir. Böylece $R$ bir $\alpha-$ katı halkadır. ■

Aşağıdaki örneklerde Teorem 5.9. da yer alan $\alpha$ endomorfizmasının monomorfizma ve $R$ halkasının indirgenmiş olma şartlarının kaldırılamayacağı verilmektedir.

**Örnek 5.10.** [24] $F$ bir cisim olmak üzere $F$ cismi üzerinde polinom halkası $R=F[x]$ olsun. $\alpha:R\to R$ ve $f(x)\in R$ için $\alpha(f(x))=f(0)$ ile tanımlı $\alpha$ endomorfizması göz önüne alınsın. $R$ değişmeli tamlık bölgesi olduğundan indirgenmiş ve $\alpha-$ terslenebilirdir. $f(x) = x + x^2$, $g(x) = x \in R$ için $\alpha(f(x)) = \alpha(g(x))$ olmasına rağmen $f(x) \neq g(x)$. O halde $\alpha$ bir monomorfizma değildir. Teorem 5.9. dan $R$ bir $\alpha-$ katı halka değildir.

**Örnek 5.11.** Matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemleri altında

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkası göz önüne alınsın.

$$\alpha : R \to R \text{ ve } \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in R \text{ için } \alpha\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

ile tanımlı $\alpha$ endomorfizması düşünülsün. Bu durumda $R$ $\alpha-$ terslenebilirdir. Gerçekten;

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix} \in R$$

için $XY = 0$ olsun. Bu durumda $ac = 0$ ve $bc+ad = 0$ denklemleri elde edilir. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası değişmeli tamlık bölgesi olduğundan $a = 0$ veya $c = 0$ bulunur.

**1. Durum** : $a = 0$ ise $bc = 0$ olup $b = 0$ ve $X = 0$ elde edilir. Buradan $Y\alpha(X) = 0$ ve $\alpha(Y)X = 0$ olup $R$ halkası $\alpha-$ terslenebilirdir.

**2. Durum** : $c = 0$ ise $ad = 0$ olup $d = 0$ ve $Y = 0$ elde edilir. Buradan $Y\alpha(X) = 0$

ve $\alpha(Y)X = 0$ olup $R$ halkası $\alpha-$ terslenebilirdir. Ancak $R$ indirgenmiş değildir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

üstel sıfırlı elemanına sahiptir. Dolayısıyla $R$ $\alpha-$ katı halka değildir.

**Tanım 5.12.** [24]

(1) $R$ bir halka ve $\alpha$; $R$ nin bir endomorfizması olsun. $abc = 0$ olacak şekilde her $a, b, c \in R$ için $ac\alpha(b) = 0$ $(\alpha(b)ac = 0)$ oluyorsa $\alpha$ endomorfizmasına *sağ (sol) simetriktir (right (left) symmetric)* denir.

(2) Eğer $R$ bir sağ (sol) simetrik $\alpha$ endomorfizmaya sahipse $R$ halkasına *sağ (sol)* $\alpha-$ *simetrik (right (left)* $\alpha-$ *symmetric)* denir. Eğer $R$ hem sağ hem de sol $\alpha -$ simetrik ise $R$ ye $\alpha -$ *simetrik (*$\alpha -$ *symmetric)* denir.

Aşağıdaki teorem simetrik ve $\alpha -$ simetrik halkalar arasındaki ilişkiyi verir.

**Teorem 5.13.** [24] $R$ bir $\alpha-$uyumlu halka olsun. Bu durumda $R$ simetriktir ancak ve ancak $R$; $\alpha -$ simetriktir.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ bir simetrik halka ve $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. Kabulden $acb = 0$ olup $\alpha -$ uyumluluktan $ac\alpha(b) = 0$ elde edilir. $R$ bir sağ $\alpha -$ simetrik halkadır. Simetrik halkalar terslenebilir olduğundan $ac\alpha(b) = 0$ iken $\alpha(b)ac = 0$ elde edilir. $R$ bir sol $\alpha -$ simetrik halkadır. O halde $R$ bir $\alpha -$ simetrik halkadır.

Tersine, $R$ bir $\alpha -$ simetrik halka ve $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. Kabulden $ac\alpha(b) = 0$ olup $R$ $\alpha -$ uyumlu olduğundan $acb = 0$ bulunur. O halde $R$ bir simetrik halkadır. ■

Aşağıda $\alpha -$ simetrik ve $\alpha -$ terslenebilir halkalar arasındaki ilişki verilmektedir.

**Önerme 5.14.** [24] Her $\alpha -$ simetrik halka $\alpha -$ terslenebilirdir.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ bir $\alpha -$ simetrik halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $1ab = 0$ ve kabulden $b\alpha(a) = 0$ elde edilir. Böylece $R$ bir sağ $\alpha -$ terslenebilir halkadır. Benzer şekilde $ab = 0$ iken $ab1 = 0$ ve kabulden $\alpha(b)a = 0$ bulunur. O halde $R$ bir sağ $\alpha -$ terslenebilir halkadır. Böylece $R$ bir $\alpha -$ terslenebilir halkadır. ■

**Tanım 5.15.** [24]

(1) $R$ bir halka $\alpha$; $R$ nin bir endomorfizması olsun. $a, b \in R$ olmak üzere eğer $ab = 0$ olması $aR\alpha(b) = 0$ olmasını gerektiriyorsa $\alpha$ ya *yarı-değişmeli (semicommutative)* denir.

(2) Eğer $R$ nin $\alpha -$ yarı-değişmeli bir endomorfizması varsa $R$ ye $\alpha -$ *yarı-değişmeli ($\alpha -$ semicommutative) halka* denir.

**Teorem 5.16.** [24] $R$ bir $\alpha -$ uyumlu halka olsun. Bu durumda $R$ yarı-değişmelidir ancak ve ancak $R$ $\alpha -$ yarı-değişmelidir.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ yarı-değişmeli bir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda kabulden $aRb = 0$ ve $\alpha -$ uyumluluktan olduğundan $aR\alpha(b) = 0$ bulunur. O halde $R$ bir $\alpha -$ yarı-değişmeli halkadır. Şimdi kabul edelim ki; $R$ bir $\alpha -$ yarı-değişmeli halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Kabulden $aR\alpha(b) = 0$ . Bu durumda her $r \in R$ için $ar\alpha(b) = 0$ ve $\alpha -$ uyumluluktan $arb = 0$ bulunur. O halde $aRb = 0$ olup $R$ bir yarı-değişmeli halkadır. ■

**Önerme 5.17.** [24] $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ indirgenmiş ve $\alpha -$ terslenebilir halka ise bu durumda $R$ halkası $\alpha -$ yarı-değişmelidir.

**İspat**. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $R$ bir $\alpha -$ terslenebilir halka olduğundan $\alpha(b)a = 0$ bulunur. Eşitliğin her iki yanı sağdan keyfi bir $c \in R$ ile çarpıldığında $\alpha(b)ac = 0$ ve

$$(ac\alpha(b))^2 = ac\alpha(b)ac\alpha(b) = 0$$

elde edilir.
$R$ indirgenmiş olduğundan $ac\alpha(b) = 0$ olup $R$ bir $\alpha -$ yarı-değişmeli halkadır. ■

## 5.2. Merkezi $\alpha -$ Terslenebilir ve Merkezi $\alpha -$ Simetrik Halkalar

Bu bölümde sırasıyla $\alpha -$ terslenebilir ve $\alpha -$ simetrik halkaların genelleştirmeleri olan yeni halka sınıfları tanıtılmaktadır.

**Tanım 5.18.** [26]

(1) $R$ bir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $b\alpha(a) \in C(R)$ ise $R$, *merkezi sağ $\alpha -$ terslenebilir (central right $\alpha -$ reversible ) halka* denir.

(2) $R$ bir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $\alpha(b)a \in C(R)$ ise $R$, *merkezi sol $\alpha -$ terslenebilir (central left $\alpha -$ reversible ) halka* denir.

(3) Eğer $R$ hem merkezi sağ $\alpha -$ terslenebilir hem de merkezi sol $\alpha -$ terslenebilir ise $R$ ye *merkezi $\alpha -$ terslenebilir (central $\alpha -$ reversible) halka* denir.

Aşağıdaki örnek merkezi sağ $\alpha -$ terslenebilir halka ile merkezi sol $\alpha -$ terslenebilir halka kavramının simetrik olmadığını vermektedir.

**Örnek 5.19.** [26] $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası göz önüne alınsın.

(1) $\alpha$: $R \to R$ ve

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan $R$ nin endomorfizması için

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in R$$

olmak üzere $AB = 0$ olsun. Bu durumda $aa' = 0$, $cc' = 0$ ve

$ab' + bc' = 0$ elde edilir.

Buradan

$$B\alpha(A) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

bulunur.

$0$ (sıfır matrisi) halkanın merkezinde olduğundan $R$ merkezi sağ $\alpha -$ terslenebilirdir. Buna rağmen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

için $AB = 0$ fakat;

$$\alpha(B)A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin C(R).$$

Gerçekten; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $R$ merkezi sol $\alpha -$ terslenebilir değildir.

(2) $\beta$: $R \to R$ ve

$$\beta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan $R$ nin endomorfizması için

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in R$$

olmak üzere $AB = 0$ olsun. Bu durumda $aa' = 0$, $cc' = 0$ ve

$ab' + bc' = 0$ elde edilir. Buradan

$$\beta(B)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c'c \end{pmatrix} = 0$$

bulunur.

0 (sıfır matrisi) halkanın merkezinde olduğundan $R$ merkezi sol $\beta-$ terslenebilirdir.

Buna rağmen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

için $AB = 0$ fakat;

$$B\beta(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin C(R).$$

Gerçekten; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

olup $R$ merkezi sağ $\beta-$ terslenebilir değildir.

**Teorem 5.20.** [26] $R$ bir halka olsun. Eğer $R$; $\alpha-$ terslenebilir ise bu durumda $R$ merkezi $\alpha-$ terslenebilirdir.

**İspat**. $R$ bir $\alpha-$ terslenebilir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Bu durumda $R$ sağ $\alpha-$terslenebilir olduğundan $b\alpha(a) = 0$ ve $R$ sol $\alpha-$terslenebilir olduğundan $\alpha(b)a = 0$ bulunur. Sıfır halkanın merkezinde yer aldığından $R$ merkezi $\alpha-$ terslenebilirdir. ■

Teoremin tersi genelde doğru değildir. Yani merkezi $\alpha -$ terslenebilir olan ancak $\alpha -$ terslenebilir olmayan halkalar vardır.

**Örnek 5.21.** [26] Örnek 3.3. te $S$ halkasının merkezi terslenebilir olduğu gösterildi. $\alpha$: $S \to S$ ve $\alpha(A) = A$ ile tanımlanan $S$ nin $\alpha$ endomorfizması göz önüne alınsın. $A, B \in S$ için $AB = 0$ olsun. Bu durumda $S$ merkezi terslenebilir olduğundan $\alpha(B)A = B\alpha(A) = BA$ olup $BA$ merkezdedir. Buna rağmen

$$A = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix} \in S$$

için $AB = 0$ fakat $\alpha(B)A = BA \neq 0$.
O halde $S$; $\alpha -$ terslenebilir değildir.

Aşağıdaki teoremlerde $\alpha -$ terslenebilir ve merkezi $\alpha -$ terslenebilir halkalar arasındaki ilişkiler verilmektedir.

**Teorem 5.22.** [26] $R$ bir $\alpha-$uyumlu yarı asal halka olsun. Eğer $R$ merkezi $\alpha-$terslenebilir ise bu durumda $R$; $\alpha -$ terslenebilirdir.

**İspat**. $R$ bir merkezi $\alpha-$terslenebilir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $\alpha(b)a$ ve $b\alpha(a)$ merkezdedir. Ayrıca $\alpha -$ uyumluluktan $a\alpha(b) = 0$ ve $\alpha(b)a$ merkezde olduğundan $\alpha(b)aR\alpha(b)a = \alpha(b)a\alpha(b)aR = 0$ elde edilir. $R$ yarı asal olduğundan $\alpha(b)a = 0$ bulunur. Böylece $R$ sol $\alpha -$ terslenebilirdir. Diğer taraftan $ab = 0$ iken $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b) = 0$ ve $\alpha-$uyumluluktan $\alpha(a)b = 0$ bulunur. Buradan $b\alpha(a)$ merkezde olduğundan $b\alpha(a)Rb\alpha(a) = b\alpha(a)b\alpha(a)R = 0$ ve $R$ yarı asal olduğundan $b\alpha(a) = 0$ bulunur. Böylece $R$ sağ $\alpha -$ terslenebilirdir. $R$ hem sağ $\alpha -$ terslenebilir hem de sol $\alpha -$ terslenebilir olduğundan $R$; $\alpha -$ terslenebilirdir. ■

**Teorem 5.23.** [26] $R$ bir sağ (sol) p.p. $\alpha -$ uyumlu halka olsun. Eğer $R$ merkezi $\alpha -$ terslenebilir ise bu durumda $R$; $\alpha -$ terslenebilirdir.

**İspat**. $R$ bir sağ (sol) p.p. $\alpha -$ uyumlu halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $r_R(a) = eR$ olacak şekilde bir $e$ eşkare elemanı vardır. Ayrıca $\alpha -$ uyumluluktan $a\alpha(b) = 0$

bulunur. Üstelik $ae = 0$ ve $\alpha(b) \in r_R(a) = eR$ olduğundan $e\alpha(b) = \alpha(b)$ elde edilir. Buradan $\alpha(b)a = e\alpha(b)a = \alpha(b)ae = 0$ olup $R$ sol $\alpha -$ terslenebilirdir. Benzer ispat sağ $\alpha -$ terslenebilir olması durumunda verilebilir. O halde $R$; $\alpha -$ terslenebilirdir. ■

**Sonuç 5.24.** [26] $R$ bir sağ (sol) devirli quasi-Baer ve $\alpha -$ uyumlu halka olsun. Eğer $R$ merkezi $\alpha -$ terslenebilir ise bu durumda $R$; $\alpha -$ terslenebilirdir.

**İspat**. $R$ bir sağ devirli quasi-Baer halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $\alpha -$ uyumluluktan $a\alpha(b) = 0$ elde edilir. Buradan $\alpha(b) \in r_R(a)$ bulunur. $R$ sağ devirli quasi-Baer olduğundan $r_R(aR) = eR$ olacak şekilde bir $e$ eşkare elemanı vardır. Böylece Teorem 5.23 ten istenen sonuç elde edilir. ■

**Önerme 5.25.** [26] Her tamlık bölgesi merkezi $\alpha -$ terslenebilirdir.

**İspat**. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $R$ tamlık bölgesi olduğundan $a = 0$ ya da $b = 0$.

**1. Durum** $a = 0$ ise $\alpha(a) = 0$ olup $b\alpha(a) = \alpha(b)a = 0$.

**2. Durum** $b = 0$ ise bu durumda $\alpha(b) = 0$ olup $\alpha(b)a = b\alpha(a) = 0$.

Böylece her iki durumda $R$ $\alpha -$ terslenebilir ve $\alpha -$ terslenebilir halkalar merkezi $\alpha -$ terslenebilir olduğundan $R$ merkezi $\alpha -$ terslenebilirdir. ■

Aşağıdaki örnekte tamlık bölgesi olmayan ancak merkezi $\alpha -$ terslenebilir olan bir halka verilmektedir.

**Örnek 5.26.** [26] $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası göz önüne alınsın.
$\alpha : R \to R$ ve

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan $R$ nin endomorfizması için $R$ merkezi $\alpha -$ terslenebilirdir. Gerçekten

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix} \in R$$

için $AB = 0$ olsun.

Buradan $ac = 0$ ve $bc + ad = 0$ denklemleri elde edilir. Bu ise $a = b = 0$ ya da $a = c = 0$ ya da $c = d = 0$. Her bir durumda $\alpha(B)A = B\alpha(A) = 0$ bulunur. O halde $R$ $\alpha-$ terslenebilirdir, yani $R$ merkezi $\alpha-$ terslenebilirdir.

Aşağıdaki önermede merkezi $\alpha-$ terslenebilir halkaların sonlu dik toplamlarının da merkezi $\alpha-$ terslenebilir olduğu gösterilmektedir.

**Önerme 5.27.** [26] $I$ sonlu indeks kümesi olmak üzere $\{R_i\}_{i\in I}$ halkaların bir sınıfı ve $\alpha : R_i \to R_i$ endomorfizma olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $R_i$ merkezi $\alpha-$terslenebilirdir ancak ve ancak $\oplus_{i\in I} R_i$ merkezi $\alpha-$ terslenebilirdir.

**İspat**. Her $i \in I$ için $R_i$ merkezi $\alpha-$ terslenebilir olsun. Ayrıca

$$(a_1, \dots, a_n), (a'_1, \dots, a'_n) \in \oplus_{i\in I} R_i$$

için $(a_1, \dots, a_n)(a'_1, \dots, a'_n) = 0$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $a_i a'_i = 0$ bulunur. Buradan;

(i) Her $i \in I$ için $R_i$ merkezi $\alpha-$ terslenebilir olduğundan $a'_i\alpha(a_i)$ merkezdedir.

$$(a'_1\alpha(a_1), \dots, a'_n\alpha(a_n))$$

elemanı $\oplus_{i\in I} R_i$ halkasında merkezdedir. Yani;

$$(a'_1\alpha(a_1), \dots, a'_n\alpha(a_n)) = (a'_1, \dots, a'_n)(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) = (a'_1, \dots, a'_n)\alpha(a_1, \dots, a_n)$$

merkezdedir.

(ii) Benzer şekilde $\alpha(a'_1, \dots, a'_n)(a_1, \dots, a_n)$ elemanı da $\oplus_{i\in I} R_i$ halkasında merkezdedir.

(i) ve (ii) den $\oplus_{i\in I} R_i$ halkası merkezi $\alpha-$ terslenebilirdir.

Tersine $\oplus_{i\in I}R_i$ halkası merkezi $\alpha -$ terslenebilir ve bir $i \in I$ için $a_i, a'_i \in R_i$ olmak üzere $a_i a'_i = 0$ olsun. Bu durumda

$$(0,\ldots,a_i,0,\ldots,0)(0,\ldots,a'_i,0,\ldots,0) = 0$$

olup kabulden

$$\alpha(0,\ldots,a'_i,0,\ldots,0)(0,\ldots,a_i,0,\ldots)$$

ve

$$(0,\ldots,a'_i,0,\ldots,a'_n)\alpha(0,\ldots,a_i,0,\ldots,0)$$

merkezdedir. Buradan $a'_i\alpha(a_i)$ ve $\alpha(a'_i)a_i$ elemanları $R_i$ halkasında merkezdedir. Böylece $R_i$ merkezi $\alpha -$ terslenebilirdir. ■

Aşağıda bir $R$ halkasının yerelleştirmesi üzerinde merkezi $\alpha -$ terslenebilir olma durumu verilmektedir.

**Önerme 5.28.** [26] $\alpha$ bir epimorfizma olmak üzere $R$ merkezi $\alpha -$ terslenebilirdir ancak ve ancak $S^{-1}R$ merkezi $\alpha -$ terslenebilirdir.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ bir merkezi $\alpha -$ terslenebilir halka ve $a, b \in R$, $r, s \in S$ için $\frac{a}{r}\frac{b}{s} = 0$ olsun. Bu durumda $ab = 0$ olup $b\alpha(a)$ ve $\alpha(b)a$ merkezdedir.

$$\frac{c}{d} \in S^{-1}R$$

için

$$\frac{b}{s}\alpha(\frac{a}{r})\frac{c}{d} = \frac{b\alpha(a)c}{s\alpha(r)d} = \frac{c}{d}\frac{b\alpha(a)}{s\alpha(r)} = \frac{c}{d}\frac{b}{s}\alpha(\frac{a}{r}).$$

Benzer şekilde

$$\frac{c}{d}\alpha(\frac{b}{s})\frac{a}{r} = \alpha(\frac{b}{s})\frac{a}{r}\frac{c}{d}$$

olur. Böylece $S^{-1}R$ merkezi $\alpha -$ terslenebilirdir.

Tersine $S^{-1}R$ bir merkezi $\alpha -$ terslenebilir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda

$$a = \frac{a}{1}, b = \frac{b}{1} \in S^{-1}R$$

ve $\alpha(1) = 1$ alındığında sonuç açıktır. ■

Aşağıda merkezi $\alpha -$ simetrik olarak adlandırılan halkaların yeni bir sınıfı tanıtılmaktadır.

**Tanım 5.29.** [26] $R$ bir halka olsun.

(1) $abc = 0$ olacak şekildeki her $a, b, c \in R$ için $ac\alpha(b)$ merkezde ise $R$ ye *merkezi sağ $\alpha -$ simetrik (central right $\alpha -$ symmetric ) halka* denir.

(2) $abc = 0$ olacak şekildeki her $a, b, c \in R$ için $\alpha(b)ac$ merkezde ise $R$ ye *merkezi sol $\alpha -$ simetrik (central left $\alpha -$ symmetric ) halka* denir.

(3) Eğer $R$ hem merkezi sağ $\alpha -$simetrik hem de merkezi sol $\alpha -$simetrik ise $R$ ye *merkezi $\alpha -$ simetrik (central $\alpha -$ symmetric ) halka* denir.

**Teorem 5.30.** [26] $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ merkezi $\alpha -$ simetrik ise bu durumda $R$ merkezi $\alpha -$ terslenebilirdir.

**İspat**. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $ab = ab1 = 0$ olup $\alpha(b)a1$=$\alpha(b)a$ merkezdedir. Üstelik $1ab = 0$ olup $1b\alpha(a) = b\alpha(a)$ merkezdedir. Böylece $R$ merkezi $\alpha -$ terslenebilir halkadır. ■

**Uyarı 5.31.** Eğer $R$; $\alpha -$ simetrik ise bu durumda $R$ merkezi $\alpha -$ simetriktir.

Aşağıdaki önerme merkezi $\alpha$-simetrik halkaların sonlu dik toplam altında kapalı olduğunu göstermektedir.

**Önerme 5.32.** [26] $I$ sonlu indeks kümesi ve $\{R_i\}_{i\in I}$ halkaların bir sınıfı olsun. $\alpha : R_i \to R_i$ endomorfizma olmak üzere bu durumda her $i \in$ için $R_i$ merkezi $\alpha -$ simetriktir ancak ve ancak $\oplus_{i\in I} R_i$ merkezi $\alpha -$ simetriktir.

**İspat**. Her $i \in I$ için kabul edelim ki; $R_i$ merkezi $\alpha -$ simetrik halka olsun.

$$(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n) \in \oplus_{i\in I} R_i$$

olmak üzere

$$(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n)(c_1, \ldots, c_n) = 0$$

olsun. Bu durumda $(a_1b_1c_1, \ldots, a_nb_nc_n) = 0$ olup buradan her $i \in I$ için $a_ib_ic_i = 0$ bulunur. Kabulden her $i \in I$ için $\alpha(b_i)a_ic_i$ ve $a_ic_i\alpha(b_i)$ merkezdedir. Böylece

$$(\alpha(b_1), \ldots, \alpha(b_n))(a_1, \ldots, a_n)(c_1, \ldots, c_n)$$

ve

$$\alpha(b_1, \ldots, b_n)(a_1, \ldots, a_n)(c_1, \ldots, c_n)$$

merkezdedir. O halde $\oplus_{i\in I} R_i$ halkası merkezi sol $\alpha -$ simetriktir. Benzer şekilde $\oplus_{i\in I} R_i$ nin merkezi sağ $\alpha -$ simetrik olduğu gösterilir. Buradan $\oplus_{i\in I} R_i$ halkası merkezi $\alpha -$ simetriktir. Tersine bir $i \in I$ ve $a_i, b_i, c_i \in R_i$ olmak üzere $a_ib_ic_i = 0$ olsun. Buradan

$$a = (0, \ldots, a_i, \ldots), b = (0, \ldots, b_i, \ldots), c = (0, \ldots, c_i, \ldots) \in \oplus_{i\in I} R_i$$

için $abc = 0$ bulunur. $\oplus_{i\in I} R_i$ halkası merkezi $\alpha -$ simetrik olduğundan $\alpha(b)ac$ ve $ac\alpha(b)$ merkezdedir. Yani $\alpha(b_i)a_ic_i$ ve $a_ic_i\alpha(b_i)$ elemanları $R_i$ halkasında merkezdedir. Böylece $i \in I$ için $R_i$ halkası merkezi $\alpha -$ simetriktir. ■

**Önerme 5.33.** [26] $\alpha$ bir epimorfizma olmak üzere $R$ merkezi $\alpha-$simetriktir ancak ve ancak $S^{-1}R$ merkezi $\alpha -$ simetriktir.

**İspat**. Kabul edelim ki; $R$ bir merkezi $\alpha-$ simetrik halka olsun. $a,b,c\in R$, $r,s,t\in S$ için

$$\frac{a}{r},\frac{b}{s},\frac{c}{t}\in S^{-1} \text{ ve } \frac{a}{r}\frac{b}{s}\frac{c}{t}=0$$

olsun. Buradan $abc=0$ bulunur. $ac\alpha(b)$ ve $\alpha(b)ac$ elemanları $R$ halkasında merkezdedir. $\frac{w}{d}\in S^{-1}R$ için

$$\alpha(\frac{b}{s})\frac{a}{r}\frac{c}{t}\frac{w}{d}=\frac{\alpha(b)ac}{\alpha(s)rt}\frac{w}{d}=\frac{w}{d}\frac{\alpha(b)ac}{\alpha(s)rt}=\frac{w}{d}\alpha(\frac{b}{s})\frac{a}{r}\frac{c}{t}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\frac{w}{d}\frac{a}{r}\frac{c}{t}\alpha(\frac{b}{s})=\frac{a}{r}\frac{c}{t}\alpha(\frac{b}{s})\frac{w}{d}$$

elde edilir. Böylece $S^{-1}R$ merkezi $\alpha-$ simetriktir.

Tersine, kabul edelim ki $S^{-1}R$ bir merkezi $\alpha-$ simetrik halka ve $a,b\in R$ için $ab=0$ olsun. Bu durumda

$$a=\frac{a}{1},b=\frac{b}{1}\in S^{-1}R$$

için $ab=0$ olup sonuç açıktır. ■

# KAYNAKLAR


[1]. Al-Ezeh, H., 1987, On some properties of polynomial rings, *International Journal of Mathematical Society*, 10(2), 311-314.

[2]. Anderson, F.W. and Fuller, K.R., 1992, *Rings and categories of modules*, Graduate Texts in Mathematics, 13, Springer-Verlag, New York, x+376 pp.

[3]. Armendariz, E.P, 1974, A note on extension of Baer and p.p.-rings, *Journal of Algebra,* 319(8), 3128-3140.

[4]. Birkenmeier, G.F., Kim, J.Y. and Park, J.K., 2001, Principally quasi-Baer ring, *Communications in Algebra*, 29(2), 639-660.

[5]. Cohn, P.M., 1999, Reversible rings, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 31(6), 641-648.

[6]. Corter, R.C., 1982, Finite-dimensional right duo algebras are duo, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 84(2), 157-161.

[7]. Gwynne, W.D. and Robson, J.C., 1971, Completions of non-commutative Dedekind prime rings, *Journal of the London Mathematical Society(2)*, 4, 346-352.

[8]. Hashemi, E. and Moussavi, A., 2005, Polynomial extensions of quasi-Baer rings, *Acta Mathematica Hungarica* , 107(3), 207-224.

[9]. Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K., 2000, Ore extensions of Baer and p.p.- rings, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 151(3), 215-226.

[10]. Jacobson, N., 1943, The Theory of Rings, *American Mathematical Society Mathematical Surveys*, Vol. II New York, vi+150pp.

[11]. Kafkas, G., Ungor, B., Halicioglu, S. and Harmanci, A., 2011, Generalized Symmetric rings, *Algebra and Discrete Mathematics*, 12(2), 72-84.

[12]. Khurana, D., Marks, G. and Srivastava, A.K., 2010, On unit-central rings, *Advances in ring theory*, 205-212, Birkhauser/Springer.

[13]. Kim, N.K. and Lee, Y., 2003, Extensions of reversible rings, *Journal of Pure and Applied Algebra* , 185(1-3), 207-223.

[14]. Kose, H., Ungor. B., Halıcıoğlu, S. and Harmanci. A., 2014, A generalization of reversible rings, *Iranian Journal of Science and Technology*, Transaction A. Science, 38(1), 43-48.

[15]. Kwak T.K. and Lee, Y., 2013, Reflexive property on idempotents, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 50(6), 1957-1972.

[16]. Lambek, J., 1971, On the representation of modules by sheaves of factor modules, *Canadian Mathematical Bulletin*, 14(3), 359-368.

[17]. Lambek, J., 1996, *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell Publishing Company.

[18]. Lee, T. K. and Zhou, Y. Q., 2004, Armendariz and reduced rings, *Communications in Algebra*, 32(6), 2287-2299.

[19]. Liang, L., Wang, L. and Liu, Z., 2007, On a generalization of semicommutative rings, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11(5), 1359-1368.

[20]. Liang, Z. and Gang, Y., 2007, On weakly reversible rings, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae (New Series)*, 76(2), 189-192.

[21]. Marks, G., 2002, Reversible and symmetric rings, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 174(3), 311-318.

[22]. Ouyang, L. and Chen, H., 2010, On weak symmetric rings, *Communications in Algebra*, 38(2), 697-713.

[23]. Özen, T., Agayev, N. and Harmanci, A., 2011, On a class of semicommutative rings, *Kyungpook Mathematical Journal*, 51(3), 283-291.

[24]. Pourtaherian, H. and Rakhimov, I.S., 2011, On skew version of reversible rings, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 73(3), 267-280.

[25]. Rege, M.B., Chhawchharia, S., 1997, Armendariz rings, *Japan Academy Proceedings Series A. Mathematical Sciences*, 73(1), 14-17.

[26]. Shabao, A.A., 2016, Generalization of Reversible and Symmetric Rings, Palestine Polytechnic University.

[27]. Shin, G., 1973, Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring, *Transactions of the American Mathematical Society*, 184, 43-60.

[28]. Varma, P. L. N., 1992, On maximal polynomial and Laurent polynomial rings, *Journal of Algebra*, 148, 433-443.

[29]. Zhao, L., Zhu, X. and Gu, Q., 2013, Reflexive rings and their extensions, *Mathematica Slovaca*, 63(3), 417-430.

# ÖZGEÇMİŞ

| **Kişisel Bilgiler** | | |
|---|---|---|
| Adı Soyadı | Ruhi YALÇIN | |
| Doğum Yeri | | |
| Doğum Tarihi | | |
| Uyruğu | T.C. | |
| Telefon | | |
| E-Posta Adresi | | |
| Web Adresi | | |

| **Eğitim Bilgileri** | |
|---|---|
| **Lisans** | |
| Üniversite | Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi |
| Fakülte | Fen Edediyat Fakültesi |
| Bölüm | Matematik |
| Mezuniyet Yılı | 2019 |

| **Yüksek Lisans** | |
|---|---|
| Üniversite | Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi |
| Enstitü | Fen Bilimleri Enstitüsü |
| Anabilim Dalı | Matematik |
| Programı | Tezli Yüksek Lisans |
| Mezuniyet Yılı | 2022 |

| **Makale ve Bildiriler** |
|---|
| 4th International Conference on Pure and Applied Mathematics ICPAM-VAN 2022 June 22-23, 2022 |
| Generalized Semicommutative Rings, submitted. |