



T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**TÜRKİYE'DE AŞILANMANIN COVID-19 KAYNAKLI
ZATÜRRE VAKALARINA ETKİSİNİN
MATEMATİKSEL MODELLERLE İNCELENMESİ**

Fatma KARACA VURAL

DOKTORA TEZİ

KIRŞEHİR / 2022



T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**TÜRKİYE'DE AŞILANMANIN COVID-19 KAYNAKLI
ZATÜRRE VAKALARINA ETKİSİNİN
MATEMATİKSEL MODELLERLE İNCELENMESİ**

Fatma KARACA VURAL

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. İsmail Onur KIYMAZ

KIRŞEHİR / 2022

“Türkiye’de Aşılmanın COVID-19 Kaynaklı Zatürre Vakalarına Etkisinin Matematiksel Modellerle İncelenmesi” adlı bu çalışma, 15.12.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. İsmail Onur KIYMAZ

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Fen Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Fen Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Ali AKBULUT

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Fen Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Recep ŞAHİN

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

Harran Üniversitesi

Eğitim Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatma KARACA VURAL



ÖNSÖZ

Doktora eğitimim boyunca beni destekleyen, yardımlarını ve ilgisini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübeleriyle çalışmama yön veren, bilim insanı olarak yetişmem adına gösterdiği çabadan dolayı her zaman takdir edeceğim kıymetli danışman hocam Prof. Dr. İsmail Onur KIYMAZ'a,

Tez izleme komitesinde yer alan ve engin bilgileriyle çalışmamı daha iyi hale getirmeme yardımcı olan tüm değerli hocalarıma,

Lisans eğitimimden bu yana bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösterip destekleyen, naif duruşuyla örnek olan kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MAK'a,

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik Bölümü'nün tüm öğretim üyelerine ve araştırma görevlilerine,

Bugünlere gelmemde büyük emeği olan, hayatım boyunca beni yalnız bırakmayan, sevgi ve ilgiyle büyüten, sabrını ve fedakarlığını asla esirgemeyen kıymetli anneme ve babama,

Mutluluk ve neşe kaynağım olan ve bu tez çalışmamı kendisine ithaf ettiğim canım oğlum KEREM'e,

Sonsuz teşekkürlerimi sunarım. . .

Aralık, 2022

Fatma KARACA VURAL

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ	viii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ	1
2. BİR SEIR TİPİ BÖLMELİ HASTALIK MODELİ	4
2.1. Temel Özellikler	6
2.1.1. Çözümlerin Pozitifliği ve İnvaryant Bölge	7
2.1.2. Çözümlerin Varlık ve Tekliği	8
2.2. Denge Noktaları	11
2.2.1. Hastalıksız Denge Noktası	11
2.2.2. Endemik Denge Noktası	12
2.3. Kararlılık	15
2.3.1. Hastalıksız Denge Noktasının Kararlılığı	16
2.3.2. Endemik Denge Noktasının Kararlılığı	18
2.4. Temel Üreme Sayısı	21
2.5. SEIPR Modelinin Türkiye Verilerine Göre Nümerik Çözümü	23
2.5.1. Birinci Dönem	24
2.5.2. İkinci Dönem	26
2.6. İnsidans Oranı ve Aşı Etkililiği	27
3. KESİRLİ TÜREVLİ SEIPR HASTALIK MODELİ	29
3.1. Çözümlerin Pozitifliği	31
3.2. Denge Noktaları	32
3.2.1. Hastalıksız Denge Noktası	32
3.2.2. Endemik Denge Noktası	33
3.3. Temel Üreme Sayısı	36

3.4. Kararlılık	38
3.4.1. Hastalısız Denge Noktasının Kararlılığı	38
3.4.2. Endemik Denge Noktasının Kararlılığı	40
3.5. Kesirli Türevli SEIPR Modelinin Türkiye Verilerine Göre Nümerik Çözümü .	43
4. SONUÇ VE GÖZLEMLER	48
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	58



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 2.1. Birinci dönem için (2.2) sisteminden elde edilen p fonksiyonu ile gerçek değerlerin grafikleri	25
Şekil 2.2. İkinci dönem için (2.2) sisteminden elde edilen p fonksiyonu ile gerçek değerlerin grafikleri	27
Şekil 3.1. Birinci dönem verileri kullanılarak Caputo kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri	45
Şekil 3.2. İkinci dönem verileri kullanılarak Caputo kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri	45
Şekil 3.3. Birinci dönem verileri kullanılarak Caputo-Fabrizio kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri	46
Şekil 3.4. İkinci dönem verileri kullanılarak Caputo-Fabrizio kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri	46
Şekil 3.5. Birinci dönem verileri kullanılarak Atangana-Baleanu kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri	47
Şekil 3.6. İkinci dönem verileri kullanılarak Atangana-Baleanu kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri	47

TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 3.1. Birinci dönem verilerine göre kesirli türevli denklemlerden elde edilen RSS değerleri	44
Tablo 3.2. İkinci dönem verilerine göre kesirli türevli denklemlerden elde edilen RSS değerleri	44



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
Δ	: Birim zamanda sağlıklı doğan bireylerin sayısı
μ	: Doğal ölüm oranı (kaba ölüm hızı)
d	: Vaka ölümlülük oranı (vaka ölümlülük hızı)
β	: Hastalığın bulaşım oranı
α	: E bölmesinden I bölmesine geçenlerin oranı
γ	: İyileşme oranı (vaka iyileşme hızı)
R_0	: Temel üreme sayısı
$\Gamma(z)$: Gama fonksiyonu
$E_p(z)$: Mittag-Leffler fonksiyonu
$D^\nu f(t)$: Kesirli türev operatörü
${}^C D_t^\nu f(t)$: Caputo kesirli türev operatörü
${}^{CF} D_t^\nu f(t)$: Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü
${}^{AB} D_t^\nu f(t)$: Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü

Kısaltmalar	Açıklama
S	: Sağlıklı bireylerden oluşan bölme
E	: Taşıyıcı bireylerden oluşan bölme
I	: Hasta bireylerden oluşan bölme
P	: Zatürre (pnömoni) olmuş bireylerden oluşan bölme
R	: İyileşmiş bireylerden oluşan bölme
RSS	: Toplam kare hatalarının kare kökü

ÖZET

DOKTORA TEZİ

TÜRKİYE'DE AŞILANMANIN COVID-19 KAYNAKLI ZATÜRRE VAKALARINA ETKİSİNİN MATEMATİKSEL MODELLERLE İNCELENMESİ

Fatma KARACA VURAL

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsmail Onur KIYMAZ

Bu çalışmada, geliştirilen bir SEIR tipi bölmeli hastalık modeli ile COVID-19 salgınında hastalığın zatürreye evrimi üzerinde aşılamanın etkisi araştırılmıştır. Geliştirilen model için denge noktaları belirlenmiş, kararlılığı incelenmiş ve temel üreme sayısı hesaplanmıştır. Modelin nümerik çözümlerine ulaşmak için T.C. Sağlık Bakanlığı'nın internet sitesinden elde edilen verilerle, her biri 62 gün olan iki dönem esas alınmıştır. Böylece bu iki dönem kıyaslanılarak aşı etkililiği incelenmiştir. Ardından, nümerik çözümlerin grafikleri oluşturulmuş ve gerçek verilerle uyumlulukları irdelenmiştir.

Daha sonra model, genel kesirli türev içeren bir modele dönüştürülerek kesirli modelin denge noktaları ile temel üreme sayısı belirlenmiş ve kararlık incelemesi yapılmıştır. Son olarak bu modelin nümerik çözümleri, aynı veriler kullanılarak, Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevleri için ayrı ayrı elde edilmiş ve farklı kesirli mertebeler için çözümler birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

Aralık 2022, 69 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: COVID-19, SEIR Modeli, Kesirli Türev, Nümerik Çözüm.

ABSTRACT

PhD THESIS

INVESTIGATION OF THE EFFECT OF VACCINATION ON PNEUMONIA CASES CAUSED BY COVID-19 IN TURKEY WITH MATHEMATICAL MODELS

Fatma KARACA VURAL

Kırşehir Ahi Evran University

Institute of Natural and Applied Sciences

Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. İsmail Onur KIYMAZ

In this study, the effect of vaccination on the evolution of the disease to pneumonia in the COVID-19 outbreak was investigated with a developed SEIR-type compartmental disease model. For the developed model, equilibrium points were determined, its stability was examined and the basic reproduction number was calculated. To reach the numerical solutions of the model, two periods of 62 days each were taken with the data obtained from the website of the T.C. Ministry of Health. Thus, the effectiveness of the vaccine was examined by comparing these two periods. Then, the graphs of the numerical solutions were created and their compatibility with the real data was examined.

Afterwards, the model was transformed into a model with general fractional derivatives. Then the equilibrium points of the fractional model and the basic reproduction number were determined and also stability analysis was carried out. Finally, numerical solutions of this model were obtained separately for the fractional derivatives of Caputo, Caputo-Fabrizio and Atangana-Baleanu using the same data, and the solutions for different fractional orders were compared with each other.

November 2022, 69 Pages.

Keywords: COVID-19, SEIR Model, Fractional Derivative, Numerical Solution.

1. GİRİŞ

İnsanlığın varoluşundan bu yana, insanoğlu hastalıklarla mücadele konusunda çok zorlu yollardan geçmiştir. Tarih boyunca insan yaşamının değeri giderek önem kazanmış ve yaşam refahının yükseltilmesi için en başta sağlık bilimlerine önem verilmesi gerektiği anlaşılmıştır. Bu nedenle toplum sağlığı ile ilgili durumları, bunların dağılımlarını, görülme sıklıklarını ve bunları etkileyen faktörleri inceleyen bir tıp bilimi dalı olan epidemiyoloji önem kazanmıştır. Tanımından da anlaşıldığı gibi epidemiyoloji veriler üzerine çalışan bir bilim dalıdır.

Epidemiyolojide bulaşıcı hastalıklar için yapılan çalışmaların tarihsel gelişimine bakılırsa, bulaşıcı hastalıklar için ilk veri araştırması John Graunt'ın "Ölüm Beyanları Üzerine Yapılan Doğal ve Siyasi Gözlemler" adlı kitabında yer almaktadır. Graunt kitabında 1592-1603 yılları arasında Londra'daki ölümlerin sayıları ve ölüm nedenlerini içeren haftalık kayıtları ele almıştır. Bu kayıtlar aracılığıyla Graunt, insanların ölüm nedenlerini analiz ederek çeşitli hastalıklardan kaynaklanan ölümlerin karşılaştırmalı risklerini tahmin etmek için bir yöntem önermiştir.

Geçmişten günümüze kadar olan süreç içerisinde, epidemik hastalıklar toplum sağlığını büyük ölçüde etkileyen önemli bir faktör olmuştur. Epidemik hastalıkların belirli bir popülasyon içinde ortaya çıkması, yayılması, uzun ve kısa vadede sonuçlarının ne olacağı hakkında yorum yapabilmesi büyük önem teşkil etmektedir. Bu noktada epidemiyolojik hastalıkların modellenmesi, salgının toplumdaki seyri hakkında fikir sahibi olunmasına büyük katkı sağlamaktadır.

18. yüzyılda Daniel Bernoulli tarafından geliştirilen bir model, matematiksel epidemiyoloji alanındaki ilk model olarak kabul edilmiştir. Bu modelde, endemik çiçek hastalığına karşı aşılanmanın etkisini tahmin etmek ve yaşam beklentisindeki artışı hesaplayabilmek amaçlanmıştır. Bu model 2022 yılında yapılan bir çalışma ile de genelleştirilmiştir [26].

20. yüzyılın başlarında W.H. Hammer [34] popülasyondaki duyarlı ve enfekte bireylerin sayısına bağlı olarak enfeksiyonun yayılmasının değişeceğini savunmuştur. Böylece bölmeli hastalık modellerinin önemi anlaşılmış ve Kermack ile McKendrick tarafından 1927, 1932 ve 1933 yıllarında yayınlanan makalelerde bulaşıcı hastalıklar için basit bölmeli modeller

tanıtılmıştır [45–47]. Bölmeli modellerin geliştirilmesine yönelik çalışmalar zaman içinde artış göstermiştir. Hethcote'un [36–40] çalışmaları bu gelişmelere temel teşkil etmiştir. Bölmeli hastalık modelleriyle ilgili bazı çalışmalar için bkz. [4–6, 12, 16, 22, 42, 57, 66, 69].

Geçmişte birçok kişi grip, veba, kolera, çiçek hastalığı gibi salgın hastalıklardan hayatını kaybetmiştir. Yakın geçmişte de 2002-2003 SARS, 2005 H5N1 (kuş gribi), 2009 H1N1 (domuz gribi) ve 2014 Ebola salgını baş göstermiştir. Bunun sonucu olarak bulaşıcı hastalıkların yayılmasının takibi ve önlenmesi için çeşitli modellerin geliştirilmesine yönelik bazı çalışmalar yapılmıştır [17, 29, 62, 68, 76, 82]. Özellikle, günümüzde tüm dünyayı etkisi altına alan COVID-19 salgınının ortaya çıkmasıyla birlikte, bu salgın üzerine yapılan çalışmalarda da büyük artış görülmektedir [13, 43, 85].

Bölmeli hastalık modellerinin en basit formu olan SI modeli, HIV/AIDS ve herpes (uçuk) gibi hastalıkları; SIS epidemik modeli, bel soğukluğu, tüberküloz, frengi gibi hastalıkları; SIR epidemik modeli, su çiçeği, kızamık, kabakulak gibi çocukluk hastalıklarını; MSIR epidemik modeli ise yeni doğan bebeklerde anneden gelen pasif bağışıklığın olduğu hastalıkları modellemek için kullanılır. Bu son modelde başa bir M bölmesi eklenerek, anneden gelen bağışıklığa sahip olan bebekler bu bölmede değerlendirilir. Buradan da anlaşıldığı gibi her hastalığın yapısına, hastanın yaş, cinsiyet ve daha pek çok özelliğe göre hastalık modelleri değişkenlik gösterir.

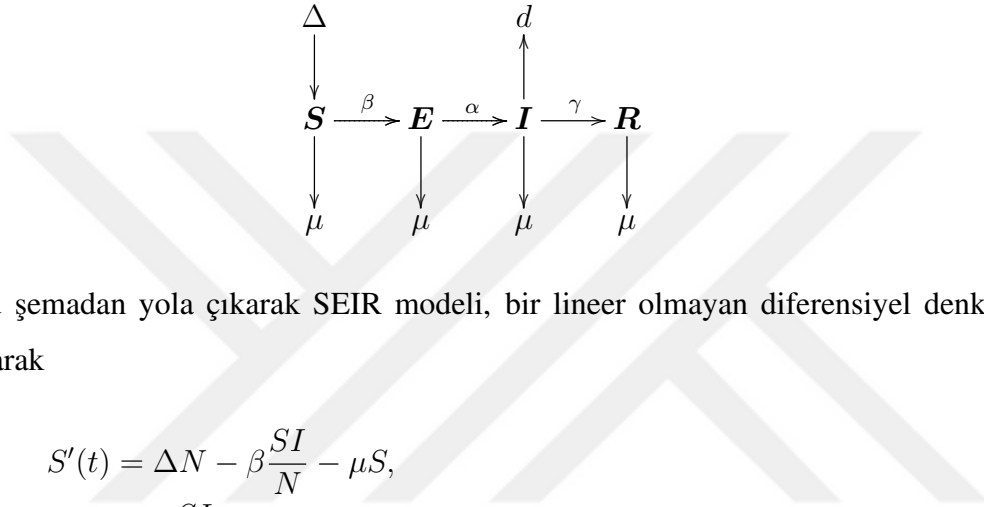
Bu çalışmada incelediğimiz COVID-19 salgını için ise uygun olan temel hastalık modeli SEIR modelidir. Çünkü hastalık bir kuluçka evresine sahiptir. Yukarıda bahsedilen bölmeli modeller üzerine yapılan bazı çalışmalar için bkz. SI: [8, 83]; SIS: [33, 36, 86]; SIR: [5, 7, 8, 28, 32, 44, 45, 49, 52, 61, 63, 72–74]; MSIR: [14, 40]; SEIR: [30, 42, 50, 55, 66, 84].

SEIR modelinde toplam nüfus dört bölüme ayrılmıştır. S (susceptible) hastalığı taşımayan sağlıklı bireylerden oluşan bölme, E (exposed) hastalığa yakalanmış ama hastalık belirtilerini göstermeyen bölme (hastalığın kuluçka evresindeki bölme-taşıyıcı bireylerden oluşan bölme), I (infected) hasta bireylerden oluşan bölme ve son olarak R (recovered) hastalığı geçirmiş, iyileşmiş bireylerden oluşan bölmedir. SEIR modelinde her bir bölmenin kendi içindeki kişi sayısı t zaman değişkenine bağlı olarak $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, $R(t)$ fonksiyonlarıyla ifade edilir. Bu kişi sayılarının zamana göre değişimi ise $S' = \frac{dS}{dt}$, $E' = \frac{dE}{dt}$, $I' = \frac{dI}{dt}$, $R' = \frac{dR}{dt}$ türevleri ile verilir.

Her bir bölme için kişi sayılarındaki zamana göre değişim, bu bölmelere dahil olan kişi sayısından bu bölmelerden ayrılan kişi sayısı çıkarılarak elde edilir. Örneğin S bölgesi için

$$S' = S \text{ bölgesindeki nüfus artışı} - S \text{ bölgesindeki nüfus azalışı}$$

olacaktır. Diğer bölmeler için de benzer eşitlikler geçerlidir. Ayrıca, SEIR bölmeli hastalık modelinde t anındaki toplam nüfus $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ ile verilir. Doğum ve ölümün olduğu bir SEIR salgın modelinin şematik gösterimi aşağıdaki gibidir.



Bu şemadan yola çıkarak SEIR modeli, bir lineer olmayan diferensiyel denklem sistemi olarak

$$S'(t) = \Delta N - \beta \frac{SI}{N} - \mu S,$$

$$E'(t) = \beta \frac{SI}{N} - (\alpha + \mu)E,$$

$$I'(t) = \alpha E - (\gamma + \mu + d)I,$$

$$R'(t) = \gamma I - \mu R,$$

biçiminde yazılabilir. Bu diferensiyel denklem sisteminde kullanılan parametreler sırasıyla,

Δ : Birim zamanda sağlıklı doğan bireylerin sayısı (yeni sağlıklı üye sayısı-kaba doğum hızı),

μ : Doğal ölüm oranı (kaba ölüm hızı),

d : Vaka ölümlülük oranı (vaka ölümlülük hızı),

β : Hastalığın bulaşım oranı,

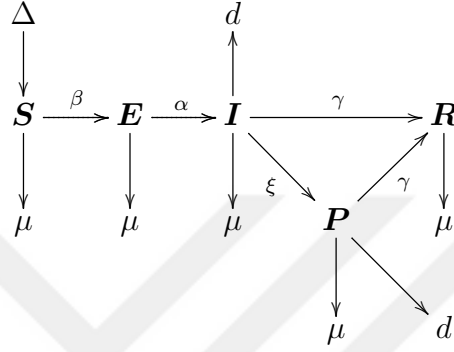
α : E bölgesinden I bölgesine geçenlerin oranı,

γ : İyileşme oranı (vaka iyileşme hızı),

anlamına gelmektedir.

2. BİR SEIR TİPİ BÖLMELİ HASTALIK MODELİ

Bu bölümde sabit olmayan bir popülasyon için SEIR modeline, COVID-19 hastalığından dolayı zatürre (pnömoni) olan insanların olduğu, $P(t)$ bölümü eklenerek elde edilen SEIPR bölme hastalık modeli tanımlanmıştır. SEIPR modelinde toplam nüfus beş bölüme ayrılmıştır. Doğum ve ölümün olduğu bu SEIPR salgın modelinin şematik gösterimi aşağıdadır:



SEIPR modeli oluşturulurken SEIR modelinin parametrelerine ek olarak I bölümünden P bölümüne geçenlerin oranı (hastalığın zatürreye dönme oranı), ξ parametresi ile verilmiştir.

Ayrıca oluşturulan model için aşağıdaki varsayımlar geçerlidir:

- Popülasyonun homojen bir yapıya sahip olduğu ve bireylerin bulaşıcı hastalıklara karşı aynı tepkileri verecekleri, hastalığın iletiminin bireyler arasında doğrudan temas yolu ile yatay olarak gerçekleşeceği ve enfekte olan bireylerin bir gecikme yaşanmadan bulaşıcı olacakları varsayılmıştır.
- Farklı bölmelerdeki bireylerin temas sayısının her bir bölmedeki birey sayısına bağlı olduğu varsayılmıştır. Ayrıca $\frac{I}{N}$, toplumdaki hasta bireylerin tüm topluma oranı olduğundan, $\beta \frac{I}{N}$ oranı (burada β parametresi bireyin hastalığı bulaştırma oranıdır) toplum içindeki bulaşma oranını verir. Böylece tüm toplum içindeki bulaşma sayısı $\beta \frac{SI}{N}$ ile ifade edilir [55].
- Tüm bölmelerdeki bireylerin ya bir sonraki bölmeye geçecekleri ya da hastalık veya doğal yollarla ölecekleri, ayrıca iyileşme gerçekleşikten sonra bireylerin tekrar hasta olmadıkları yani tam bağışıklık kazandıkları varsayılmıştır. Dolayısıyla R bölümünden tekrar S bölümüne geçişin olmadığı kabul edilmiştir.

- d) Bu çalışmada, aşılmanın zatürre üzerindeki etkisini araştırmak için I bölmesinden P bölmesini ayırarak yeni bir model oluşturulmuştur. Ancak T.C. Sağlık Bakanlığının verilerinde zatürre geçiren bireylerin iyileşme oranları hakkında bilgi verilmediği için zatürre geçiren bireylerin iyileşme oranının, I bölmesindeki bireylerin iyileşme oranı (γ) ile aynı olacağı varsayılmıştır.
- e) Epidemiyolojik açıdan kullanılması gereken temel kavram vaka ölümlülük oranıdır (case fatality rate). Bununla birlikte, ülkemizde salgının başında açıklanan sayıların, vaka sayısı değil de hasta sayısı olduğu ilan edilmiştir. Bu sebeple bu oran vaka ölümlülük oranı olarak değil de, “vefat sayısı / hasta sayısı” olarak alınmıştır. Böylece, eldeki veri ile olabilecek en anlamlı ölçüt oluşturulmaya çalışılmıştır [11].

Yukarıdaki varsayımlar altında, SEIPR epidemik modeline karşılık gelen lineer olmayan diferensiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned}
S'(t) &= \Delta N - \beta \frac{SI}{N} - \mu S \\
E'(t) &= \beta \frac{SI}{N} - (\alpha + \mu)E \\
I'(t) &= \alpha E - (\xi + \gamma + d + \mu)I \\
P'(t) &= \xi I - (\gamma + d + \mu)P \\
R'(t) &= \gamma(I + P) - \mu R
\end{aligned} \tag{2.1}$$

biçiminde yazılabilir. Bu modelde $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + R(t)$, t anındaki toplam nüfusu verir.

Buradan, (2.1) denklem sistemindeki denklemler taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dP}{dt} + \frac{dR}{dt} &= \Delta N - \mu(S + E + I + P + R) - d(I + P) \\
\frac{d(S + E + I + P + R)}{dt} &= \Delta N - \mu N - d(I + P) \\
\frac{dN}{dt} &= (\Delta - \mu)N - d(I + P)
\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu toplam nüfusun zamana göre değişimi olup, toplam nüfusun sabit olmadığı görülür.

(2.1) sistemi, populusyondaki nüfus yerine nüfus oranı kullanılarak yeniden yazılabilir. Bunun için $s(t) = \frac{S(t)}{N(t)}$, $e(t) = \frac{E(t)}{N(t)}$, $i(t) = \frac{I(t)}{N(t)}$, $p(t) = \frac{P(t)}{N(t)}$ ve $r(t) = \frac{R(t)}{N(t)}$ değişken değişiklikleri yapılırsa,

$$\begin{aligned}
s'(t) &= \left(\frac{S}{N} \right)' \\
&= \frac{S'N - SN'}{N^2} \\
&= \frac{(\Delta N - \beta \frac{SI}{N} - \mu S)N - S[(\Delta - \mu)N - d(I + P)]}{N^2} \\
&= \Delta \left(1 - \frac{S}{N} \right) + (d - \beta) \frac{SI}{N^2} + d \frac{SP}{N^2} \\
&= \Delta(1 - s) - \beta si + ds(i + p)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer işlemler $e'(t)$, $i'(t)$, $p'(t)$, $r'(t)$ denklemleri için de yapılarak

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \Delta(1 - s) - \beta si + ds(i + p) \\
\frac{de}{dt} &= \beta si - (\alpha + \Delta)e + de(i + p) \\
\frac{di}{dt} &= \alpha e - (\xi + \gamma + d + \Delta)i + di(i + p) \\
\frac{dp}{dt} &= \xi i - (\gamma + d + \Delta)p + dp(i + p) \\
\frac{dr}{dt} &= (\gamma + dr)(i + p) - \Delta r
\end{aligned} \tag{2.2}$$

denklem sistemine ulaşılır. Burada $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + R(t)$ olduğu göz önünde bulundurulursa, $s(t) + e(t) + i(t) + p(t) + r(t) = 1$ olduğu görülecektir.

2.1. Temel Özellikler

Önceki bölümde yeni bir hastalık modeli tanıtılmış ve bu modele karşılık gelen bir lineer olmayan denklem sistemi elde edilmişti. Bu bölümde ise bu modele ait lineer olmayan denklem sisteminin çözümünün bir invaryant bölgede pozitif olduğu gösterilecek ve sistemin çözümlerinin varlık ve teklifi incelenecektir.

2.1.1. Çözümlerin Pozitifliği ve İnvaryant Bölge

Öncelikle invaryant (değişmez) bölge tanımını verelim.

Tanım 2.1. $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$x' = f(x), \quad (2.3)$$

diferensiyel denklemini verilsin. Varsayalım ki $D \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt kümesi ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu, (2.3) denkleminin $x(t, x_0) = x_0$ başlangıç şartını sağlayan çözümünün $t \geq 0$ için var ve $x_0 \in D$ için tek olmasını sağlayacak biçimde olsun. Bu durumda

- eğer $x_0 \in D$ olması $t \geq 0$ için $x(t, x_0) \in D$ olmasını gerektiriyor ise D kümesi (2.3) sistemine göre pozitif invaryant,
- eğer $x_0 \in D$ olması $t \leq 0$ için $x(t, x_0) \in D$ olmasını gerektiriyor ise D kümesi (2.3) sistemine göre negatif invaryant,
- eğer $x_0 \in D$ olması $t \in \mathbb{R}$ için $x(t, x_0) \in D$ olmasını gerektiriyor ise D kümesi (2.3) sistemine göre invaryanttır

denir [56].

Biyolojik olarak, D alt kümesinin pozitif invaryant olması demek, bölmelerin hepsinin birey sayısını temsil ettiği ve negatif olmaması gerektiği düşünülürse, negatif olmayan başlangıç koşullarının negatif olmayan çözümlere yol açması demektir.

D kümesinin pozitif invaryantlığı, her bir koordinat düzleminde sisteme karşılık gelen vektör alanının yönü incelenerek doğrulanabilir. Pozitif invaryantlık için bu yön ya bölgenin sınırına teğet ya da bölgenin içine doğru olmalıdır [56].

Böylece, (2.2) denklem sisteminin çözümünün pozitif olduğunu göstermek için sistemin tüm çözümlerinin $\mathbb{R}_+^5 = \{(s(t), e(t), i(t), p(t), r(t)) \in \mathbb{R}^5 : s \geq 0, e \geq 0, i \geq 0, p \geq 0, r \geq 0\}$ kümesinin elemanı olduğunu göstermek, yani \mathbb{R}_+^5 kümesinin pozitif invaryant olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Bunun için sistemde kullanılan tüm fonksiyon ve parametrelerin biyolojik olarak pozitif olacağı akılda tutularak, \mathbb{R}_+^5 için aşağıdaki hesaplamalar yapılabilir:

- a) $s = 0$ hiperdüzleminde $\frac{ds(t)}{dt}|_{s=0} = \Delta \geq 0$,
- b) $e = 0$ hiperdüzleminde $\frac{de(t)}{dt}|_{e=0} = \beta s(t)i(t) \geq 0$,
- c) $i = 0$ hiperdüzleminde $\frac{di(t)}{dt}|_{i=0} = \alpha e(t) \geq 0$,
- d) $p = 0$ hiperdüzleminde $\frac{dp(t)}{dt}|_{p=0} = \xi i(t) \geq 0$,
- e) $r = 0$ hiperdüzleminde $\frac{dr(t)}{dt}|_{r=0} = \gamma(i(t) + p(t)) \geq 0$.

Buradan, tüm hiperdüzlemlerde vektör alanının yönünün \mathbb{R}_+^5 kümesinin içine doğru olduğu, dolayısıyla \mathbb{R}_+^5 kümesinin pozitif invaryant olduğu görülür. Böylece model için uygun bölge $\mathbf{D} = \{(s, e, i, p, r) : 0 \leq s, 0 \leq e, 0 \leq i, 0 \leq p, 0 \leq r, s + e + i + p + r \leq 1\}$ olarak yazılabilir.

2.1.2. Çözümlerin Varlık ve Tekliği

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, \mathbb{R}^n üzerinde tanımlı vektörler olmak üzere $x'_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i(t_0) = x_{i0}$, $i = 1, 2, \dots, n$ şeklinde bir başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denklem sistemine karşılık gelen vektör notasyonu

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Ω , \mathbb{R}^{n+1} üzerinde bir açık kümesi olmak üzere, $f \in C[\Omega, \mathbb{R}^n]$ olduğunu varsayalım.

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in \Omega \quad (2.5)$$

eşitsizliğini sağlayan bir f fonksiyonuna, “ Ω üzerinde Lipschitz koşulunu sağlıyor” denir. Burada L , Lipschitz sabitidir [70].

Teorem 2.2. (Picard-Lindelöf Teoremi) $f(x, t)$ fonksiyonu, a ve b pozitif reel sabitler olmak üzere, $B_0 : t_0 \leq t \leq t_0 + a, \|x - x_0\| \leq b$ dikdörtgenel bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun ve bölge içinde (2.5) Lipschitz koşulunu sağlasın. $M = \max_{(t,x) \in B_0} \|f(x, t)\|$, $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$ olsun. O halde (2.4) başlangıç değer probleminin $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığında bir tek $x(t)$ çözümü vardır [70].

Buradan, (2.2) denklem sisteminin çözümlerinin var ve tek olduğunu Lipschitz koşulunu sağlatarak gösterilebilir. D bölgesinde

$$\begin{aligned} G_1(X) &= \Delta(1 - s) - \beta si + ds(i + p) \\ G_2(X) &= \beta si - (\alpha + \Delta)e + de(i + p) \\ G_3(X) &= \alpha e - (\xi + \gamma + d + \Delta)i + di(i + p) \\ G_4(X) &= \xi i - (\gamma + d + \Delta)p + dp(i + p) \\ G_5(X) &= (\gamma + dr)(i + p) - \Delta r \end{aligned}$$

olmak üzere $G(X) = (G_1(X), G_2(X), G_3(X), G_4(X), G_5(X))$ dönüşümü yapılsın.

Herhangi bir X ve \bar{X} için

$$\begin{aligned} \|G(X) - G(\bar{X})\| &= |G_1(X) - G_1(\bar{X})| + \dots + |G_5(X) - G_5(\bar{X})| \\ &= |\Delta(1 - s) - \beta si + ds(i + p) - \Delta(1 - \bar{s}) + \beta \bar{s}\bar{i} - d\bar{s}(\bar{i} + \bar{p})| \\ &+ |\beta si - (\alpha + \Delta)e + de(i + p) - \beta \bar{s}\bar{i} + (\alpha + \Delta)\bar{e} - d\bar{e}(\bar{i} + \bar{p})| \\ &+ |\alpha e - (\xi + \gamma + d + \Delta)i + di(i + p) - \alpha \bar{e} + (\xi + \gamma + d + \Delta)\bar{i} - d\bar{i}(\bar{i} + \bar{p})| \\ &+ |\xi i - (\gamma + d + \Delta)p + dp(i + p) - \xi \bar{i} + (\gamma + d + \Delta)\bar{p} - d\bar{p}(\bar{i} + \bar{p})| \\ &+ |(\gamma + dr)(i + p) - \Delta r - (\gamma + d\bar{r})(\bar{i} + \bar{p}) + \Delta \bar{r}| \\ &= |\Delta(s - \bar{s}) + (d - \beta)si - (d - \beta)\bar{s}\bar{i} + (d - \beta)\bar{s}\bar{i} - (d - \beta)\bar{s}\bar{i} + dsp - ds\bar{p} + ds\bar{p} - d\bar{s}\bar{p}| \\ &+ |\beta si - \beta \bar{s}\bar{i} + \beta \bar{s}\bar{i} - \beta \bar{s}\bar{i} + (\alpha + \Delta)(e - \bar{e}) + dei - d\bar{e}\bar{i} + d\bar{e}\bar{i} - d\bar{e}\bar{i} + dep - d\bar{e}\bar{p} + d\bar{e}\bar{p} - d\bar{e}\bar{p}| \\ &+ |\alpha(e - \bar{e}) - (\xi + \gamma + d + \Delta)(i - \bar{i}) + di^2 - d\bar{i}\bar{i} + d\bar{i}\bar{i} - d\bar{i}^2 + dip - d\bar{i}\bar{p} - d\bar{i}\bar{p}| \\ &+ |\xi(i - \bar{i}) - (\gamma + d + \Delta)(p - \bar{p}) + dip - d\bar{i}\bar{p} + d\bar{i}\bar{p} - d\bar{i}\bar{p} + dp^2 - d\bar{p}\bar{p} + d\bar{p}\bar{p} - d\bar{p}^2| \\ &+ |\gamma(i - \bar{i}) + \gamma(p - \bar{p}) + dri - d\bar{r}\bar{i} + d\bar{r}\bar{i} - d\bar{r}\bar{i} + drp - d\bar{r}\bar{p} + d\bar{r}\bar{p} - d\bar{r}\bar{p} - \Delta(r - \bar{r})| \end{aligned}$$

elde edilir.

Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|G(X) - G(\bar{X})\| &\leq \Delta|s - \bar{s}| + d\beta|s||i - \bar{i}| + (d - \beta)|\bar{i}||s - \bar{s}| + d|s||p - \bar{p}| + d|\bar{p}||s - \bar{s}| \\
&+ \beta|s||i - \bar{i}| + \beta|i||s - \bar{s}| + (\alpha + \Delta)|e - \bar{e}| + d|e||i - \bar{i}| + d|\bar{i}||e - \bar{e}| + d|e||p - \bar{p}| \\
&+ d|\bar{p}||e - \bar{e}| + \alpha|e - \bar{e}| + (\xi + \gamma + d + \Delta)|i - \bar{i}| + d|i||i - \bar{i}| + d|\bar{i}||i - \bar{i}| + d|i||p - \bar{p}| \\
&+ d|p||i - \bar{i}| + \xi|i - \bar{i}| + (\gamma + d + \Delta)|p - \bar{p}| + d|i||p - \bar{p}| + d|\bar{p}||i - \bar{i}| + d|p||p - \bar{p}| \\
&+ d|\bar{p}||p - \bar{p}| + \gamma|i - \bar{i}| + \gamma|p - \bar{p}| + d|r||i - \bar{i}| + d|\bar{i}||r - \bar{r}| + d|r||p - \bar{p}| \\
&+ d|\bar{p}||r - \bar{r}| + \Delta|r - \bar{r}|
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan, $s + e + i + p + r \leq 1$ ve $\bar{s} + \bar{e} + \bar{i} + \bar{p} + \bar{r} \leq 1$ olduğu göz önünde bulundurulur ve yine üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|G(X) - G(\bar{X})\| &\leq \Delta|s - \bar{s}| + d\beta|i - \bar{i}| + (d - \beta)|s - \bar{s}| + d|p - \bar{p}| + d|s - \bar{s}| \\
&+ \beta|i - \bar{i}| + \beta|s - \bar{s}| + (\alpha + \Delta)|e - \bar{e}| + d|i - \bar{i}| + d|e - \bar{e}| + d|p - \bar{p}| \\
&+ d|e - \bar{e}| + \alpha|e - \bar{e}| + (\xi + \gamma + d + \Delta)|i - \bar{i}| + d|i - \bar{i}| + d|i - \bar{i}| + d|p - \bar{p}| \\
&+ d|i - \bar{i}| + \xi|i - \bar{i}| + (\gamma + d + \Delta)|p - \bar{p}| + d|p - \bar{p}| + d|i - \bar{i}| + d|p - \bar{p}| \\
&+ d|p - \bar{p}| + \gamma|i - \bar{i}| + \gamma|p - \bar{p}| + d|i - \bar{i}| + d|r - \bar{r}| + d|p - \bar{p}| \\
&+ d|r - \bar{r}| + \Delta|r - \bar{r}| \\
&\leq \Delta|s - \bar{s}| + (\Delta + 2\alpha + 2d)|e - \bar{e}| + (\Delta + (d + 1)\beta + 7d + 2\xi + 2\gamma)|i - \bar{i}| \\
&+ (\Delta + 8d + 2\gamma)|p - \bar{p}| + (\Delta + 2d)|r - \bar{r}| \\
&\leq L\|X - \bar{X}\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$L = \max\{\Delta, \Delta + 2\alpha + 2d, \Delta + (d + 1)\beta + 7d + 2\xi + 2\gamma, \Delta + 8d + 2\gamma, \Delta + 2d\}$$

olmak üzere Lipschitz sabitidir. Yani (2.2) denklem sistemi için Lipschitz koşulu sağlanmış olur. Böylece Picard-Lindelöf teoremi gereği bu denklem sisteminin belli bir aralıkta tek bir çözümü vardır.

2.2. Denge Noktaları

Tanım 2.3. $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$ şartını sağlayan bir (x_0, y_0) noktasına,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{2.6}$$

otonom sisteminin bir denge noktası (kritik noktası) denir [71].

Böylece, (2.2) denklem sisteminin denge noktalarını belirlemek için

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= 0 \\ \frac{de}{dt} &= 0 \\ \frac{di}{dt} &= 0 \\ \frac{dp}{dt} &= 0 \\ \frac{dr}{dt} &= 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

sistemi kullanılır.

2.2.1. Hastaliksız Denge Noktası

(2.2) denklem sisteminin hastaliksız denge noktasını elde etmek için $i(t) = 0$ ve $p(t) = 0$ alınarak

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= 0 \\ \frac{de}{dt} &= 0 \\ \frac{dr}{dt} &= 0\end{aligned}$$

denklem sistemi oluşturulur.

Buradan

$$\frac{de}{dt} = (\alpha + \Delta)e = 0$$

olup $e(t) = 0$ bulunur. Yine

$$\frac{dr}{dt} = -\Delta r = 0$$

olup $r(t) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{ds}{dt} = \Delta(1 - s) = 0$$

olup $s(t) = 1$ olarak bulunur. Böylece (2.2) denklem sisteminin hastalısız denge noktası

$$\widehat{E} = (\widehat{s}, \widehat{e}, \widehat{i}, \widehat{p}, \widehat{r}) = (1, 0, 0, 0, 0)$$

olarak elde edilir.

2.2.2. Endemik Denge Noktası

Bu bölüm boyunca kısalık için

$$K^* = \gamma + d + \Delta, L^* = \alpha + \Delta, M^* = \xi + \gamma + d + \Delta, N^* = \alpha\beta \quad (2.8)$$

olarak alınacaktır. (2.2) denklem sisteminin endemik denge noktasını belirlemek için (2.7) denklem sistemi çözülmelidir. Bunun için dördüncü denklemden

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = 0 &\Rightarrow \xi i - (\gamma + d + \Delta)p + dp(i + p) = 0 \\ &\Rightarrow \xi \tilde{i} - K^* \tilde{p} + d\tilde{p}\tilde{i} + d\tilde{p}^2 = 0 \\ \tilde{i} &= \tilde{p} \frac{K^* - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi} \\ &= \tilde{p} \frac{\gamma + d + \Delta - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi} \end{aligned}$$

$$\tilde{i} = \tilde{p} \frac{\gamma + \Delta + d(1 - \tilde{p})}{d\tilde{p} + \xi}$$

bulunur. Üçüncü denklemden

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} = 0 &\Rightarrow \alpha e - (\xi + \gamma + d + \Delta)i + di(i + p) = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{e} = \tilde{i} \frac{M^* - d(\tilde{p} + \tilde{i})}{\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen $\tilde{i} = \tilde{p} \frac{K^* - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= \tilde{p} \frac{K^* - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi} \frac{[M^* - d(\tilde{p} + \tilde{p} \frac{K^* - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi})]}{\alpha}, \\ &= \tilde{p} \frac{(K^* - d\tilde{p}) [d\tilde{p}(M^* - K^*) + \xi(M^* - d\tilde{p})]}{(d\tilde{p} + \xi) \alpha(d\tilde{p} + \xi)}, \\ &= \tilde{p} \frac{(K^* - d\tilde{p}) [d\tilde{p}(M^* - K^*) + \xi(M^* - d\tilde{p})]}{\alpha(d\tilde{p} + \xi)^2}, \\ &= \frac{\xi\tilde{p}(\xi + \gamma + d + \Delta)(\gamma + d + \Delta - d\tilde{p})}{\alpha(d\tilde{p} + \xi)^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. İlk denklemden

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} = 0 &\Rightarrow \Delta(1 - s) - \beta si + ds(i + p) = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{s} = \frac{\Delta}{(d - \beta)\tilde{i} + d\tilde{p} - \Delta} \end{aligned}$$

olup, yukarıda elde edilen $\tilde{i} = \tilde{p} \frac{K^* - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= \frac{\Delta}{(d - \beta) \left(\frac{K^* - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi} \right) \tilde{p} + d\tilde{p} - \Delta} \\ &= \frac{\Delta}{(d - \beta) \left(\frac{\gamma + \Delta + d - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi} \right) \tilde{p} + d\tilde{p} - \Delta} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Beşinci denklemden

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = 0 &\Rightarrow (\gamma + dr)(i + p) - \Delta r = 0 \\ &\Rightarrow (\gamma + dr)(\tilde{i} + \tilde{p}) = \Delta \tilde{r} \end{aligned}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned}
\tilde{r} &= \frac{\gamma(\tilde{i} + \tilde{p})}{\Delta - d(\tilde{i} + \tilde{p})} \\
&= \frac{\gamma\left(\left[\frac{K^* - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi}\right] + 1\right)\tilde{p}}{\Delta - d\left(\left[\frac{K^* - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi}\right] + 1\right)\tilde{p}} \\
&= \frac{\gamma\left(\frac{K^* + \xi}{d\tilde{p} + \xi}\right)\tilde{p}}{\Delta - d\left(\frac{K^* + \xi}{d\tilde{p} + \xi}\right)\tilde{p}} \\
&= \frac{\gamma\tilde{p}(K^* + \xi)}{d\tilde{p}(\Delta - K^* - \xi) + \Delta\xi} \\
&= \frac{\gamma\tilde{p}(\gamma + d + \Delta + \xi)}{\Delta\xi - d\tilde{p}(\gamma + d + \xi)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca $\frac{di}{dt} + \frac{dp}{dt} = 0$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\alpha\tilde{e} - (\xi + \gamma + d)\tilde{p} + d\tilde{i}(\tilde{i} + \tilde{p}) + \xi\tilde{i} - (\gamma + d + \Delta)\tilde{p} + d\tilde{p}(\tilde{i} + \tilde{p}) &= 0 \\
\Rightarrow \alpha\tilde{e} - K^*(\tilde{i} + \tilde{p}) + d(\tilde{i} + \tilde{p})^2 &= 0 \\
\Rightarrow d(\tilde{i} + \tilde{p})^2 &= K^*(\tilde{i} + \tilde{p}) - \alpha\tilde{e} \\
\Rightarrow d(\tilde{i} + \tilde{p})^2 &= K^*(\tilde{i} + \tilde{p}) - \alpha\tilde{e} \\
\Rightarrow d &= \frac{K^*}{\tilde{i} + \tilde{p}} - \frac{\alpha\tilde{e}}{\tilde{i} + \tilde{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\tilde{e} = \tilde{i} \frac{M^* - d(\tilde{i} + \tilde{p})}{\tilde{i} + \tilde{p}}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
d &= \frac{K^*}{\tilde{i} + \tilde{p}} - \frac{\alpha\tilde{i} \frac{M^* - d(\tilde{i} + \tilde{p})}{\tilde{i} + \tilde{p}}}{\tilde{i} + \tilde{p}} = \frac{K^*}{\tilde{i} + \tilde{p}} - \frac{iM^*}{(\tilde{i} + \tilde{p})^2} + \frac{d\tilde{i}}{\tilde{i} + \tilde{p}} \\
\tilde{i}(M^* - K^*) &= pK^* - d\tilde{p}^2 \left(\frac{K^* + \xi}{d\tilde{p} + \xi} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $\tilde{i} = \tilde{p} \frac{K^* - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi}$ eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{p} \frac{K^* - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi} (M^* - K^*) &= \tilde{p}K^* - d\tilde{p}^2 \left(\frac{K^* + \xi}{d\tilde{p} + \xi} \right) \\
\frac{K^* - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi} (M^* - K^*) &= K^* - d\tilde{p} \left(\frac{K^* + \xi}{d\tilde{p} + \xi} \right) \\
\tilde{p} &= \frac{K^*(M^* - K^* - d - \xi)}{d(\xi + M^* - 2K^*)} = \frac{\gamma + d + \Delta}{\gamma + d + \Delta - 2\xi}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece,

$$\begin{aligned}\tilde{s} &= \frac{\Delta}{(d - \beta)\left(\frac{\gamma + \Delta + d - d\tilde{p}}{d\tilde{p} + \xi}\right)\tilde{p} + d\tilde{p} - \Delta} \\ \tilde{e} &= \frac{\xi\tilde{p}(\xi + \gamma + d + \Delta)(\gamma + d + \Delta - d\tilde{p})}{\alpha(d\tilde{p} + \xi)^2} \\ \tilde{i} &= \tilde{p}\frac{\gamma + \Delta + d(1 - \tilde{p})}{d\tilde{p} + \xi} \\ \tilde{p} &= \frac{\gamma + d + \Delta}{\gamma + d + \Delta - 2\xi} \\ \tilde{r} &= \frac{\gamma\tilde{p}(\gamma + d + \Delta + \xi)}{\Delta\xi - d\tilde{p}(\gamma + d + \xi)}\end{aligned}$$

olmak üzere endemik denge noktası $\tilde{E} = (\tilde{s}, \tilde{e}, \tilde{i}, \tilde{p}, \tilde{r})$ olarak bulunur.

2.3. Kararlılık

Kararlılık analizinde kullanılan yöntemlerden biri lineerleştirilmedir. $D \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f \in C^1$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda bir diferensiyel denklem sistemi

$$x' = f(x) \tag{2.9}$$

biçiminde yazılabilir. Bu sistemin her t için sabit olan ve $x(t) = \hat{x}$ ile gösterilen $x(t)$ çözümüne “sistemin dengesi” denir. Eğer $\hat{x} = 0$ bu sistemin $f(0) = 0$ şartını sağlayan dengesi ise f fonksiyonu Taylor açılımı yardımıyla

$$f(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{F}(x) \tag{2.10}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$, f fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Jakobiyen matrisi ve $\mathbf{A}x$, f fonksiyonunun lineerleştirilmesidir. Bu durumda (2.9) sisteminin $x = 0$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş sistemi

$$\bar{x}' = \mathbf{A}\bar{x} \tag{2.11}$$

ile verilir [56].

Lineerleştirme işleminin bir sonucu olarak aşağıdaki iki teorem verilebilir.

Teorem 2.4. A ve F , (2.10) eşitliğinde verildiği gibi olsun. Eğer $\bar{x} = 0$, (2.11) lineerleştirilmiş sistemi için asimtotik kararlı ise, \hat{x} dengesi de (2.9) nonlinear sistemi için asimtotik kararlıdır [56].

Teorem 2.5. Eğer A matrisinin tüm özdeğerlerinin reel kısımları negatif ise $\bar{x} = 0$ çözümü (2.11) lineer sistemi için asimtotik kararlıdır [56].

Asimptotik kararlılık hakkında daha fazla bilgi için bkz. [58].

2.3.1. Hastaliksız Denge Noktasının Kararlılığı

Lineer olmayan (2.2) denklem sisteminin $\hat{E} = (\hat{s}, \hat{e}, \hat{i}, \hat{p}, \hat{r}) = (1, 0, 0, 0, 0)$ hastaliksız denge noktasındaki kararlılığı için karşılık gelen

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{s}}{dt} &= -\Delta\bar{s} + (d - \beta)\bar{i} + d\bar{p} \\
 \frac{d\bar{e}}{dt} &= -(\alpha + \Delta)\bar{e} + \beta\bar{i} \\
 \frac{d\bar{i}}{dt} &= \alpha\bar{e} - (\xi + \gamma + d + \Delta)\bar{i} \\
 \frac{d\bar{p}}{dt} &= \xi\bar{i} - (\gamma + d + \Delta)\bar{p} \\
 \frac{d\bar{r}}{dt} &= \gamma(\bar{i} + \bar{p}) - \Delta\bar{r}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

lineerleştirilmiş denklem sisteminin Jakobiyen matrisi hesaplanırsa

$$\mathbf{J}(\hat{E}) = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & d - \beta & d & 0 \\ 0 & -(\alpha + \Delta) & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -(\xi + \gamma + d + \Delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -(\gamma + d + \Delta) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \gamma & -\Delta \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$\mathbf{J}(\widehat{\mathbf{E}})$ Jakobiyen matrisinin öz değerleri

$$\det[\mathbf{J}(\widehat{\mathbf{E}}) - \lambda\mathbf{I}] = 0$$

yardımla hesaplanır. Buradan özdeğerler

$$(\Delta + \lambda)^2[(\gamma + d + \Delta) + \lambda] \left\{ [(\alpha + \Delta) + \lambda][(\xi + \gamma + d + \Delta) + \lambda] - \alpha\beta \right\} = 0$$

denklemden elde edilir. Burada (2.8) eşitliği kullanılırsa, denklem

$$(\Delta + \lambda)^2 \left\{ (K^* + \lambda) \left\{ \lambda^2 + (L^* + M^*)\lambda + L^*M^* - N^* \right\} \right\} = 0$$

biçiminde yazılabilir. Böylece $\mathbf{J}(\widehat{\mathbf{E}})$ Jakobiyen matrisinin öz değerleri

$$\lambda_{1,2} = -\Delta$$

$$\lambda_3 = -K^*$$

$$\lambda_{4,5} = \frac{-(L^* + M^*) \mp \sqrt{(L^* + M^*)^2 - 4(L^*M^* - N^*)}}{2}$$

olarak bulunur. Eğer $(L^* + M^*)^2 > 4(L^*M^* - N^*)$ olduğu kabul edilirse Jakobiyen matrisinin tüm özdeğerlerinin birer reel sayı olduğu söylenebilir. Burada tüm parametreler pozitif olduğundan

$$L^* + M^* > 0 \tag{2.13}$$

olduğu ve $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ ve $\lambda_3 < 0$ olacağı aşikardır. Ayrıca eğer

$$|L^* + M^*| > \sqrt{(L^* + M^*)^2 - 4(L^*M^* - N^*)} \tag{2.14}$$

ise, o halde $\lambda_4 < 0$ ve $\lambda_5 < 0$ olur. Dolayısıyla, tüm özdeğerlerin negatif olma şartı sağlanacaktır. Bu şartlar altında, $\widehat{\mathbf{E}} = (1, 0, 0, 0, 0)$ hastaliksız denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.

2.3.2. Endemik Denge Noktasının Kararlılığı

Lineer olmayan (2.2) diferensiyel denklem sisteminin $\tilde{E} = (\tilde{s}, \tilde{e}, \tilde{i}, \tilde{p}, \tilde{r})$ endemik denge noktasının kararlılığını incelemek için karşılık gelen lineerleştirilmiş diferensiyel denklem sisteminin \tilde{E} endemik denge noktasındaki Jakobiyen matrisinin hesaplanması gerekir. Benzer işlemlerle

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{E}}) = \begin{pmatrix} -\Delta + (d - \beta)\tilde{i} + d\tilde{p} & 0 & (d - \beta)\tilde{s} & d\tilde{s} & 0 \\ -\beta\tilde{i} & -L^* + d(\tilde{i} + \tilde{p}) & \beta\tilde{s} + d\tilde{e} & d\tilde{e} & 0 \\ 0 & \alpha & -M^* + 2d\tilde{i} + d\tilde{p} & d\tilde{i} & 0 \\ 0 & 0 & \xi + d\tilde{p} & -K^* + d\tilde{i} + 2d\tilde{p} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma + d\tilde{r} & \gamma + d\tilde{r} & -\Delta + d(\tilde{i} + \tilde{p}) \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Buradan $3I - 4I \rightarrow 3I$ elementer sütun işlemleri yardımıyla,

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{E}}) = \begin{pmatrix} -\Delta + (d - \beta)\tilde{i} + d\tilde{p} & 0 & -\beta\tilde{s} & d\tilde{s} & 0 \\ -\beta\tilde{i} & -L^* + d(\tilde{i} + \tilde{p}) & \beta\tilde{s} & d\tilde{e} & 0 \\ 0 & \alpha & -M^* + d(\tilde{i} + \tilde{p}) & d\tilde{i} & 0 \\ 0 & 0 & M^* - d(\tilde{i} + \tilde{p}) & -K^* + d\tilde{i} + 2d\tilde{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta + d(\tilde{i} + \tilde{p}) \end{pmatrix}$$

sonucuna ulaşılır. Yine matrise $3S + 4S \rightarrow 4S$ işlemleri uygulanırsa

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{E}}) = \begin{pmatrix} -\Delta + (d - \beta)\tilde{i} + d\tilde{p} & 0 & -\beta\tilde{s} & d\tilde{s} & 0 \\ -\beta\tilde{i} & -L^* + d(\tilde{i} + \tilde{p}) & \beta\tilde{s} & d\tilde{e} & 0 \\ 0 & \alpha & -M^* + d\tilde{i} + d\tilde{p} & d\tilde{i} & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -K^* + 2d(\tilde{i} + \tilde{p}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta + d(\tilde{i} + \tilde{p}) \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan özdeğerler için

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \{ -\Delta + (d - \beta)\tilde{i} + d\tilde{p} - \lambda \} \{ d(\tilde{i} + \tilde{p}) - \Delta - \lambda \} \{ -L^* + d(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} \\ & \{ -M^* + d(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} \{ -K^* + 2d(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} \\ & - \alpha d\tilde{e} \{ -M^* + d(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} \\ & - \alpha\beta\tilde{s}(1 - \beta\tilde{i}) \{ -K^* + 2d(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ -\Delta + (d - \beta)\tilde{i} + d\tilde{p} - \lambda \right\} \left\{ d(\tilde{i} + \tilde{p}) - \Delta - \lambda \right\} \left\{ -K^* + 2d(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \right\} \\ \left\{ \left\{ -L^* + d(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \right\} \left\{ -M^* + 2d\tilde{i} + d\tilde{p} - \lambda \right\} - \alpha\beta\tilde{s}(1 - \beta\tilde{i}) \right\} = 0$$

eşitliği elde edilir.

Kısalık için

$$A^* = -\Delta + (d - \beta)\tilde{i} + d\tilde{p},$$

$$B^* = d(\tilde{i} + \tilde{p}) - \Delta,$$

$$C^* = -K^* + 2d(\tilde{i} + \tilde{p}),$$

$$D^* = -L^* + d(\tilde{i} + \tilde{p}),$$

$$E^* = -M^* + d(\tilde{i} + \tilde{p}),$$

alınırsa denklem

$$(A^* - \lambda)(B^* - \lambda) \left\{ (C^* - \lambda)(D^* - \lambda)(E^* - \lambda) - \alpha d \tilde{e} (E^* - \lambda) - \alpha \beta \tilde{s} (1 - \beta \tilde{i}) (C^* - \lambda) \right\} = 0$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Buradan

$$\lambda^5 - \lambda^4(A^* + B^* + C^* + D^* + E^*) + \lambda^3 \left\{ -C^*D^* - E^*(C^* + D^*) \right. \\ \left. - (A^* + B^*)(C^* + D^*) + (A^* + B^*)E^* - A^*B^* + d\tilde{e} + \alpha\beta\tilde{s}(1 - \beta\tilde{i}) \right\} \\ - \lambda^2 \left\{ C^*D^*E^* + (A^* + B^*)C^*D^* + (A^* + B^*)(C^* + D^*)E^* + A^*B^*(C^* + D^*) \right. \\ \left. + A^*B^*E^* - \alpha d \tilde{e} E^* - \alpha \beta \tilde{s} (1 - \beta \tilde{i}) C^* - (A^* + B^*)(\alpha d \tilde{e} E^* - \alpha \beta \tilde{s} (1 - \beta \tilde{i})) \right\} \\ + \lambda \left\{ (A^* + B^*)C^*D^*E^* + (A^* + B^*)(\alpha d \tilde{e} E^* - \alpha \beta \tilde{s} (1 - \beta \tilde{i}) C^*) - A^*B^*C^*D^* \right. \\ \left. - A^*B^*(C^* + D^*)E^* + A^*B^*(\alpha d \tilde{e} E^* - \alpha \beta \tilde{s} (1 - \beta \tilde{i})) \right\} \\ - A^*B^*C^*D^*E^* + A^*B^*(\alpha d \tilde{e} E^* - \alpha \beta \tilde{s} (1 - \beta \tilde{i}) C^*) = 0 \quad (2.15)$$

olacak biçimde 5. dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemden özdeğerleri hesaplamak zor olduğundan dolayı Routh-Hurwitz kriterleri kullanılır. Reel katsayılı bir karakteristik denklemin tüm köklerinin kompleks düzlemin sol yanında kalması için gerek ve yeter şartları veren kriterlere Routh-Hurwitz kriterleri denir. Routh-Hurwitz kriteri nonlineer diferensiyel denklem sisteminin yerel asimtotik kararlılığını belirlemek için kullanılır.

$i = 1, 2, \dots, n$ için a_i katsayılarının reel sabitler olduğu bir

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

polinomu verildiğinde, karakteristik polinomunun a_i katsayılarını kullanarak n -Hurwitz matrisleri aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

ve

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Burada $j > n$ ise $a_j = 0$ olur. Tüm Hurwitz matrislerinin determinantları pozitif ise polinomunun tüm kökleri negatiftir ya da negatif reel kısma sahiptir. Routh-Hurwitz kriterleri $n = 5$ durumu için özetlenirse; eğer

- a) $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, 5.$
- b) $a_1a_2a_3 > a_3^2 + a_1^2a_4$
- c) $(a_1a_4 - a_5)(a_1a_2a_3 - a_3^2 + a_1^2a_4) > a_5(a_1a_2 - a_3)^2(a_1a_5^2)$

şartları sağlanıyorsa verilen sistem kararlıdır [4].

Burada (3.9) denkleminde katsayılar:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(A^* + B^* + C^* + D^* + E^*) \\ a_2 &= C^*D^* - E^*(C^* + D^*) + (A^* + B^*)(C^* + D^*) - (A^* + B^*)E^* + A^*B^* \\ &\quad - d\tilde{e} - \alpha\beta\tilde{s}(1 - \beta\tilde{i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= - \{ C^* D^* E^* + (A^* + B^*) C^* D^* + (A^* + B^*) (C^* + D^*) E^* + A^* B^* (C^* + D^*) \\
&\quad + A^* B^* E^* - \alpha d \tilde{e} E^* - \alpha \beta \tilde{s} (1 - \beta \tilde{i}) C^* - (A^* + B^*) (\alpha d \tilde{e} E^* - \alpha \beta \tilde{s} (1 - \beta \tilde{i})) \} \\
a_4 &= - \{ (A^* + B^*) C^* D^* E^* + (A^* + B^*) (\alpha d \tilde{e} E^* - \alpha \beta \tilde{s} (1 - \beta \tilde{i}) C^*) - A^* B^* C^* D^* \\
&\quad - A^* B^* (C^* + D^*) E^* + A^* B^* (\alpha d \tilde{e} E^* - \alpha \beta \tilde{s} (1 - \beta \tilde{i})) \} \\
a_5 &= - A^* B^* C^* D^* E^* + A^* B^* (\alpha d \tilde{e} E^* - \alpha \beta \tilde{s} (1 - \beta \tilde{i}) C^*)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

2.4. Temel Üreme Sayısı

Temel üreme sayısı bir salgının seyri hakkında ön bilgi vermesi açısından büyük önem taşımaktadır. Epidemiyolojik olarak üreme sayısı, yalnızca duyarlı bireylerden oluşan bir popülasyonda bir bulaşıcı bireyin üreteceği ikincil vakaların sayısını verir [57]. $R_0 > 1$ ise, hastalık popülasyonda kalır. $R_0 < 1$ ise, enfekte olanların sayısı kademeli olarak sıfıra düşer ve hastalık popülasyondan kaybolur [57]. Temel üreme sayısı üzerine yapılan bazı çalışmalar için bkz. [25, 80, 81].

SEIPR salgın modeli için, yeni nesil matris yöntemi kullanılarak hastalısız denge noktasında bir R_0 temel üreme sayısı hesaplanabilir [23, 24, 58, 80].

Yeni nesil matris metodu kullanılırken, incelenen denklem sisteminde virüsün bulunduğu denklemler ele alınır. Bu denklemler hastalısız denge noktası civarında lineerleştirilerek karşılık gelen Jakobiyen matrisi elde edilir. Elde edilen matris, \mathbf{T} bulaşmanın olduğu matrisi \mathbf{V} ise taşınmanın olduğu matrisi göstermek üzere $\mathbf{J} = \mathbf{T} + \mathbf{V}$ şeklinde iki matrisin toplamı olacak şekilde tekrar yazılır. Bu iki matrisden yararlanarak $\mathbf{P} = -\mathbf{T}\mathbf{V}^{-1}$ şeklinde yeni bir \mathbf{P} matrisi elde edilir. \mathbf{P} matrisinin öz değerlerinin en büyüğü incelenen denklem sisteminin temel üreme sayısını verir [23–25, 80].

Yeni nesil matris metodu kullanılarak (2.2) denklem sisteminin temel üreme sayısını bulmak için önce virüsün bulunduğu denklemlerden oluşan sisteme karşılık gelen lineerleştirilmiş halin Jakobiyen matrisi bulunmalıdır.

(2.12) sisteminden virüsün bulunduğu denklemler alınır

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \beta i - L^* e \\ \frac{di}{dt} &= \alpha e - M^* i \\ \frac{dp}{dt} &= \xi i - K^* p\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sisteme karşılık gelen Jakobiyen matrisi

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -L^* & \beta & 0 \\ \alpha & -M^* & 0 \\ 0 & \xi & -K^* \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Şimdi \mathbf{T} ve \mathbf{V} matrislerini sırasıyla bulaşmayı ve taşınmayı gösterecek ve $\mathbf{J} = \mathbf{T} + \mathbf{V}$ şartını sağlayacak biçimde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -L^* & 0 & 0 \\ \alpha & -M^* & 0 \\ 0 & \xi & -K^* \end{pmatrix}$$

matrisleri olarak alalım. Buradan $-\mathbf{T}$ ve \mathbf{V}^{-1} matrisleri

$$-\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L^*} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{L^*M^*} & -\frac{1}{M^*} & 0 \\ -\frac{\alpha\xi}{L^*K^*M^*} & -\frac{\xi}{M^*K^*} & -\frac{1}{K^*} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece $\mathbf{P} = -\mathbf{T}\mathbf{V}^{-1}$ matrisi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{L^*M^*} & \frac{\beta}{M^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır.

\mathbf{P} matrisinin özdeğerleri ise

$$\det[\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}] = \begin{vmatrix} \frac{\alpha\beta}{L^*M^*} - \lambda & \frac{\alpha\beta}{L^*M^*} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \left(\frac{\alpha\beta}{L^*M^*} - \lambda \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{\alpha\beta}{L^*M^*}$$

olarak bulunur. \mathbf{P} matrisinin öz değerlerinin en büyüğü R_0 temel üreme sayısını verir. Yani

$$R_0 = \frac{\alpha\beta}{L^*M^*} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \Delta)(\xi + \gamma + d + \Delta)} \quad (2.16)$$

olacaktır.

2.5. SEIPR Modelinin Türkiye Verilerine Göre Nümerik Çözümü

Bu bölümde, T.C. Sağlık Bakanlığı'nın internet sitesinden alınan 11 Aralık 2020 – 10 Şubat 2021 tarihleri (ilk 62 günlük dönem – birinci dönem) ile 30 Nisan 2021 – 30 Haziran 2021 tarihleri arasındaki (ikinci 62 günlük dönem – ikinci dönem) veriler kullanılarak, oluşturulan SEIPR modeli ile aşının zatürre üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Seçilen dönemlerin 62 günlük olmasını nedeni, incelenen dönemlerin olabildiğince benzer olmasının istenmesi ve popülasyonun istenilen aşılama durumunu ancak bu 62 günlük dönemlerde gerçekleştirmiş olmasındandır. Birinci dönemde bireyler ya aşısızdır ya da ilk aşılarını yaptırmışlardır, ikinci dönemde ise bireyler ya birinci ya da ikinci aşılarını yaptırmışlardır.

Her iki dönemi kapsayan tarih aralığında, T.C. Sağlık Bakanlığı hastalığının bulaşma süresini 20 gün, karantina süresini ise 21 gün olarak belirlemiştir. Bu nedenle çalışmada COVID-19 hastalığının bulaşma süresi $T_0 = 20$ gün olarak alınmıştır. Böylece her iki dönem için iyileşme oranı $\gamma = 1/T_0$ formülü [57] kullanılarak; d değeri T.C. Sağlık Bakanlığı'nın sitesindeki veriler kullanılarak; Δ ve μ değerleri 2019 yılı TÜİK verilerine göre ve α ile ξ parametre değerleri ise verilerde fitleme (en optimal değer bulunması) işlemi yapılarak hesaplanmıştır.

Sistemin yaklaşık çözümü dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile hesaplanmıştır. Tüm hesaplamalar ve grafik çizimleri için Maple ve Mathematica bilgisayar cebri sistemleri kullanılmıştır.

2.5.1. Birinci Dönem

Bu dönem için β bulaşma oranı $s(62) = 818$ alınıp

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\ln \frac{s(0)}{s(62)}}{s(0) - i(0) - s(62)},$$

eşitliği kullanılarak bulunmuştur [57]. Birinci dönem için kullanılan parametre ve başlangıç değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0.0143, & d &= 0.091689, & \beta &= 0.000066, & \gamma &= 0.05, \\ \mu &= 0.0053, & \alpha &= 0.006572, & \xi &= 0.006015, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$s(0) = 825, e(0) = 0.29136, i(0) = 0.05203, p(0) = 0.00161, r(0) = 0.20191. \quad (2.18)$$

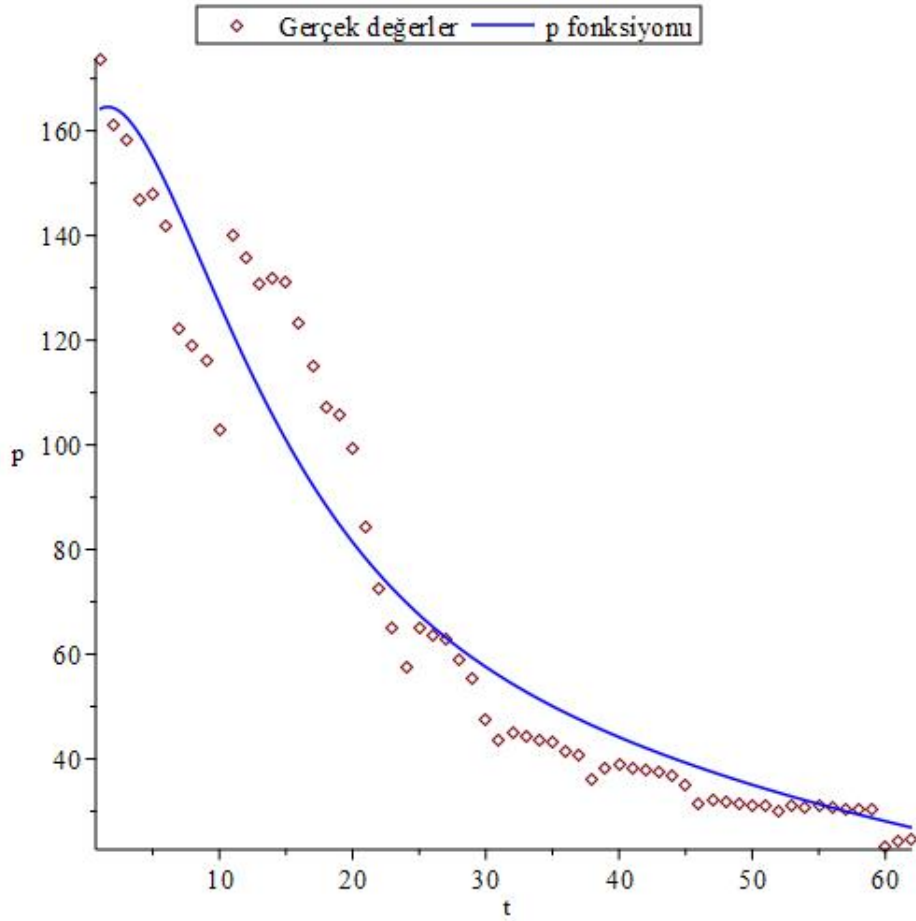
(2.2) denklem sistemi için elde edilen temel üreme sayısı olan

$$R_0 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \Delta)(\xi + \gamma + d + \Delta)}$$

değeri bu verilere göre $R_0 = 0.000127795$ olarak hesaplanmıştır. $R_0 < 1$ olduğundan, (2.2) denklem sistemi $\hat{E} = (1, 0, 0, 0, 0)$ hastalısız denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

Böylece (2.2) sisteminin her çözümü bu denge noktasına yaklaşır ve hastalık popülasyondan kaybolur (bkz. Şekil 2.1).

Temel üreme sayısından bağımsız olarak, (2.13) ve (2.14) ile verilen eşitsizliklerden (2.2) diferensiyel denklem sisteminin $\hat{E} = (1, 0, 0, 0, 0)$ hastalısız denge noktasında kararlı olduğu görülür. Endemik denge noktasının kararlılığı için (2.17) ile verilen parametre değerleri kullanılarak a_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ değerleri hesaplanırsa sırasıyla, $a_1 = -0.549033$, $a_2 = 0.0468099$, $a_3 = 0.0019128$, $a_4 = -0.00279138$ ve $a_5 = 3.40748 \times 10^{-6}$ olarak elde edilir. Buradan, Routh-Hurwitz kriterlerinin sağlanmadığı, yani endemik denge noktasının kararlı olmadığı görülür.



Şekil 2.1. Birinci dönem için (2.2) sisteminden elde edilen p fonksiyonu ile gerçek değerlerin grafikleri

2.5.2. İkinci Dönem

Bu dönem için β bulaşma oranı $s(62) = 789$ alınarak

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\ln \frac{s(0)}{s(62)}}{s(0) - i(0) - s(62)}$$

hesaplanmıştır [57] .

İkinci dönem için kullanılan parametre ve başlangıç değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0.0143, & d &= 0.116803, & \beta &= 0.000063, & \gamma &= 0.05, \\ \mu &= 0.0053, & \alpha &= 0.002082, & \xi &= 0.0087055, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$s(0) = 795, e(0) = 0.31891, i(0) = 0.02673, p(0) = 0.00064, r(0) = 0.68183. \quad (2.20)$$

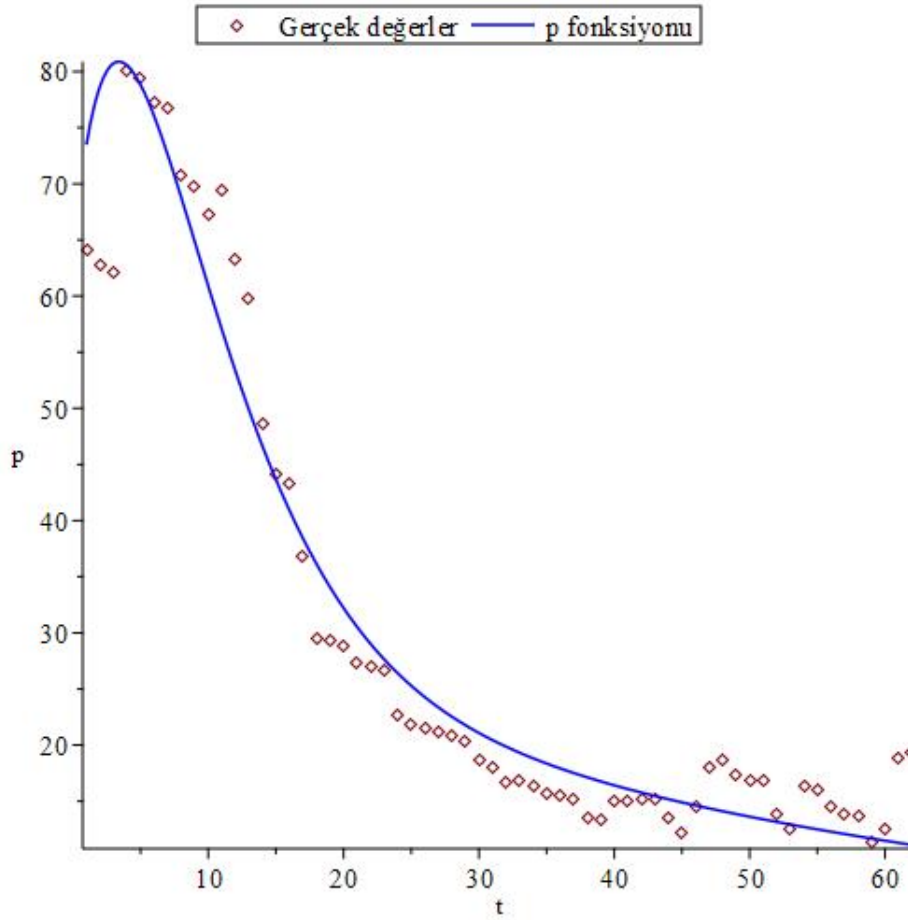
Bu verilere dayanarak, sistem (2.2) için

$$R_0 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \Delta)(\xi + \gamma + d + \Delta)}$$

değeri $R_0 = 0.0000424547$ olarak hesaplanmıştır. $R_0 < 1$ olduğundan, (2.2) denklem sistemi $\hat{E} = (1, 0, 0, 0, 0)$ hastalısız denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır. Böylece (2.2) sisteminin her çözümü bu denge noktasına yaklaşır ve hastalık popülasyondan kaybolur (bkz. Şekil 2.2). Temel üreme sayısından bağımsız olarak, (2.13) ve (2.14) ile verilen eşitsizliklerden (2.2) denklem sisteminin $\hat{E} = (1, 0, 0, 0, 0)$ hastalısız denge noktasında kararlı olduğu görülür.

Endemik denge noktasının kararlılığı için (2.17) ile verilen parametre değerleri kullanılarak a_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ katsayıları hesaplanırsa sırasıyla, $a_1 = -0.650943$, $a_2 = -0.107735$, $a_3 = 0.00340221$, $a_4 = -0.0153772$ ve $a_5 = 8.88063 \times 10^{-6}$ elde edilip yine Routh-Hurwitz kriterlerinin sağlanmadığı görülür. Buradan da endemik denge noktasının kararlı olmadığı görülür.

Uyarı 2.6. Her iki dönem için de hastalısız denge noktasının, R_0 değerinden bağımsız olarak, yerel asimptotik kararlı olduğu (2.13) ve (2.14) denklemlerinden de görülebilir.



Şekil 2.2. İkinci dönem için (2.2) sisteminden elde edilen p fonksiyonu ile gerçek değerlerin grafikleri

2.6. İnsidans Oranı ve Aşı Etkililiği

Bu çalışmada ilk dönem kontrol grubu olarak alınmıştır. Böylece ilk dönemi ikinci dönem ile kıyaslanarak aşının zatürre üzerindeki etkisinin görülmesi amaçlanmıştır. Bunun için öncelikle her dönemin insidans oranı hesaplanmalıdır.

İnsidans; sağlıklı insanların belirli bir süre içinde belirli bir hastalığa yakalanma riskinin bir ölçüsüdür. Belirli bir dönemde belirli bir popülasyonda tespit edilen yeni vaka sayısının, o topluluğun yıl ortasındaki nüfusuna veya risk altındaki kişi sayısına bölünmesiyle elde edilir [78]. Herhangi bir hastalık için insidans oranı formülü aşağıdaki gibidir:

$$\text{İnsidans Oranı} = \frac{\text{Belirli bir zaman dilimindeki yeni hastalık vakalarının sayısı}}{\text{Çalışma süresi boyunca risk altındaki toplam kişi}} \cdot 100$$

Rölatif risk; olası etkene maruz kalanlar içerisinde hastalananların orantısının, etkene maruz kalmayanlar içerisinde hastalananlara orantısına oranlanmasıdır [53]. Bu, etkene maruz kalanların insidans oranının, etkene maruz kalmayanların insidans oranına oranlanmasıyla da hesaplanabilir [53].

Aşı etkililiği; rutin koşullarda sahada uygulanan aşının toplumda bağışıklık kazandırma yüzdesidir [78]. Yeterli etkinliği gösterilmiş ve lisans almış bir aşının bir toplumda uygulanmasıyla ilgili hastalıktan korunma düzeyi, ideal olmayan saha koşullarında, gözlemsel epidemiyolojik çalışmalarla belirlenen “aşı etkililiği” ile ölçülür [35]. Bu nedenle, ikinci aşının popülasyon üzerindeki koruyuculuğunu belirlemek için sadece ikinci aşının aşı etkililiği hesaplanmıştır.

İkinci aşı için aşı etkililiği formülü aşağıdaki gibidir:

$$\text{Aşı Etkililiği} = 1 - \frac{\text{İkinci dönem insidans oranı}}{\text{Birinci dönem insidans oranı}}$$

Bu çalışmada kullanılan verilere göre, ilk dönem insidans oranı 0.005157, ikinci dönem insidans oranı 0.002234, ikinci aşının aşı etkililiği 0.57 ve rölatif risk 0.43 olarak hesaplanmıştır. Bu ikinci dönem aşılılarda birinci dönem aşılılara göre hastalıktan kaynaklı zatürre gelişme riskinin 0.43 kat olduğu anlamına gelir. $0.43 < 1$ olduğu için ikinci aşı hastalığın zatürreye dönüşmesine karşı koruyucudur. Diğer bir ifadeyle ikinci dönemde hastalığın zatürreye dönüşme riski birinci döneme göre %57 daha azdır. Buradan ikinci aşının koruyuculuğunun %57 olduğu söylenebilir.

3. KESİRLİ TÜREVLİ SEIPR HASTALIK MODELİ

Kesirli analiz, matematiğin yeni fakat hızla gelişen bir alanıdır ve bilinen tamsayı basamaklı türev operatörü yerine keyfi basamaklı türev ve buna bağlı integral operatörleri kullanır. Kesirli operatör kavramı çok yeni olmamakla birlikte, kesirli türev ve integral operatörlerinin geometrik ve fiziksel yorumları klasik türev ve integral operatörleri kadar açık olmadığından, üzerine yapılan çalışmalar daha azdır [11, 18, 20, 51, 54, 59, 60, 64, 71, 75, 79].

Kesirli türev için literatürde çeşitli tanımlar verilmiştir. Bunlardan bazıları, Riemann-Liouville Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl, Riesz kesirli türevleridir [41,60,65,67]. Birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen kesirli türev tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları farklılık gösterir [41, 60, 65, 67]. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının olması, problemin türüne göre en uygun olanın kullanılmasını ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar [67].

Son zamanlarda, epidemiyolojik modelleri tanımlamak için kesirli türevler kullanılmıştır ve bazı durumlarda klasik modellere kıyasla daha doğru oldukları kanıtlanmıştır. Literatür incelendiğinde, SIR modeli [7,8,32,44,61,63,73,74], aşılınmış SIR modeli [28,52,72], SIRC modeli [28], SEIR modeli [30,66], MSEIR modeli [9], vb. kesirli türevlerle tanımlanan farklı modellerle karşılaşılabılır.

Bu çalışmada kullanılan bazı kesirli türev operatörlerinin tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.1. (Caputo Kesirli Türevi)

m , $m - 1 < \alpha < m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, α herhangi bir pozitif sayı ve f fonksiyonu da m defa sürekli diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun α . mertebeden Caputo kesirli türevi

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{d\tau^m} f(\tau) d\tau$$

ile tanımlanır [67].

Tanım 3.2. (Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi)

$f \in H^1(0, T)$, $T > 0$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere α . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevi

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(\tau) \exp\left[-\alpha \frac{t-\tau}{1-\alpha}\right] d\tau, \quad t > 0$$

ile verilir. Burada $M(0) = M(1) = 1$ olacak şekilde bir normalizasyon fonksiyonudur [19].

Tanım 3.3. (Atangana-Baleanu Kesirli Türevi)

$f \in H^1(0, T)$, $T > 0$, $\alpha > 0$ ve $t \in (0, 1)$ olmak üzere, α . mertebeden Atangana-Baleanu kesirli türevi

$${}^{AB}D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(\tau) E_\alpha\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^\alpha\right] d\tau$$

ile tanımlanır. Burada $B(0) = B(1) = 1$ olacak şekilde bir normalizasyon fonksiyonudur [10]. Ayrıca $E_\alpha(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonudur ve

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

eşitliği ile verilir [31].

Bu bölümde, SEIPR hastalık modeline karşılık gelen kesirli mertebeden türevli denklem sistemi ele alınacaktır. Bunun için (2.1) ile verilen adi diferensiyel denklem sisteminin sol yanında bulunan adi türevler ν . basamaktan ($0 < \nu \leq 1$) kesirli türev operatörü (D^ν) ile değiştirmiştir. Bu işlem sırasında denklemlerin sağ ve sol yanlarının boyutlarını eşitlemek adına, sistemin sol yanında yer alan denklemlerdeki parametrelerin de ν . dereceden kuvvetleri alınmıştır [6, 69]. Böylece modele karşılık gelen kesirli türevli denklem sistemi

$$\begin{aligned} D^\nu s(\theta) &= \Delta^\nu(1-s) - \beta^\nu si + d^\nu s(i+p) \\ D^\nu e(\theta) &= \beta^\nu si - (\alpha^\nu + \Delta^\nu)e + d^\nu e(i+p) \\ D^\nu i(\theta) &= \alpha^\nu e - (\xi^\nu + \gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu)i + d^\nu i(i+p) \\ D^\nu p(\theta) &= \xi^\nu i - (\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu)p + d^\nu p(i+p) \\ D^\nu r(\theta) &= (\gamma^\nu + d^\nu r)(i+p) - \Delta^\nu r \end{aligned} \tag{3.1}$$

biçiminde yazılabilir. Burada yine $s(\theta) + e(\theta) + i(\theta) + p(\theta) + r(\theta) = 1$ olacaktır.

Burada genel bir kesirli türev operatörü kullanılmasının amacı, 2. Bölümde adi türevli sistem için detaylarıyla anlatılan ve türev operatöründen bağımsız olan bazı özellikleri (çözümlerin pozitifliği, denge noktaları, temel üreme sayısı gibi) her bir kesirli türev operatörü için ayrı ayrı incelememektir. Ancak, her bir kesirli türev operatörü için farklı varlık ve teklik şartları olduğundan genel bir kesirli türev operatörü için inceleme yapılamamış, (3.1) sisteminin çözümlerinin var ve tek olduğu varsayılmıştır. Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevlerine sahip denklemleri için verilen varlık-teklik teoremleri için bkz. [2, 27, 77].

3.1. Çözümlerin Pozitifliği

$\mathbb{R}_+^5 = \{(s(\theta), e(\theta), i(\theta), p(\theta), r(\theta)) \in \mathbb{R}^5 : s \geq 0, e \geq 0, i \geq 0, p \geq 0, r \geq 0\}$ alalım. Tüm parametreleri pozitif olduğu dikkate alınarak, 2.1.1. Bölümde yapılan işlemler (3.1) sistemi için yinelenirse

- a) $s = 0$ hiperdüzleminde $D^\nu s(\theta)|_{s=0} = \Delta^\nu \geq 0$,
- b) $e = 0$ hiperdüzleminde $D^\nu e(\theta)|_{e=0} = \beta^\nu s(\theta)i(\theta) \geq 0$,
- c) $i = 0$ hiperdüzleminde $D^\nu i(\theta)|_{i=0} = \alpha^\nu e(\theta) \geq 0$,
- d) $p = 0$ hiperdüzleminde $D^\nu p(\theta)|_{p=0} = \xi^\nu i(\theta) \geq 0$,
- e) $r = 0$ hiperdüzleminde $D^\nu r(\theta)|_{r=0} = \gamma^\nu (i(\theta) + p(\theta)) \geq 0$.

elde edilir.

O halde \mathbb{R}_+^5 pozitif invaryanttır. Böylece (3.1) ile verilen hastalık modeli için uygun bölge

$$\mathbf{D} = \{(s, e, i, p, r) : 0 \leq s, 0 \leq e, 0 \leq i, 0 \leq p, 0 \leq r, s + e + i + p + r \leq 1\}$$

olacaktır.

3.2. Denge Noktaları

(3.1) denklem sisteminin denge noktalarını belirlemek için sistemdeki denklemlerin sağ tarafları sıfıra eşitlenerek elde edilen

$$\begin{aligned}D^{\nu} s(\theta) &= 0 \\D^{\nu} e(\theta) &= 0 \\D^{\nu} i(\theta) &= 0 \\D^{\nu} p(\theta) &= 0 \\D^{\nu} r(\theta) &= 0\end{aligned}\tag{3.2}$$

sistemi kullanılır.

3.2.1. Hastalısız Denge Noktası

(3.1) denklem sisteminin hastalısız denge noktasını elde etmek için (3.2) sisteminde hastaların bulunduğu bölmeler $i(\theta) = 0$ ve $p(\theta) = 0$ alınarak

$$\begin{aligned}D^{\nu} s(\theta) &= 0 \\D^{\nu} e(\theta) &= 0 \\D^{\nu} p(\theta) &= 0 \\D^{\nu} r(\theta) &= 0\end{aligned}$$

denklem sistemi oluşturulur. Buradan

$$D^{\nu} e(\theta) = \beta^{\nu} s i - (\alpha^{\nu} + \Delta^{\nu}) e + d^{\nu} e(i + p) = 0$$

olup $e(\theta) = 0$ bulunur. Yine

$$D^{\nu} r(\theta) = (\gamma^{\nu} + d^{\nu} r)(i + p) - \Delta^{\nu} r = 0$$

olup $r(\theta) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde

$$D^\nu s(\theta) = \Delta^\nu(1 - s) - \beta^\nu si + d^\nu s(i + p) = 0$$

olup $s(\theta) = 1$ olarak bulunur. Böylece (3.1) denklem sisteminin hastaliksız denge noktası

$$\widehat{F} = (\widehat{s}, \widehat{e}, \widehat{i}, \widehat{p}, \widehat{r}) = (1, 0, 0, 0, 0)$$

olarak elde edilir.

3.2.2. Endemik Denge Noktası

(3.1) denklem sisteminin endemik denge noktası (3.2) denklem sistemi çözülerek bulunur.

Tezin bu bölümünde kısalık için

$$\begin{aligned} K^\diamond &= \gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu, \\ L^\diamond &= (\alpha^\nu + \Delta^\nu), \\ M^\diamond &= \xi^\nu + \gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu, \\ N^\diamond &= \alpha^\nu \beta^\nu \end{aligned} \tag{3.3}$$

olarak alınacaktır. Böylece dördüncü denklemden

$$\begin{aligned} D^\nu p(\theta) = 0 &\Rightarrow \xi^\nu i - (\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu)p + d^\nu p(i + p) = 0 \\ &\Rightarrow \xi^\nu \tilde{i} - K^\diamond \tilde{p} + d^\nu \tilde{p} \tilde{i} + d^\nu \tilde{p}^2 = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{i} = \tilde{p} \frac{K^\diamond - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \\ &= \tilde{p} \frac{\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \\ &= \tilde{p} \frac{\gamma^\nu + \Delta^\nu + d^\nu(1 - \tilde{p})}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \end{aligned}$$

bulunur.

Üçüncü denklemden

$$\begin{aligned} D^\nu i(\theta) = 0 &\Rightarrow \alpha^\nu e - (\xi^\nu + \gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu)i + d^\nu i(i+p) = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{e} = \tilde{i} \frac{M^\diamond - d^\nu(\tilde{p} + \tilde{i})}{\alpha^\nu} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen $\tilde{i} = \tilde{p} \frac{K^\diamond - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= \tilde{p} \frac{K^\diamond - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \frac{[M^\diamond - d^\nu(\tilde{p} + \tilde{p} \frac{K^\diamond - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu})]}{\alpha^\nu}, \\ &= \tilde{p} \frac{(K^\diamond - d^\nu \tilde{p}) [d^\nu \tilde{p}(k_2 - K^\diamond) + \xi^\nu(M^\diamond - d^\nu \tilde{p})]}{(d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu) \alpha^\nu (d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu)}, \\ &= \tilde{p} \frac{(K^\diamond - d^\nu \tilde{p}) [d^\nu \tilde{p}(M^\diamond - K^\diamond) + \xi^\nu(M^\diamond - d^\nu \tilde{p})]}{\alpha^\nu (d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu)^2}, \\ &= \frac{\xi^\nu \tilde{p} (\xi^\nu + \gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu) (\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu - d^\nu \tilde{p})}{\alpha^\nu (d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu)^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. İlk denklemden

$$\begin{aligned} D^\nu s(\theta) = 0 &\Rightarrow \Delta^\nu(1-s) - \beta^\nu si + d^\nu s(i+p) = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{s} = \frac{\Delta^\nu}{(d^\nu - \beta^\nu)\tilde{i} + d^\nu \tilde{p} - \Delta^\nu} \end{aligned}$$

olup, yukarıda elde edilen $\tilde{i} = \tilde{p} \frac{K^\diamond - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= \frac{\Delta^\nu}{(d^\nu - \beta^\nu) \left(\frac{K^\diamond - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \right) \tilde{p} + d^\nu \tilde{p} - \Delta^\nu} \\ &= \frac{\Delta^\nu}{(d^\nu - \beta^\nu) \left(\frac{\gamma^\nu + \Delta^\nu + d^\nu - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \right) \tilde{p} + d^\nu \tilde{p} - \Delta^\nu} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Beşinci denklemden

$$\begin{aligned} D^\nu r(\theta) = 0 &\Rightarrow (\gamma^\nu + d^\nu r)(i+p) - \Delta^\nu r = 0 \\ &\Rightarrow (\gamma^\nu + d^\nu r)(\tilde{i} + \tilde{p}) = \Delta^\nu \tilde{r} \end{aligned}$$

olup, buradan

$$\tilde{r} = \frac{\gamma^\nu(\tilde{i} + \tilde{p})}{\Delta^\nu - d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p})}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{r} &= \frac{\gamma^\nu \left(\left[\frac{K^\diamond - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \right] + 1 \right) \tilde{p}}{\Delta^\nu - d^\nu \left(\left[\frac{K^\diamond - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \right] + 1 \right) \tilde{p}} \\
&= \frac{\gamma^\nu \left(\frac{K^\diamond + \xi^\nu}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \right) \tilde{p}}{\Delta^\nu - d^\nu \left(\frac{K^\diamond + \xi^\nu}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \right) \tilde{p}} \\
&= \frac{\gamma^\nu \tilde{p} (K^\diamond + \xi^\nu)}{d^\nu \tilde{p} (\Delta^\nu - K^\diamond - \xi^\nu) + \Delta^\nu \xi^\nu} \\
&= \frac{\gamma^\nu \tilde{p} (\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu + \xi^\nu)}{\Delta^\nu \xi^\nu - d^\nu \tilde{p} (\gamma^\nu + d^\nu + \xi^\nu)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Ayrıca $D^\nu i(\theta) + D^\nu p(\theta) = 0$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\alpha^\nu \tilde{e} - (\xi^\nu + \gamma^\nu + d^\nu) \tilde{p} + d\tilde{i}(\tilde{i} + \tilde{p}) + \xi^\nu \tilde{i} - (\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu) \tilde{p} + d^\nu \tilde{p}(\tilde{i} + \tilde{p}) &= 0 \\
\alpha^\nu \tilde{e} - K^\diamond(\tilde{i} + \tilde{p}) + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p})^2 &= 0 \\
d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p})^2 = K^\diamond(\tilde{i} + \tilde{p}) - \alpha^\nu \tilde{e} \\
d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p})^2 = K^\diamond(\tilde{i} + \tilde{p}) - \alpha^\nu \tilde{e} \\
d^\nu &= \frac{K^\diamond}{\tilde{i} + \tilde{p}} - \frac{\alpha^\nu \tilde{e}}{\tilde{i} + \tilde{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $\tilde{e} = \frac{\tilde{i}^{M^\diamond - d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p})}}{\tilde{i} + \tilde{p}}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
d &= \frac{K^\diamond}{\tilde{i} + \tilde{p}} - \frac{\alpha^\nu \tilde{i}^{M^\diamond - d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p})}}{\tilde{i} + \tilde{p}} = \frac{K^\diamond}{\tilde{i} + \tilde{p}} - \frac{iM^\diamond}{(\tilde{i} + \tilde{p})^2} + \frac{d^\nu \tilde{i}}{\tilde{i} + \tilde{p}} \\
\tilde{i}(M^\diamond - K^\diamond) &= pK^\diamond - d^\nu \tilde{p}^2 \left(\frac{K^\diamond + \xi}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $\tilde{i} = \tilde{p} \frac{K^\diamond - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu}$ eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{p} \frac{K^\diamond - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} (M^\diamond - K^\diamond) &= \tilde{p} K^\diamond - d\tilde{p}^2 \left(\frac{K^\diamond + \xi}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \right) \\
\frac{K^\diamond - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} (M^\diamond - K^\diamond) &= K^\diamond - d^\nu \tilde{p} \left(\frac{K^\diamond + \xi}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \right) \\
\tilde{p} &= \frac{K^\diamond (M^\diamond - K^\diamond - d^\nu - \xi^\nu)}{d^\nu (\xi^\nu + M^\diamond - 2K^\diamond)} = \frac{\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu}{\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu - 2\xi^\nu}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece,

$$\begin{aligned}\tilde{s} &= \frac{\Delta^\nu}{(d^\nu - \beta^\nu) \left(\frac{\gamma^\nu + \Delta^\nu + d^\nu - d^\nu \tilde{p}}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \right) \tilde{p} + d^\nu \tilde{p} - \Delta^\nu} \\ \tilde{e} &= \frac{\xi^\nu \tilde{p} (\xi^\nu + \gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu) (\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu - d^\nu \tilde{p})}{\alpha^\nu (d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu)^2} \\ \tilde{i} &= \tilde{p} \frac{\gamma^\nu + \Delta^\nu + d^\nu (1 - \tilde{p})}{d^\nu \tilde{p} + \xi^\nu} \\ \tilde{p} &= \frac{\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu}{\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu - 2\xi^\nu} \\ \tilde{r} &= \frac{\gamma^\nu \tilde{p} (\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu + \xi^\nu)}{\Delta^\nu \xi^\nu - d^\nu \tilde{p} (\gamma^\nu + d^\nu + \xi^\nu)}\end{aligned}$$

olmak üzere endemik denge noktası $\tilde{F} = (\tilde{s}, \tilde{e}, \tilde{i}, \tilde{p}, \tilde{r})$ olarak bulunur.

3.3. Temel Üreme Sayısı

Kesirli türevli SEIPR salgın modeli için, yeni nesil matris yöntemi kullanılarak hastalısız denge noktasında R_0 temel üreme sayısı hesaplanabilir [23, 58]. Bunun için

$$D^\nu e(\theta) = \beta^\nu si - (\alpha^\nu + \Delta^\nu)e + d^\nu e(i + p)$$

$$D^\nu i(\theta) = \alpha^\nu e - (\xi^\nu + \gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu)i + d^\nu i(i + p)$$

$$D^\nu p(\theta) = \xi^\nu i - (\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu)p + d^\nu p(i + p)$$

denklemlerinin $\hat{F} = (\hat{s}, \hat{e}, \hat{i}, \hat{p}, \hat{r}) = (1, 0, 0, 0, 0)$ hastalısız denge noktası için Jakobiyen matrisi

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -L^\diamond & \beta^\nu & 0 \\ \alpha^\nu & -M^\diamond & 0 \\ 0 & \xi^\nu & -K^\diamond \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur.

\mathbf{T} ve \mathbf{V} , $\mathbf{J} = \mathbf{T} + \mathbf{V}$ şartını sağlayan, sırasıyla, bulaşmayı ve taşınmayı gösterecek şekilde iki matris olsun.

Böylece,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \beta^\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -L^\diamond & 0 & 0 \\ \alpha^\nu & -M^\diamond & 0 \\ 0 & \xi^\nu & -K^\diamond \end{pmatrix}$$

biçiminde alınır. Buradan

$$-\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta^\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L^\diamond} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha^\nu}{L^\diamond M^\diamond} & -\frac{1}{M^\diamond} & 0 \\ -\frac{\alpha^\nu \xi^\nu}{L^\diamond K^\diamond M^\diamond} & -\frac{\xi^\nu}{M^\diamond K^\diamond} & -\frac{1}{K^\diamond} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $\mathbf{P} = -\mathbf{T}\mathbf{V}^{-1}$ matrisi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^\nu \beta^\nu}{L^\diamond M^\diamond} & \frac{\beta^\nu}{M^\diamond} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. \mathbf{P} matrisinin özdeğerleri ise,

$$\det[\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}] = \begin{vmatrix} \frac{\alpha^\nu \beta^\nu}{L^\diamond M^\diamond} - \lambda & \frac{\alpha^\nu \beta^\nu}{L^\diamond M^\diamond} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda^2 \left(\frac{\alpha^\nu \beta^\nu}{L^\diamond M^\diamond} - \lambda \right) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 &= \frac{\alpha^\nu \beta^\nu}{L^\diamond M^\diamond} \end{aligned}$$

olarak bulunur. \mathbf{P} matrisinin öz değerlerinin en büyüğü R_0 temel üreme sayısını verir. Yani

$$R_0 = \frac{\alpha^\nu \beta^\nu}{L^\diamond M^\diamond} = \frac{\alpha^\nu \beta^\nu}{(\alpha^\nu + \Delta^\nu)(\xi^\nu + \gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu)} \quad (3.4)$$

olacaktır.

3.4. Kararlılık

Tanım 3.4. $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere aşağıdaki denklem sistemini ele alalım:

$$D^\alpha x(t) = f(x, y), \quad D^\alpha y(t) = g(x, y). \quad (3.5)$$

Denge noktasının çözümleri $f(x_{eq}, y_{eq}) = 0, g(x_{eq}, y_{eq}) = 0$ ile tanımlıdır ve eğer denge noktasındaki

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Jakobiyen matrisin λ özdeğerlerinin hepsi

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2} \quad (3.6)$$

şartını sağlarsa sistem yerel asimptotik kararlıdır [3].

3.4.1. Hastalısız Denge Noktasının Kararlılığı

SEIPR hastalık modeli için $\hat{F} = (1, 0, 0, 0, 0)$ hastalısız denge noktasının kararlılığını inceleyelim.

(3.1) denklem sisteminin hastaliksız denge noktasında $s = 1$ olduğu göz önünde bulundurulursa bu noktadaki Jakobiyen matrisi

$$\mathbf{J}(\widehat{\mathbf{F}}) = \begin{pmatrix} -\Delta^\nu & 0 & d^\nu - \beta^\nu & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha^\nu + \Delta^\nu) & \beta^\nu & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^\nu & -(\xi^\nu + \gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^\nu & -(\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^\nu & \gamma^\nu & -\Delta^\nu \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir. $\mathbf{J}(\widehat{\mathbf{F}})$ Jakobiyen matrisinin öz değeri

$$\det[\mathbf{J}(\widehat{\mathbf{F}}) - \lambda I] = 0$$

yardımıyla hesaplanır. Buradan

$$\begin{vmatrix} -\Delta^\nu - \lambda & 0 & d^\nu - \beta^\nu & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha^\nu + \Delta^\nu) - \lambda & \beta^\nu & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^\nu & -(\xi^\nu + \gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^\nu & -(\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^\nu & \gamma^\nu & -\Delta^\nu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olup, öz değeri

$$(\Delta^\nu + \lambda)^2 [(\gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu) + \lambda] \left\{ [(\alpha^\nu + \Delta^\nu) + \lambda][(\xi^\nu + \gamma^\nu + d^\nu + \Delta^\nu) + \lambda] - \alpha^\nu \beta^\nu \right\} = 0$$

denklemden elde edilir. Burada (3.3) eşitliği kullanılarak

$$(\Delta^\nu + \lambda)^2 \left\{ K^\diamond + \lambda \right\} \left\{ \lambda^2 + (L^\diamond + M^\diamond)\lambda + L^\diamond M^\diamond - N^\diamond \right\} = 0$$

biçiminde yazılabilir. Böylece $\mathbf{J}(\widehat{\mathbf{F}})$ Jakobiyen matrisinin öz değeri

$$\lambda_{1,2} = -\Delta^\nu$$

$$\lambda_3 = -K^\diamond$$

$$\lambda_{4,5} = \frac{-(L^\diamond + M^\diamond) \mp \sqrt{(L^\diamond + M^\diamond)^2 - 4(L^\diamond M^\diamond - N^\diamond)}}{2}$$

olarak bulunur. Eğer $(L^\diamond + M^\diamond)^2 > 4(L^\diamond M^\diamond - N^\diamond)$ olduğu kabul edilirse, Jakobiyen matrisin tüm özdeğerlerinin bir reel sayı olduğu görülür. Burada Δ^ν , γ^ν ve d^ν birer pozitif reel sayı olduğundan dolayı $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ ve $\lambda_3 < 0$ olacaktır. Böylece

$$L^\diamond + M^\diamond > 0 \quad (3.7)$$

olduğu aşıkardır. Eğer

$$|L^\diamond + M^\diamond| > \sqrt{(L^\diamond + M^\diamond)^2 - 4(L^\diamond M^\diamond - N^\diamond)} \quad (3.8)$$

ise o halde $\lambda_4 < 0$ ve $\lambda_5 < 0$ olur. Dolayısıyla, özdeğerler $\lambda_i < 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$ olduğundan dolayı $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ şartını sağlayacaktır. Böylece \hat{F} hastalısız denge noktası yerel asimptotik kararlıdır sonucuna ulaşılır.

3.4.2. Endemik Denge Noktasının Kararlılığı

Lineer olmayan (3.1) denklem sisteminin $\tilde{F} = (\tilde{s}, \tilde{e}, \tilde{i}, \tilde{p}, \tilde{r})$ endemik denge noktasının kararlılığını incelemek için bu noktadaki Jakobiyen matrisin hesaplanması gerekir. Kısalık için (3.3) deki eşitlikler kullanılacaktır.

$$\mathbf{J}(\tilde{F}) = \begin{pmatrix} -\Delta^\nu + (d^\nu - \beta^\nu)\tilde{i} + d^\nu\tilde{p} & 0 & (d^\nu - \beta^\nu)\tilde{s} & d^\nu\tilde{s} & 0 \\ -\beta^\nu\tilde{i} & -L^\diamond + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) & \beta^\nu\tilde{s} + d^\nu\tilde{e} & d^\nu\tilde{e} & 0 \\ 0 & \alpha^\nu & -K^\diamond + 2d^\nu\tilde{i} + d^\nu\tilde{p} & d^\nu\tilde{i} & 0 \\ 0 & 0 & \xi^\nu + d^\nu\tilde{p} & -M^\diamond + d^\nu\tilde{i} + 2d^\nu\tilde{p} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^\nu + d^\nu\tilde{r} & \gamma^\nu + d^\nu\tilde{r} & -\Delta^\nu + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) \end{pmatrix}$$

olup $3I - 4I \rightarrow 3I$ elementer sütun işlemleri yardımıyla,

$$\mathbf{J}(\tilde{F}) = \begin{pmatrix} -\Delta^\nu + (d^\nu - \beta^\nu)\tilde{i} + d^\nu\tilde{p} & 0 & -\beta^\nu\tilde{s} & d^\nu\tilde{s} & 0 \\ -\beta^\nu\tilde{i} & -L^\diamond + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) & \beta^\nu\tilde{s} & d^\nu\tilde{e} & 0 \\ 0 & \alpha^\nu & -K^\diamond + 2d^\nu\tilde{i} + d^\nu\tilde{p} & d^\nu\tilde{i} & 0 \\ 0 & 0 & L^\diamond + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) & -M^\diamond + d^\nu\tilde{i} + 2d^\nu\tilde{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta^\nu + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Yine matrise $3S + 4S \rightarrow 4S$ işlemleri uygulanırsa

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{F}}) = \begin{pmatrix} -\Delta^\nu + (d^\nu - \beta^\nu)\tilde{i} + d^\nu\tilde{p} & 0 & -\beta^\nu\tilde{s} & d^\nu\tilde{s} & 0 \\ -\beta^\nu\tilde{i} & -L^\diamond + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) & \beta^\nu\tilde{s} & d^\nu\tilde{e} & 0 \\ 0 & \alpha^\nu & -K^\diamond + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) & d^\nu\tilde{i} & 0 \\ 0 & \alpha^\nu & 0 & -M^\diamond + 2d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta^\nu + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) \end{pmatrix}$$

sonucuna ulaşılır. $\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{F}})$ matrisinin özdeğerlerinin hepsi $\lambda_i < 0$ şartını sağlarsa sistem yerel asimptotik kararlıdır. Böylece $\det[\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{F}}) - \lambda\mathbf{I}] = 0$ eşitliğinden özdeğerler için

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \{ -\Delta^\nu + (d^\nu - \beta^\nu)\tilde{i} + d^\nu\tilde{p} - \lambda \} \{ d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) - \Delta^\nu - \lambda \} \{ -L^\diamond + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} \\ &\quad \{ -M^\diamond + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} \{ -K^\diamond + 2d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} \\ &\quad - \alpha^\nu d^\nu \tilde{e} \{ -M^\diamond + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} \\ &\quad - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s} (1 - \beta^\nu \tilde{i}) \{ -K^\diamond + 2d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} \} = 0 \\ &\Rightarrow \{ -\Delta^\nu + (d^\nu - \beta^\nu)\tilde{i} + d^\nu\tilde{p} - \lambda \} \{ d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) - \Delta^\nu - \lambda \} \{ -K^\diamond + 2d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} \\ &\quad \{ \{ -L^\diamond + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) - \lambda \} \{ -M^\diamond + 2d^\nu\tilde{i} + d^\nu\tilde{p} - \lambda \} \\ &\quad - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s} (1 - \beta^\nu \tilde{i}) \} \} = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Kısalık için

$$\begin{aligned} A^\diamond &= -\Delta^\nu + (d^\nu - \beta^\nu)\tilde{i} + d^\nu\tilde{p}, \\ B^\diamond &= d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}) - \Delta^\nu, \\ C^\diamond &= -K^\diamond + 2d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}), \\ D^\diamond &= -L^\diamond + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}), \\ E^\diamond &= -M^\diamond + d^\nu(\tilde{i} + \tilde{p}), \end{aligned}$$

alınırsa,

$$(A^\diamond - \lambda)(B^\diamond - \lambda) \left\{ (C^\diamond - \lambda)(D^\diamond - \lambda)(E^\diamond - \lambda) - \alpha^\nu d^\nu \tilde{e} (E^\diamond - \lambda) - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s} (1 - \beta^\nu \tilde{i}) (C^\diamond - \lambda) \right\} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$\begin{aligned}
& \lambda^5 - \lambda^4(A^\diamond + B^\diamond + C^\diamond + D^\diamond + E^\diamond) + \lambda^3\{-C^\diamond D^\diamond - E^\diamond(C^\diamond + D^\diamond) \\
& - (A^\diamond + B^\diamond)(C^\diamond + D^\diamond) + (A^\diamond + B^\diamond)E^\diamond - A^\diamond B^\diamond + d^\nu \tilde{e} + \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i})\} \\
& - \lambda^2\{C^\diamond D^\diamond E^\diamond + (A^\diamond + B^\diamond)C^\diamond D^\diamond + (A^\diamond + B^\diamond)(C^\diamond + D^\diamond)E^\diamond + A^\diamond B^\diamond(C^\diamond + D^\diamond) \\
& + A^\diamond B^\diamond E^\diamond - \alpha^\nu d^\nu \tilde{e} E^\diamond - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i})C^\diamond - (A^\diamond + B^\diamond)(\alpha^\nu d^\nu \tilde{e} E^\diamond - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i}))\} \\
& + \lambda\{(A^\diamond + B^\diamond)C^\diamond D^\diamond E^\diamond + (A^\diamond + B^\diamond)(\alpha^\nu d^\nu \tilde{e} E^\diamond - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i})C^\diamond) - A^\diamond B^\diamond C^\diamond D^\diamond \\
& - A^\diamond B^\diamond(C^\diamond + D^\diamond)E^\diamond + A^\diamond B^\diamond(\alpha^\nu d^\nu \tilde{e} E^\diamond - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i}))\} \\
& - A^\diamond B^\diamond C^\diamond D^\diamond E^\diamond + A^\diamond B^\diamond(\alpha^\nu d^\nu \tilde{e} E^\diamond - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i})C^\diamond) = 0 \tag{3.9}
\end{aligned}$$

biçiminde 5. dereceden bir denklem elde edilir.

Önceki bölümde tanıtılan Routh-Hurwitz kriterlerini kullanabilmek için,

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(A^\diamond + B^\diamond + C^\diamond + D^\diamond + E^\diamond) \\
a_2 &= C^\diamond D^\diamond - E^\diamond(C^\diamond + D^\diamond) + (A^\diamond + B^\diamond)(C^\diamond + D^\diamond) - (A^\diamond + B^\diamond)E^\diamond + A^\diamond B^\diamond \\
& - d^\nu \tilde{e} - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i}) \\
a_3 &= -\{C^\diamond D^\diamond E^\diamond + (A^\diamond + B^\diamond)C^\diamond D^\diamond + (A^\diamond + B^\diamond)(C^\diamond + D^\diamond)E^\diamond + A^\diamond B^\diamond(C^\diamond + D^\diamond) \\
& + A^\diamond B^\diamond E^\diamond - \alpha^\nu d^\nu \tilde{e} E^\diamond - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i})C^\diamond - (A^\diamond + B^\diamond)(\alpha^\nu d^\nu \tilde{e} E^\diamond - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i}))\} \\
a_4 &= -\{(A^\diamond + B^\diamond)C^\diamond D^\diamond E^\diamond + (A^\diamond + B^\diamond)(\alpha^\nu d^\nu \tilde{e} E^\diamond - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i})C^\diamond) - A^\diamond B^\diamond C^\diamond D^\diamond \\
& - A^\diamond B^\diamond(C^\diamond + D^\diamond)E^\diamond + A^\diamond B^\diamond(\alpha^\nu d^\nu \tilde{e} E^\diamond - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i}))\} \\
a_5 &= -A^\diamond B^\diamond C^\diamond D^\diamond E^\diamond + A^\diamond B^\diamond(\alpha^\nu d^\nu \tilde{e} E^\diamond - \alpha^\nu \beta^\nu \tilde{s}(1 - \beta^\nu \tilde{i})C^\diamond)
\end{aligned}$$

olarak alınır.

Böylece $\tilde{F} = (\tilde{s}, \tilde{e}, \tilde{i}, \tilde{p}, \tilde{r})$ endemik denge noktasında $A^\diamond, B^\diamond, C^\diamond, D^\diamond, E^\diamond$ değerleri ve parametre değerleri kullanılarak a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 değerleri hesaplanabilir. Eğer Routh-Hurwitz kriterleri sağlanıyorsa verilen sistem kararlıdır.

3.5. Kesirli Türevli SEIPR Modelinin Türkiye Verilerine Göre Nümerik Çözümü

Bu bölümde, kesirli türevli SEIPR hastalık modeline karşılık gelen (3.1) denklem sisteminin nümerik çözümleri, genel kesirli türev operatörü yerine sırasıyla Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türev operatörleri alınarak ayrı ayrı elde edilmiştir.

Kesirli türevli denklem sistemlerinin nümerik çözümü için [69] makalesinde verilen (27)-(29) formülleri kullanılmıştır. Nümerik çözümler elde edilirken kullanılan veriler ve parametre değerleri 2.5.1 ve 2.5.2. Bölümlerde kullanılan değerlerle aynı alınmıştır. Böylece, farklı kesirli türev içeren modeller arasında, bu problem özelinde, hangisinin gerçek verilere daha yakın sonuçlar verdiği belirlenmesi amaçlanmıştır.

Her iki döneme ait parametre değerleri kullanılıp $\nu = 0.5$ olarak alındığında, birinci dönem için temel üreme sayısı $R_0 = 0.00454056$, ikinci dönem için ise $R_0 = 0.00282518$ olarak bulunmuştur. Her iki dönemi için $R_0 < 1$ olduğundan, $\hat{E} = (1, 0, 0, 0, 0)$ hastalısız denge noktasında kararlı olduğu söylenebilir. Böylece (3.1) sisteminin her çözümü bu denge noktasına yaklaşır ve hastalık popülasyondan kaybolur (bkz. Şekil 3.1-Şekil 3.6). Temel üreme sayısından bağımsız olarak, (3.7) ve (3.8) ile verilen eşitsizliklerden yararlanılarak da (3.1) denklem sisteminin hastalısız denge noktasında kararlı olduğu görülebilir.

Endemik denge noktasının kararlılığı için, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 değerleri birinci dönem için $a_1 = -1.82198, a_2 = 1.53372, a_3 = 0.229255, a_4 = -0.0232135, a_5 = 0.00596176$ ve ikinci dönem için $a_1 = -2.0239, a_2 = 1.83881, a_3 = 0.333511, a_4 = -0.070051, a_5 = 0.010388$ olarak elde edilir. Buradan Routh-Hurwitz kriterlerinin sağlanmadığı, yani endemik denge noktasının kararlı olmadığı görülür.

Ayrıca Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevli modellerin nümerik çözümlerinin hatalarını karşılaştırmak için RSS (Root Sum Squared) değeri her iki dönem için de $\nu = 0.95, \nu = 0.90$ ve $\nu = 0.85$ alınarak hesaplanmıştır. Bu hesaplama için

$$RSS = \sqrt{\sum_{i=1}^{62} \left(p_i (\text{Gerçek Değer}) - \tilde{p}_i (\text{Yaklaşık Değer}) \right)^2}$$

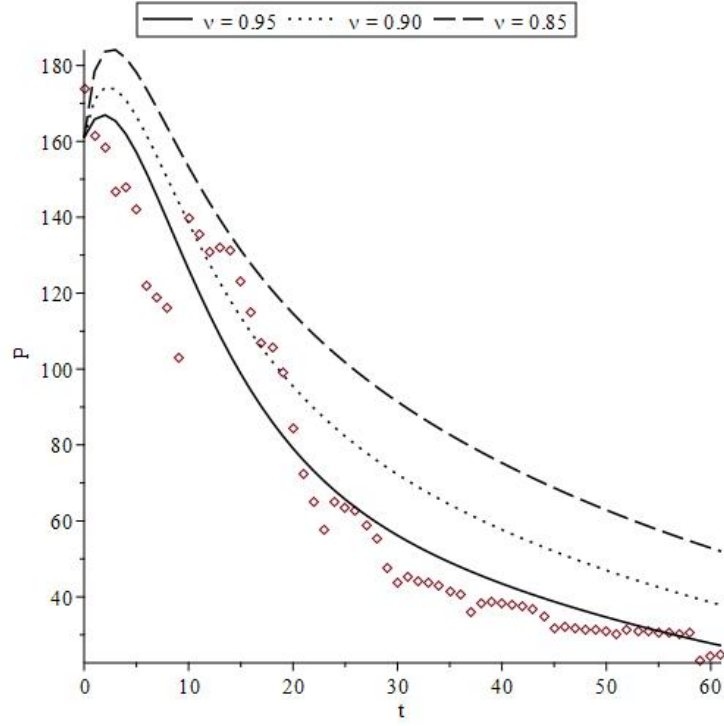
formülü kullanılmıştır. Sonuçlar 3.1. ve 3.2. Tablolarla verilmiştir.

Birinci dönem için RSS değerleri			
ν	Caputo	Caputo-Fabrizio	Atangana-Baleanu
0.95	667.408912590456	667.408912636955	667.408912590456
0.90	753.483299790573	718.689026375766	769.619981517903
0.85	864.372119478276	787.584795829203	900.992439248238

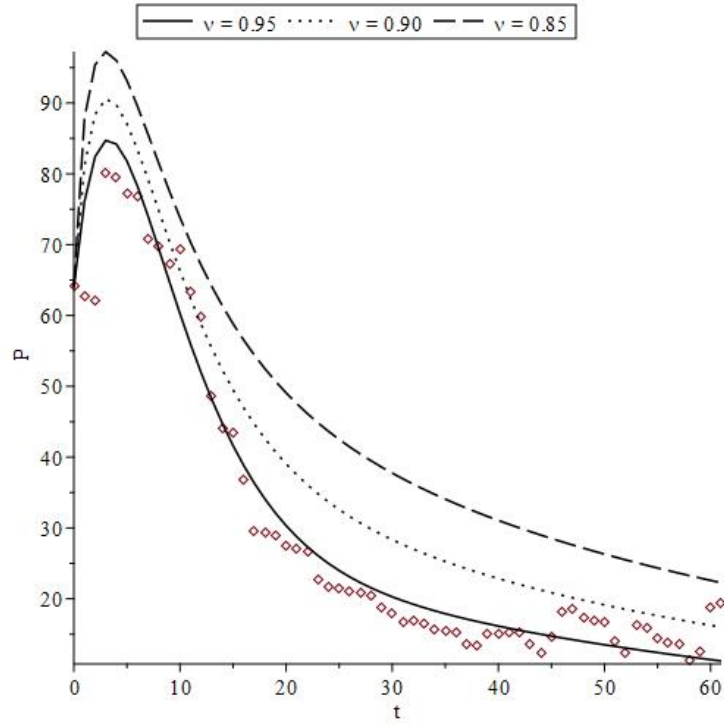
Tablo 3.1. Birinci dönem verilerine göre kesirli türevli denklemlerden elde edilen RSS değerleri

İkinci dönem için RSS değerleri			
ν	Caputo	Caputo-Fabrizio	Atangana-Baleanu
0.95	304.034207394048	304.034207390804	304.034207394048
0.90	346.157907298169	330.752085895104	353.610546416230
0.85	400.229513562007	364.826073429137	417.745878567381

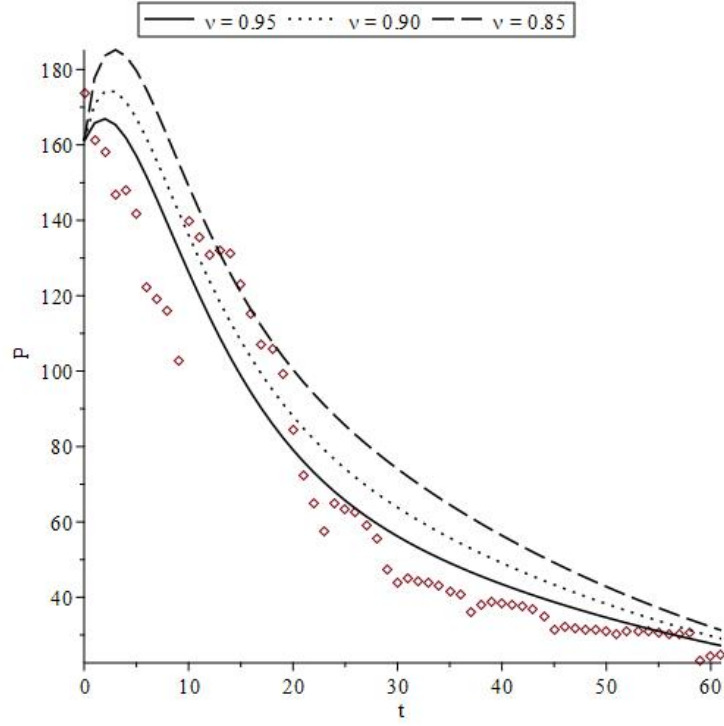
Tablo 3.2. İkinci dönem verilerine göre kesirli türevli denklemlerden elde edilen RSS değerleri



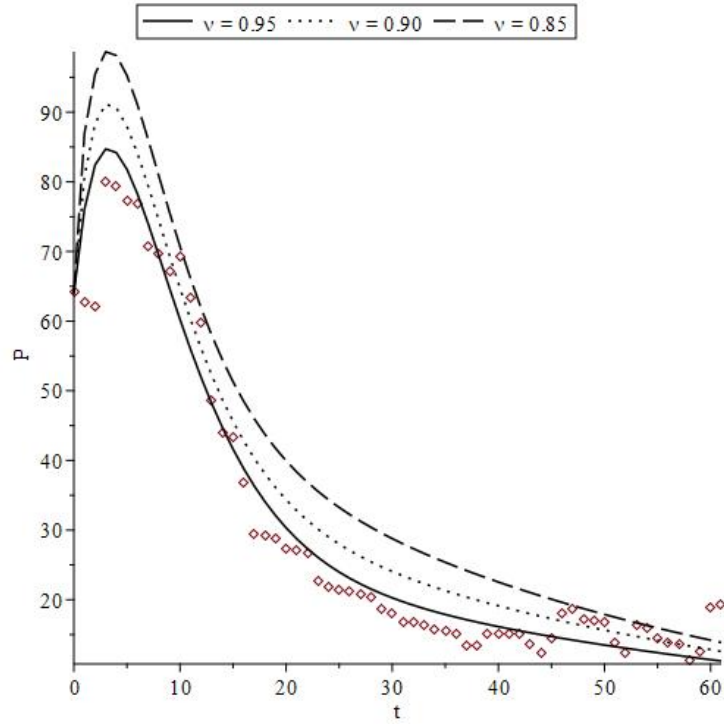
Şekil 3.1. Birinci dönem verileri kullanılarak Caputo kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri



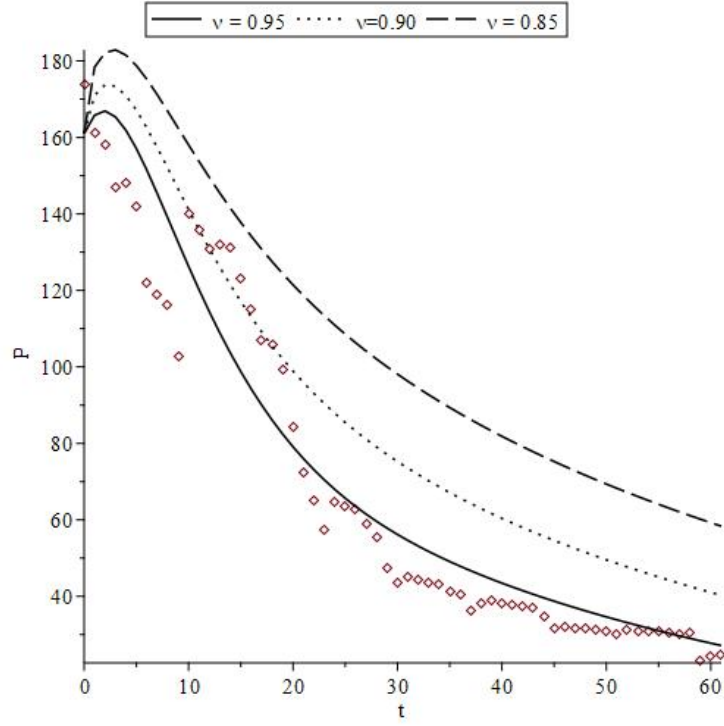
Şekil 3.2. İkinci dönem verileri kullanılarak Caputo kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri



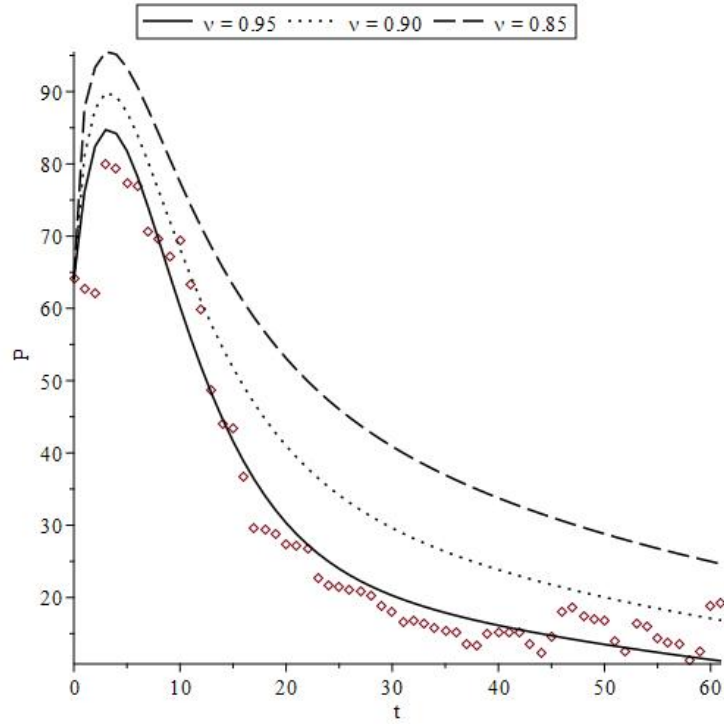
Şekil 3.3. Birinci dönem verileri kullanılarak Caputo-Fabrizio kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri



Şekil 3.4. İkinci dönem verileri kullanılarak Caputo-Fabrizio kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri



Şekil 3.5. Birinci dönem verileri kullanılarak Atangana-Baleanu kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri



Şekil 3.6. İkinci dönem verileri kullanılarak Atangana-Baleanu kesirli türevli modelden çeşitli ν değerleri için elde edilen p fonksiyonları ile gerçek değerlerin grafikleri

4. SONUÇ VE GÖZLEMLER

(2.2) sisteminin verilen parametre ve başlangıç değerleriyle elde edilen nümerik çözümleri hastalığın her iki dönemde de popülasyondan kaybolma eğiliminde olduğunu göstermektedir. Ayrıca ikinci dönemdeki zatürre olan hastaların sayısının birinci dönemdekilerden daha az olduğu, yani ikinci dönemde uygulanan aşının da etkisiyle, zatürre hasta sayısındaki düşüşün devam ettiği görülmektedir. T.C. Sağlık Bakanlığı verileri ile karşılaştırıldığında elde edilen sonuçların gerçek değerlerle tutarlı olduğu söylenebilir (bkz. Şekil 2.1. ve Şekil 2.2.).

Diğer faktörler sabit olduğunda bir hastalığa karşı toplumdaki bağışık birey sayısının artması o hastalığın insidansının azalmasını sağlar [78]. Bu çalışmada her dönem için insidans oranları hesaplanmış ve ikinci dönemde azalma olduğu gözlemlenmiştir. Başka bir deyişle, toplumda bağışıklama ikinci dönemde artmıştır. Tüm bunlara ek olarak ikinci aşının aşı etkililiğinin 0.57, yani koruyuculuğunun %57 olduğu görülür. Böylece ikinci aşının hastalığın zatürreye evrimi ile mücadelede olumlu etkileri olduğu söylenebilir.

Çalışmada kullanılan tüm kesirli türevli SEIPR modelleri için de benzer sonuçlara ulaşılmıştır. Yaklaşık değerler, ν değerleri 1 değerinden uzaklaştıkça gerçek değerlerden uzaklaşsa da hastalığın her iki dönemde de popülasyondan kaybolma eğiliminde olduğu ve zatürre olan hastaların sayısının ikinci dönemde azaldığı söylenebilir (bkz. Şekil 3.1.-3.6.).

Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli türevli SEIPR hastalık modellerinin nümerik çözümleri karşılaştırıldığında, 3.1.-3.6. Şekillerdeki grafiklerden de görülebildiği gibi, gerçek değerlere en yakın çözüm, her iki dönem için de Caputo-Fabrizio kesirli türevli sistemden elde edilmiştir. Bu sonuca ayrıca, 3.1. ve 3.2. Tablolarda çeşitli ν değerleri için hesaplanan en düşük RSS değerinin yine Caputo-Fabrizio kesirli türevli sisteme ait olmasıyla da ulaşılabilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1]. Abdullah, U., Arslan, Ş., Manap, H. S., Gürkan, T., Çalışkan, M., Dayıoğlu, A., Efe, H. N., Yılmaz, M., İbrahimoglu, A. Z., Gültekin, E., Durna, R., Başar, R., Osmanoğlu, F. B., Ören, S., 2021, Türkiye COVID-19 pandemi izleme ekranı, <https://turcovid19.com/>, [Ziyaret Tarihi: 13 Temmuz 2021].
- [2]. Abdullahi, Y., Acay, B., Mustapha, U. T., Inc, M., Baleanu, D., 2021, Mathematical modeling of pine wilt disease with Caputo fractional operator, *Chaos, Solitons and Fractals*, 143, 110569.
- [3]. Ahmed, E., El-Sayed, A. M. A., El-Saka, H. A. A., 2006, On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems, *Physics Letters A*, 358, 1–4.
- [4]. Allen, L. J. S., 2007, *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson Education, Printed in the United States of America, ISBN: (0-13-035216-0).
- [5]. Allen, L. J. S., 2008, *An Introduction to Stochastic Epidemic Models*, Mathematical Epidemiology, In: Brauer, F., Van den Driessche, P., Wu J., (Eds), 3, Springer-Verlag, Germany, ISBN: (978-3-540-78910-9), 81-128.
- [6]. Almeida, R., da Cruz, A. M. B., Martins, N., Monteiro, M. T. T., 2019, An epidemiological MSEIR model described by the Caputo fractional derivative, *International Journal of Dynamics and Control*, 7 (2), 776–784.
- [7]. Angstmann, C. N., Henry, B. I., McGann, A. V., 2016, A Fractional Order Recovery SIR Model from a Stochastic Process, *Bulletin of Mathematical Biology*, 78 (3), 468-499.
- [8]. Arenas, A. J., Gonzalez-Parrab, G., Chen-Charpentierc, B. M., 2016, Construction of nonstandard finite difference schemes for the SI and SIR epidemic models of fractional order, *Mathematics and Computers in Simulation*, 121, 48-63.

- [9]. Asfour, H. A., Ibrahim, M., 2015, On the Differential Fractional Transformation Method of MSEIR Epidemic Model, *International Journal of Computer Applications*, 113 (3), 10-16.
- [10]. Atangana, A., Baleanu, D., 2016, *The Journal Thermal Science*, 20, 763.
- [11]. Baleanu, D., Agarwal, P., 2014, On generalized fractional integral operators and the generalized Gauss hypergeometric functions, *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, ID : 630840.
- [12]. Beaglehole, R., Bonita, R., Kjellström T., 2006, *Basic Epidemiology*, 2th Edition, World Health Organization, Printed in China, ISBN: (9241547073).
- [13]. Berger David, W., Herkenhoff, K. F., Mongey, S., 2020, An SEIR infectious disease model with testing and conditional quarantine, *Working Paper Series National Bureau of Economic Research* , 26901.
- [14]. Bichara, D., Iggidr, A., Sallet, G., 2014, Global analysis of multi-strains SIS, SIR and MSIR epidemic models, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 44, 273-292.
- [15]. Boyce, W. E., DiPrima, R. C., 2012, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* , 10th edition, John Wiley and Sons, Printed in the United States of America, ISBN:(978-0-470-45831-0).
- [16]. Brauer, F., Van den Driessche, P., Wu J., (Eds), 2008, *Mathematical Epidemiology*, Springer-Verlag, Germany, ISBN: (978-3-540-78910-9).
- [17]. Bulut, H., Kumar, D., Singh, J., Swroop, R., Baskonus, H. M., 2018, Analytic study for a fractional model of HIV infection of CD4 + T lymphocyte cells, *Mathematics in Natural Science*, 2 (1), 33–43.
- [18]. Butzer, P.L., Jansche, A., 1997, A direct approach to the Mellin transform, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 3, 325-376.
- [19]. Caputo , M., Fabrizio, M., 2015, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1 (2), 73-85.

- [20]. Choi, J., Agarwal, P., 2014, Certain integral transform and fractional integral formulas for the generalized Gauss hypergeometric functions, *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, Article ID 735946.
- [21]. Choi, J., Agarwal, P., Jain, S., 2015, Certain fractional integral operators and extended generalized Gauss hypergeometric functions, *Kyungpook Mathematical Journal*, 55 (3), 695-703.
- [22]. Çakan S., 2020, Dynamic analysis of a mathematical model with health care capacity for pandemic COVID-19, *Chaos, Solitons and Fractals*, 139, 110033.
- [23]. Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., Roberts, M. G., 2010, The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models, *Journal of the Royal Society*, 7, 873-885.
- [24]. Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P., 2000, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases, Model Building, Analysis and Interpretation*, Wiley, New York, ISBN: (0 471 98682 9 (cased); 0 471 9241 8 (pbk))
- [25]. Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., Metz, J. A. J., 1990, On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations, *Journal of Mathematical Biology*, 28, 365–382 .
- [26]. Dietz, K., Heesterbeek, J. A. P., 2002, Daniel Bernoulli's epidemiological model revisited, *Mathematical Biosciences*, 180 (1-2), 1–21.
- [27]. Dokuyucu, A. Celik, M. E., Bulut, H., Baskonus, H. M., 2018, Cancer treatment model with the Caputo-Fabrizio fractional derivative, *The European Physical Journal Plus*, 133 (3), 1-6.
- [28]. El-Shahed, M., Alsaedi, A., 2011, The Fractional SIRC Model and Inuenza, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 480378.
- [29]. Frame, J.D., Baldwin, J.M., Gocke, D.J., Troup, J. M., 1970, Lassa fever, a new virus disease of man from West Africa I. Clinical description and pathological findings, *American Journal of Tropical Medicine and Hygiene* , 19 (4), 67–76.

- [30]. Gonzalez-Parra, G. , Arenas, A. J., Chen-Charpentier, B. M., 2014, A fractional order epidemic model for the simulation of outbreaks of influenza A(H1N1), *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37 (15), 2218-2226.
- [31]. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V., 2014, *Mittag-Leffler Functions, Related Topic and Applications*, Springer, Berlin.
- [32]. Goufo, E. F. D., Maritz, R., Munganga, J., 2014, Some properties of Kermack-McKendrick epidemic model with fractional derivative and nonlinear incidence, *Advances in Difference Equations*, 1 (2014), Article ID 278, 9p.
- [33]. Gray, A., Greenhalgh, D., Hu, L., Mao, X., Pan, J., 2011, A stochastic differential equation SIS epidemic model, *SIAM Journal on Applied Mathematic*, 71 (3) , 876-902.
- [34]. Hamer, W. H., 1906, Epidemic disease in England - the evidence of variability and of persistence, *The Lancet*, 167, 733–738.
- [35]. Hekimoğlu, C. H., 2016, Aşı epidemiyolojisi: Aşı etkililiği için epidemiyolojik çalışma tasarımları, *Türk Hijyen ve Deneysel Biyoloji Dergisi*, 73 (2), 161-74.
- [36]. Hethcote, H. W., 1976, Qualitative analysis for communicable disease models, *Mathematical Biosciences*, 28 (3-4), 335–356.
- [37]. Hethcote, H. W., 1978, An immunization model for a heterogeneous population, *Theoretical Population Biology*, 14 (3), 338–349.
- [38]. Hethcote, H. W., 1989, *Three basic epidemiological models in Applied Mathematical Ecology*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [39]. Hethcote, H. W., 1997, An age-structured model for pertussis transmission, *Mathematical Biosciences*, 145, 89–136.
- [40]. Hethcote, H. W., 2000, The mathematics of infectious diseases, *SIAM Review*, 42, 599–653.
- [41]. Hilfer, R., 2000, *Applications of fractional calculus in physics*, World Scientific, Singapore.

- [42]. Hoan, L. V. C., Akınlar, M. A., Inc, M., Gómez-Aguilar, J., Chu, Y. M., Almohsen, B., 2020, A new fractional-order compartmental disease model, *Alexandria Engineering Journal*, 59 (5), 3187–3196.
- [43]. Hou, C., et al., 2020, The effectiveness of quarantine of Wuhan city against the Corona Virus Disease 2019 (COVID-19): A well-mixed SEIR model analysis, *Journal of medical virology*, 92 (7), 841-848.
- [44]. Huo, J., Zhao, H., 2016, Dynamical analysis of a fractional SIR model with birth and death on heterogeneous complex networks, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 448 41-56.
- [45]. Kermack, W. O., McKendrick A. G., 1927, A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proceeding of the Royal Society a Mathematical, Physical and Engineering Sciences* , 115 , 700–721.
- [46]. Kermack, W. O., McKendrick A. G., 1932, Contributions to the mathematical theory of epidemics, part. II, *Proceeding of the Royal Society a Mathematical, Physical and Engineering Sciences* , 138 : 55–83.
- [47]. Kermack, W. O., McKendrick A. G., 1933, Contributions to the mathematical theory of epidemics, part. III, *Proceeding of the Royal Society a Mathematical, Physical and Engineering Sciences* , 141 : 94–112.
- [48]. Kober, H., 1940, On fractional integrals and derivatives, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 11, 193-211.
- [49]. Kolokolnikov, T., Iron, D., 2020, Law of mass action and saturation in SIR model with application to Coronavirus modelling, *Infectious Disease Modelling*, 6, 91-97.
- [50]. Korobeinikov, A., Maini, P. K., 2004, A Lyapunov function and global properties for SIR and SEIR epidemiological models with nonlinear incidence, *Math. Biosci. Eng.*, 1 No 1, 57-60.
- [51]. Kristensson, G., 2010, *Second order differential equation: Special functions and their classification*, Springer, New York., ISBN: (978-1-4419-7020-6).

- [52]. Kumar, R., Kumar, S., 2013, A New Fractional Modelling on Susceptible-Infected-Recovered Equations with Constant Vaccination Rate, *Nonlinear Engineering*, 3 (1), 11-19.
- [53]. Last, J. M., 2001, *A dictionary of epidemiology*, 4th ed., Oxford University Press, Oxford, ISBN: (0-19-514168-7), ISBN: (0-19-514169-5 (pbk.))
- [54]. Lee, D.M, Rathie, A.K., Parmar, R.K., Kim, Y.S., 2011, Generalization of extended beta function, hypergeometric and confluent hypergeometric functions, *Honam Mathematical Journal*, 33 (2), 187-206.
- [55]. Li, M. Y., Graef, J.R., Wang, L., Karsai, J., 1999, Global dynamics of a SEIR model with varying total population size, *Mathematical Biosciences*, 160 (2) , 191-213.
- [56]. Li, M. Y., 2018, *An Introduction to Mathematical Modeling of Infectious Diseases*, vol.2, Springer, Canada, ISBN: (978-3-319-72121-7).
- [57]. Martcheva, M., 2015, *Introduction to mathematical epidemiology. In Texts in applied mathematics*, Vol. 61, Springer, New York, ISBN: (978-1-4899-7611-6).
- [58]. Matignon, D., 1996, Stability result on fractional differential equations with applications to control processing, in Proceedings of the International Meeting on Automated Compliance Systems and the International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (IMACS-SMC '96), Lille, France, 2, 963-968.
- [59]. McBride, C.C., 1979, *Fractional calculus and integral transforms of generalized functions*, Piman Publishing Limited, London.
- [60]. Miller, K.S., Ross, B., 1993, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane Toronto and Singapore.
- [61]. Mouaouine, A., Boukhouima, A., Hattaf, K., Yous, N., 2018, A fractional order SIR epidemic model with nonlinear incidence rate, *Advances in Difference Equations*, 2018 (1), 160.
- [62]. Ogbu, O., Ajuluchukwu, E., Uneke, C. J., 2007, Lassa fever in West African sub-region: an overview, *Journal of Vector Borne Disease*, 44 (1), 1–11.

- [63]. Okyere, E., Oduro, F. T., Amponsah, S. K., Dontwi, I. K., Frempong, N. K., 2016, Fractional Order SIR Model with Constant Population, *british journal of mathematics and computer science*, 14 (2), 1-12.
- [64]. Oldham, K. B., Myland, J., Spanier, J., 2009, *An atlas of functions: with equator; the atlas function calculator*, Springer-Verlag, New York.
- [65]. Oldham, K., Spanier, J., 1974, *The fractional calculus*, Academic Press, New York.
- [66]. Özalp, N., Demirci, E., 2011, A fractional order SEIR model with vertical transmission, *Mathematical and Computer Modelling*, 54 (1), 1-6.
- [67]. Podlubny, I., 1999, *Fractional differential equations*, Academic Press, New York, ISBN: (0-12S5H810-2).
- [68]. Prakasha, D. G., Veerasha, P., Baskonus, H. M., 2019, Analysis of the dynamics of hepatitis E virus using the Atangana-Baleanu fractional derivative, *The European Physical Journal Plus*, 134 (241), 1–11.
- [69]. Qureshi, S., Yusuf, A., 2019, Fractional derivatives applied to MSEIR problems: comparative study with real world data, *The European Physical Journal Plus*, 134 (4), 171.
- [70]. Rao, M.R.M., 1981, *Ordinary differential equations*, Affiliated East-West Private Limited, United Kingdom, ISBN: (0-7131-3452-6).
- [71]. Ross, S.L., 1984, *Differential Equations*, 3th edition, John Wiley and Sons, Singapore, ISBN: (1098765)
- [72]. Rostamy, D., Mottaghi, E., 2016, Stability analysis of a fractional-order epidemic model with multiple equilibriums, *Advances in Difference Equations*, 2016, 170.
- [73]. Santos, J. P. C., Cardoso, L. C., Lemes, E. M., Lemes, N. H. T., 2015, A Fractional-Order Epidemic Model for Bovine Babesiosis Disease and Tick Populations, *Abstract and Applied Analysis*, 2015, Article ID 729894.
- [74]. Sardar, T., Rana, S., Bhattacharya, S., Al, K., 2015, Khaled and J. Chattopadhyay, A generic model for a single strain mosquito-transmitted disease with memory on the host and the vector, *Mathematical Biosciences*, 263, 18-36.

- [75]. Saxena, R.K., Kumbhat, R.K., 1973, A generalization of Kober operators, *Vijnana Parishad Anusandhan Patrika*, 16, 177-186.
- [76]. Singh, J., Kumar, D., Hammouch, Z., Atangana, A., 2018, A fractional epidemiological model for computer viruses pertaining to a new fractional derivative. *Applied Mathematics and Computation*, 316 , 504–15.
- [77]. Sintunavarat, W., Turab, A., 2022, Mathematical analysis of an extended SEIR model of COVID-19 using the ABC-fractional operator, *Mathematics and Computers in Simulation*, 198, 65-84.
- [78]. T.C. Sağlık Bakanlığı, 2021, COVID-19 Bilgilendirme Platformu, Genel Koronavirüs Tablosu, <https://covid19.saglik.gov.tr/TR-66935/genel-koronavirus-tablosu.html>, [Ziyaret Tarihi: 13 Temmuz 2021].
- [79]. Tailor, M. R., Bhathawala, P. H., 2012, Linearization of Nonlinear Differential Equation by Taylor’s Series Expansion and Use of Jacobian Linearization Process, *International Journal of Theoretical and Applied Science*, 4 (1), 36-38.
- [80]. Van den Driessche, P., Watmough, J., 2002, Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Mathematical Biosciences*, 180, 29-48.
- [81]. Van den Driessche, P., Watmough, J., 2008, *Further notes on the basic reproduction number*, Mathematical epidemiology, In: Brauer, F., Van den Driessche, P., Wu J., (Eds), Springer-Verlag, Germany, ISBN: (978-3-540-78910-9), 159-178.
- [82]. Veerasha, P., Prakasha, D. G., Baskonus, H. M., 2019, Solving smoking epidemic model of fractional order using a modified homotopy analysis transform method, *Mathematical Sciences*, 13 (2): 115–28.
- [83]. West, R. W., Thompson, J. R., 1997, Models for the simple epidemic, *Mathematical Biosciences*, 141, 29-39.
- [84]. Yang, Y., Xu, L. G., 2020, Stability of a fractional order SEIR model with general incidence, *Applied Mathematics Letters*, 105, 106303.

- [85]. Yang, Zifeng, et al., 2020, Modified SEIR and AI prediction of the epidemics trend of COVID-19 in China under public health interventions, *Journal of Thoracic Disease*, 12 (3), 165.
- [86]. Zhang, X., Liu, X., 2009, Backward bifurcation and global dynamics of an SIS epidemic model with general incidence rate and treatment, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2 , 565-575.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Fatma KARACA VURAL
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	T.C.



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2010

Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Yüksek Lisans Programı
Mezuniyet Yılı	2012

Doktora	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Doktora Programı
Mezuniyet Yılı	...

Makale ve Bildiriler	
1. Karaca Vural, F., Kıymaz, İ. O., 2022, Investigation of the effect of vaccination in Turkey on pneumonia cases caused by COVID-19 with a SEIR type model, The sixth international conference on computational mathematics and engineering sciences, (CMES-2022), 20-22 May 2022, Ordu-Turkey.	