T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA İKİ YÜZEYİN ARAKESİT EĞRİSİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Benen AKINCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR OCAK

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA İKİ YÜZEYİN ARAKESİT EĞRİSİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Benen AKINCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
PROF. DR. LEVENT KULA

KIRŞEHİR OCAK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK** Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan:
Prof. Dr. Levent KULA

Üye:
Yrd. Doç. Dr. Bülent ALTUNKAYA

Üye:
Yrd. Doç. Dr. Mahmut MAK

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Doç. Dr. Mahmut YILMAZ
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik, davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Benen AKINCI

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA İKİ YÜZEYİN ARAKESİT EĞRİSİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Benen AKINCI

Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Ocak 2015

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde, öncelikle transversal arakesit eğrilerinin normal eğriliği, geodezik eğriliği, geodezik torsiyonu, eğrilik vektörü, eğriliği, torsiyonu ile teğetsel arakesit eğrisinin eğrilik vektörü ve eğriliği ele alındı. Üçüncü bölümde, konuyla ilgili örnekler ele alındı.

Anahtar Kelimeler: Arakesit eğrisi; Transversal arakesit; Teğetsel arakesit; Normal eğrilik; Geodezik eğrilik; Eğrilik; Geodezik torsiyon; Torsiyon
Sayfa Adedi: 59
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Levent KULA

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF INTERSECTION CURVE OF TWO SURFACES IN TREE DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

(Master's Thesis)

Benen AKINCI

Ahi Evran University
Institute of Science

January 2015

ABSTRACT

This master thesis consists of tree parts. The first chapter is devoted to basic definitions and theorems used in our study. In the second chapter, firstly normal curvature, geodesic curvature, geodesic torsion, curvature vector and torsion of transversal intersection curve and curvature vector and curvature of tangential intersection curve have been reviewed. The third chapter, relevant examples have been reviewed.

Keywords Intersection curve; Transversal intersection; Tangential intersection; Normal curvature; Geodesic curvature; Curvature; Geodesic Torsion; Torsion
Number of Pages: 59
Thesis Advisor: Prof. Dr. Levent KULA

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her safhasında büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, danışman hocam sayın Prof. Dr. Levent KULA'ya; bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan babam Turan KIZILGEDİK'e, kıymetli annem Gülcan KIZILGEDİK'e ve kayınvalidem Nevin AKINCI'ya; her türlü destek ve anlayışından dolayı eşim Akıner AKINCI'ya ve çalışmamda bana yardımcı olan arkadaşım Mesut ALTINOK'a içtenlikle teşekkür ederim.

Benen AKINCI

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	**Açıklama**
T	Teğet vektör alanı
N	Asli normal vektör alanı
B	Binormal vektör alanı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\times$	Vektörel çarpım
$\langle , \rangle$	İç çarpım
κ	Eğrilik fonksiyonu
κ_n	Normal eğrilik
κ_g	Geodezik eğrilik
$\mathbf{k}$	Eğrilik vektörü
τ	Burulma fonksiyonu
τ_g	Geodezik torsiyon
∇	Gradiyent fonksiyonu
$\mathbf{T}_{c(s)}(c(I))$	$c(I)$ eğrisinin $c(s)$ noktasındaki teğet uzayı

1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

eşitliğiyle tanımlanan,

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir.

$x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|,\| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\to \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{aligned}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre, $\mathbb{R}^n$ uzayı bu metrik ile tanımlı normlu bir vektör uzayıdır.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

biçiminde tanımlanan $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla, bu metrik ile $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzay olur. Bu uzaya Öklid uzayı denir [2].

Tanım 1.2.

$$\begin{aligned} Grad : C(E^n, \mathbb{R}) &\to \chi(E^n) \\ f &\to Grad(f) \end{aligned}$$

öyle ki, E^n de $\{x_1, \cdots, x_n\}$ bir koordinat sistemi olmak üzere,

$$Grad(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlı $Grad$ fonksiyonuna, E^n de $\{x_1, \cdots, x_n\}$ koordinat sistemine göre gradient fonksiyonu denir ve ∇ sembolü ile gösterilir [5].

Tanım 1.3. Üç boyutlu bir reel vektör uzayı V olsun. V de bir

$$\begin{aligned} \times : V \times V &\to V \\ (\alpha, \beta) &\to \alpha \times \beta \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\times$ iç işlemine V de vektörel çarpım işlemi veya V de dış çarpım işlemi olarak adlandırılır [4].

Tanım 1.4. Üç boyutlu reel vektör uzayında herhangi üç vektör α, β, γ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \Lambda : V \times V \times V &\to V \\ (\alpha, \beta, \gamma) &\to \Lambda(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \times (\beta \times \gamma) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\alpha \times (\beta \times \gamma)$ vektörüne α, β, γ vektörlerinin, bu sıradaki, üçlü vektörel çarpımı adı verilir. Buradan

$$\alpha \times (\beta \times \gamma) = \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \gamma$$

eşitliği yazılır [4].

Tanım 1.5. I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $c : I \to \mathbb{R}^3$ biçiminde düzgün bir c dönüşümüne, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir eğri denir [2].

$\mathbb{R}^3$ uzayında dik koordinat fonksiyonları x_1, x_2, x_3 olmak üzere bir $c : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin verildiğini varsayalım. c dönüşümünün değer kümesi $\mathbb{R}^3$ olduğundan, c_1, c_2, c_3 ile gösterilen üç tane bileşeni vardır. Daha açık bir anlatımla

$$c = (c_1, c_2, c_3)$$

biçimindedir. Burada $1 \leq j \leq 3$ olacak biçimdeki her j doğal sayısı için

$$x_j \circ c = c_j$$

dir. Her bir c_j fonksiyonu, I aralığından $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyondur.
$c : I \to \mathbb{R}^3$ dönüşümünün düzgün olması demek $1 \leq j \leq 3$ için c_j fonksiyonlarının düzgün olması demektir [2].

Tanım 1.6. $c : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $c^{'}(t) \neq 0$ ise c eğrisine düzenli (regüler) eğri denir [2].

Tanım 1.7. U, $\mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \to \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$ kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir basit yüzey denir.
M, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subseteq M$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir [2].

Tanım 1.8. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T(s) = c^{'}(s) \tag{1.1}$$

eşitliği ile belirli $T(s)$ vektörüne, c eğrisinin $c(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [2].

T, I aralığının herbir s noktasına, $c(s)$ noktasındaki $T(s)$ teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyondur. Buna göre T, c eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına, c eğrisinin birim teğet vektör alanı denir.
$T(s)$ vektörü, $c(s)$ noktasında $T_{c(s)}(\mathbb{R}^3)$ vektör uzayının bir alt vektör uzayını gerer. Bu alt vektör uzay, 1 boyutlu bir alt vektör uzayıdır. Geometrik olarak $c(s)$ noktasından geçen ve $T(s)$ vektörüne paralel olan bir doğrudur. Bu doğruya eğrinin $c(s)$ noktasındaki teğet uzayı denir ve $T_{c(s)}(c(I))$ biçiminde gösterilir [2].

Tanım 1.9. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \to \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|T^{'}(s)\| \tag{1.2}$$

eşitliğiyle tanımlanan κ fonksiyonuna, c eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $c(s)$ noktasındaki eğriliği adı verilir. $T = c^{'}$ olduğundan $\kappa(s) = \|c^{''}(s)\|$ olur [2].

Tanım 1.10. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T^{'}(s) \tag{1.3}$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, c eğrisinin $c(s)$ noktasındaki asli normal vektörü denir. N vektör alanına, c eğrisinin asli normal vektör alanı denir [2].
$\langle T, T\rangle$, I aralığının herbir noktasına, $\langle T(s), T(s)\rangle$ sayısını karşılık getiren

$$\langle T, T\rangle : I \to \mathbb{R}, \quad \langle T, T\rangle(s) = \langle T(s), T(s)\rangle \tag{1.4}$$

biçiminde bir fonksiyondur. Her $s \in I$ için

$$\langle T(s), T(s)\rangle = 1$$

olduğundan $\langle T, T\rangle : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sabit fonksiyondur. Buna göre her $s \in I$ için $\langle T, T\rangle^{'}(s) = 0$ dır. Kısaca $\langle T, T\rangle^{'} = 0$ dır.

$$\langle T, T\rangle^{'} = \langle T^{'}, T\rangle + \langle T, T^{'}\rangle = 2\langle T^{'}, T\rangle$$

olduğundan $\langle T^{'}, T\rangle = 0$ bulunur. Demek ki I aralığının herbir s noktasında $T^{'}(s)$ vektörü $T(s)$ vektörüne diktir. Bu tanıma göre N vektör alanı da T vektör alanına dik olur. $\kappa(s) = \|T^{'}(s)\|$ olduğundan

$$N(s) = \frac{1}{\|T^{'}(s)\|}T^{'}(s) \tag{1.5}$$

biçiminde yazılabilir. Öyleyse her $s \in I$ için, $\|N(s)\| = 1$ dir. Buna göre $\|N\| = 1$ demektir. $T \times N$, I aralığının herbir s noktasına, $c(s)$ noktasındaki $T_{c(s)}(\mathbb{R}^3)$ teğet uzayının $T(s) \times N(s)$ elemanını karşılık getiren bir fonksiyondur [2].

Tanım 1.11. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s) \tag{1.6}$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne, c eğrisinin $c(s)$ noktasındaki binormal vektörü denir. B vektör alanına, c eğrisinin binormal vektör alanı adı verilir [2].
Vektörel çarpım özelliklerinden dolayı $B(s)$ vektörü, $T(s)$ ve $N(s)$ vektörlerinin her ikisine de diktir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesi pozitif yönlü bir çatıdır [2].

Tanım 1.12. $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine, $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $c(s)$ noktasındaki Serret-Frenet vektörleri denir.

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

kümesine, c eğrisinin $c(s)$ noktasındaki Serret-Frenet vektör çatısı denir. T, N, B vektör alanlarına, c eğrisi üzerinde Serret-Frenet vektör alanları denir [2].

Tanım 1.13. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Serret-Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \quad \tau(s) = \langle B^{'}(s), N(s)\rangle \tag{1.7}$$

eşitliğiyle tanımlı τ fonksiyonuna, c eğrisinin torsiyon (burulma) fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $c(s)$ noktasındaki torsiyonu denir [2].

Teorem 1.14. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları T, N, B ve bu eğrinin eğrilik ve torsiyonu, sırasıyla, κ, τ

olmak üzere,

$$\begin{aligned} T^{'} &= \kappa N \\ N^{'} &= -\kappa N + \tau B \\ B^{'} &= \tau N \end{aligned}$$

dir [2].

Tanım 1.15. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$c^{''}(s) = T^{'} = \mathbf{k} = \kappa N \tag{1.8}$$

eşitliğiyle tanımlanan $\mathbf{k}$ fonksiyonuna, c eğrisinin eğrilik vektörü denir [7].

(1.8) eşitliğinde her iki tarafın iç çarpımı alınırsa,

$$\kappa^2 = \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle = \langle c^{''}, c^{''} \rangle \tag{1.9}$$

elde edilir.

Teorem 1.16. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları T, N, B ve bu eğrinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla κ, τ olmak üzere $\kappa = \kappa^{'} = \kappa^{''} = \cdots = \kappa^{(j-1)} = 0$ ve $\kappa^{(j)} \neq 0$ ise

$$c^{(j+2)}(s) = \kappa^{(j)} N \tag{1.10}$$

ve

$$\tau = \frac{\langle B, c^{(j+2)} \rangle}{(j+1)\kappa^{(j)}} \tag{1.11}$$

dir [7].

İspat (1.8) eşitliğinde $\kappa = 0$ olduğunda birim asli normal vektör tanımlı değildir. $\kappa = 0$ olan noktalarda asli normal vektörü elde etmek için eğrinin yüksek mertebeden türevlerini bulmak gerekir. Eğer $\kappa \equiv 0$ ise eğri bir doğrudur ve eğrinin Frenet çatısı tanımlı değildir. Burada $\kappa = 0$ noktaları izole edilirse Frenet çatısı geçerli olur. Eğer $\kappa = 0$ ve $\kappa^{'} \neq 0$ ise

$$c^{'''}(s) = \kappa^{'} N + \kappa N^{'} \tag{1.12}$$

bulunur. Burada, Teorem 1.14'den $N^{'}$ nin (1.12) eşitliğnde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} c^{'''}(s) &= \kappa^{'} N + \kappa(-\kappa T + \tau B) \\ &= -\kappa^2 T + \kappa^{'} N + \kappa \tau B \end{aligned} \tag{1.13}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \langle B, c^{'''} \rangle &= -\kappa^2 \langle B, T \rangle + \kappa^{'} \langle B, N \rangle + \kappa\tau \langle B, B \rangle \\ &= \kappa\tau \\ \tau &= \frac{\langle B, c^{'''} \rangle}{\kappa} \end{aligned} \tag{1.14}$$

dir.

(1.12) eşitliğinden

$$c^{'''}(s) = \kappa^{'} N \tag{1.15}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla birim asli normal vektörü (1.15) formundadır. Burada

$$\begin{aligned} \langle c^{'''}, c^{'''} \rangle &= \langle \kappa^{'} N, \kappa^{'} N \rangle \\ &= (\kappa^{'})^2 \langle N, N \rangle \\ &= (\kappa^{'})^2 \end{aligned} \tag{1.16}$$

dir. $\kappa = \kappa^{'} = 0$ ve $\kappa^{''} \neq 0$ ise (1.13) eşitliği diferensiyellenebilir olduğu için c nin dördüncü mertebeden türevi hesaplanırsa

$$c^{(4)}(s) = -3\kappa\kappa^{'} T + (\kappa^{''} - \kappa\tau^2 - \kappa^3) N + (2\kappa^{'}\tau + \kappa\tau^{'}) B$$

elde edilir ve verilenler yerlerine yazılırsa

$$c^{(4)}(s) = \kappa^{''} N \tag{1.17}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \langle c^{(4)}, c^{(4)} \rangle &= \langle \kappa^{''} N, \kappa^{''} N \rangle \\ &= (\kappa^{''})^2 \langle N, N \rangle \\ &= (\kappa^{''})^2 \end{aligned} \tag{1.18}$$

dir.

Genel olarak, eğer $\kappa = \kappa^{'} = \kappa^{''} = \cdots = \kappa^{(j-1)} = 0$ ve $\kappa^{(j)} \neq 0$ ise

$$c^{(j+2)}(s) = \kappa^{(j)} N \tag{1.19}$$

olur. Buradan $(\kappa^{(j+2)})^2 = \langle c^{(j+2)}, c^{(j+2)} \rangle$ dir [7].

Torsiyonun değeri eğrilik sıfıra yaklaştığı zaman aşağıdaki gibi ifade edilebilir: Eğer $\kappa = 0$ ve $\kappa^{'} \neq 0$ ise c nin dördüncü mertebeden türevini bulmamız gerekir. Bu dördüncü mertebeden türev (1.13) eşitliğinin diferensiyellenebilir olması ve Serret-Frenet çatısı kullanarak T, N, B nin yerine yazılmasıyla

$$\mathbf{c}^{(4)}(s) = -3\kappa\kappa^{'} T + (\kappa^{''} - \kappa\tau^2 - \kappa^3) N + (2\kappa^{'}\tau + \kappa\tau^{'}) B \tag{1.20}$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda (1.20) eşitliği

$$\mathbf{c}^{(4)}(s) = \kappa^{''}N + 2\kappa^{'}\tau B \tag{1.21}$$

denklemine indirgenir. Böylece

$$\begin{aligned}\langle B, c^{(4)}\rangle &= \kappa^{''}\langle B, N\rangle + 2\kappa^{'}\tau\langle B, B\rangle \\ &= 2\kappa^{'}\tau\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\tau = \frac{\langle B, \mathbf{c}^{(4)}\rangle}{2\kappa^{'}} \tag{1.22}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}c^{(5)}(s) &= (-4\kappa\kappa^{''} - 3(\kappa^{'})^2 + \kappa^4 + \kappa^2\tau^2)T \\ &+ (\kappa^{'''} - 6\kappa^2\kappa^{'} - 3\kappa^{'}\tau^2 - 3\kappa\tau\tau^{'})N \\ &+ (3\kappa^{''}\tau + 3\kappa^{'}\tau^{'} - \kappa^3\tau - \kappa\tau^3 + \kappa\tau^{''})B\end{aligned} \tag{1.23}$$

dir. Eğer $\kappa = \kappa^{'} = 0$ ve $\kappa^{''} \neq 0$ ise

$$c^{(5)}(s) = \kappa^{'''}N + 3\kappa^{''}\tau B$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}\langle B, c^{(5)}\rangle &= \kappa^{'''}\langle B, N\rangle + 3\kappa^{''}\tau\langle B, B\rangle \\ &= 3\kappa^{''}\tau\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\tau = \frac{\langle B, c^{(5)}\rangle}{3\kappa^{''}} \tag{1.24}$$

şeklinde bulunur.

Genel olarak, eğer $\kappa = \kappa^{'} = \kappa^{''} = \cdots = \kappa^{(j-1)} = 0$ ve $\kappa^{(j)} \neq 0$ ise

$$\tau = \frac{\langle B, c^{(j+2)}\rangle}{(j+1)\kappa^{(j)}} \tag{1.25}$$

olur [7].

■

Tanım 1.17. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olsun.

$\{T(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $c(s)$ noktasındaki oskülatör düzlem veya dokunum düzlemi denir.
$\{N(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $c(s)$ noktasındaki normal düzlem veya dik düzlem denir.
$\{T(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $c(s)$ noktasındaki doğrultman düzlemi veya rektifiyan düzlem denir [2].

Tanım 1.18. $\mathbb{R}^3$ de bir M yüzeyi içinde birim hızlı bir $c : I \to M$ eğrisi verilsin. Yüzeyin birim dik vektör alanı $\mathbf{N}$ olsun. c eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere

$$\mathbf{N} \times T = Y \tag{1.26}$$

eşitliğiyle tanımlanan Y vektör alanını göz önüne alalım. Vektörel çarpım özelliklerinden dolayı $\{T(s), Y(s), \mathbf{N}\}$ kümesi, $T_{c(s)}\mathbb{R}^3$ uzayının ortonormal bir tabanı olur. Bu tabana, (c, M) eğri-yüzey çatısı veya Darboux çatısı denir [2].

Tanım 1.19. $c : I \to M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_n(s) = \langle c''(s), \mathbf{N} \rangle \tag{1.27}$$

eşitliğiyle belirli $\kappa_n(s)$ sayısına, (c, M) eğri-yüzey çatısının $c(s)$ noktasındaki normal eğriliği denir [2].

Tanım 1.20. $c : I \to M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_g(s) = \langle c''(s), Y(s) \rangle \tag{1.28}$$

eşitliğiyle belirli $\kappa_g(s)$ sayısına, (c, M) eğri-yüzey çatısının $c(s)$ noktasındaki geodezik eğriliği denir [2].

Tanım 1.21. $c : I \to M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\tau_g(s) = \langle \mathbf{N}, Y'(s) \rangle \tag{1.29}$$

eşitliğiyle belirli $\tau_g(s)$ sayısına, (c, M) eğri-yüzey çatısının $c(s)$ noktasındaki geodezik torsiyonu denir [2].

Tanım 1.22. $c : I \to M$ birim hızlı bir eğri olmak üzere κ_n, κ_g, τ_g fonksiyonlarına; (c, M) eğri-yüzey çatısının eğrilikleri denir [2].

Teorem 1.23. c, M içinde birim hızlı bir eğri olsun.(c, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri κ_n, κ_g, τ_g olduğuna göre

$$\begin{aligned} T^{'} &= \kappa_g Y + \kappa_n \mathbf{N}, \\ Y^{'} &= -\kappa_g T + \tau_g \mathbf{N}, \\ N^{'} &= -\kappa_n T - \tau_g Y \end{aligned}$$

dir [2].

Teorem 1.24. Birim hızlı olmayan,

$$\begin{aligned} c : I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ u &\to c(u) \end{aligned}$$

eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları T, N, B ve bu eğrinin eğrilik ve torsiyonu, sırasıyla κ ve τ olmak üzere,

$$T = \frac{c^{'}}{\|c^{'}\|}, N = B \times T, B = \frac{c^{'} \times c^{''}}{\|c^{'} \times c^{''}\|}, \kappa = \frac{\|c^{'} \times c^{'''}\|}{\|c^{'}\|^3} \; ve \; \tau = \frac{\langle c^{'} \times c^{''}, c^{'''} \rangle}{\|c^{'} \times c^{''}\|^2}$$

dir [2].

Teorem 1.25. Birim hızlı olmayan,

$$\begin{aligned} c : I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ u &\to c(u) \end{aligned}$$

eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları T, N, B ve bu eğrinin eğrilik ve torsiyonu, sırasıyla, κ ve τ olsun. $\|c^{'}(u)\| = v$ olmak üzere, Serret-Frenet çatısı

$$\begin{aligned} T^{'} &= v\kappa N, \\ N^{'} &= -v(\kappa N - \tau B), \\ B^{'} &= v\tau N, \end{aligned}$$

dir [2].

Tanım 1.26. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir M yüzeyi verilsin. M nin her bir p noktası için

$$I_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}, \quad I_p(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$$

biçiminde tanımlı I_p fonksiyonuna, M üstünde birinci temel form denir. $I_p(v_p, w_p)$ yerine çoğunlukla $I(v_p, w_p)$ yazılır.
M nin her bir p noktasına

$$II_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}, \quad II_p(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle$$

biçiminde tanımlı II_p fonksiyonuna, M üstünde ikinci temel form denir. $II_p(v_p, w_p)$ yerine çoğunlukla $II(v_p, w_p)$ yazılır.
M nin her bir p noktasına

$$III_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}, \quad III_p(v_p, w_p) = \langle S^2(v_p), w_p \rangle$$

biçiminde tanımlı III_p fonksiyonuna, M üstünde üçüncü temel form denir (Burada, $S^2 = S \circ S$ anlamındadır.). $III_p(v_p, w_p)$ yerine çoğunlukla $III(v_p, w_p)$ yazılır [2].

Tanım 1.27. $\varphi(U)$, M yüzeyi içinde bir basit yüzey olsun. $q \in U$ için

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle(q) = \langle \varphi_1(q), \varphi_1(q) \rangle$$

eşitliğiyle tanımlanan $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu kısaca E ile gösterilir.
Yani

$$E = \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle$$

dir. Benzer biçimde F, G, l, m, n fonksiyonları

$$F = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$$
$$G = \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle$$

ve

$$l = \langle S \circ \varphi_1, \varphi_1 \rangle$$
$$m = \langle S \circ \varphi_1, \varphi_2 \rangle$$
$$n = \langle S \circ \varphi_2, \varphi_2 \rangle$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Burada φ_1 ve φ_2 sırasıyla φ nin birinci ve ikinci yere göre türevini göstermektedir [2].

Tanım 1.28. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to D(X, Y) = D_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için

1. $D_{fX+gY} Z = f D_X Z + g D_Y Z$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

2. $D_X(fY) = fD_XY + (Xf)Y$,

özelliklerini sağlıyorsa D ye M manifoldu üstünde bir afin konneksiyon ve D_X e de X'e göre kovaryant türev operatörü denir [3].

Tanım 1.29. $c : I \to M$ eğrisi verilsin. $W \in \chi(M)$ olmak üzere her $t \in I$ için $D_{c'(t)}W = 0$ ise W teğet vektör alanı, c eğrisi boyunca paraleldir denir [2].

Tanım 1.30. c eğrisinin hız vektör alanı T, eğri boyunca paralel ise, yani kendi kendine paralel ise c eğrisine M üzerinde bir geodezik eğri adı verilir. Bu durumda,

$$D_T T = 0$$

olacağından

$$\begin{aligned}
D_{T^i \frac{\partial}{\partial x_i}}(T^j \frac{\partial}{\partial x_j}) &= 0 \\
T^i D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(T^j \frac{\partial}{\partial x_j}) &= 0 \\
T^i [\frac{\partial}{\partial x_i}(T^j)\frac{\partial}{\partial x_j} + T^j D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}] &= 0 \\
T^i [\frac{\partial T^k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} + T^j \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x_k}] &= 0, T^k = \frac{dx_k}{dt} \\
\frac{\partial T^k}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \Gamma^k_{ji}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx_i}{dt} &= 0 \\
\frac{dT^k}{dt} + \Gamma^k_{ji}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx_i}{dt} &= 0
\end{aligned}$$

veya

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \Gamma^k_{ji}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx_i}{dt} = 0, 1 \leq k \leq m$$

olarak bulunur [3].

Tanım 1.31. M bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki Riemann konneksiyonu D olsun. O zaman, M üzerinde $\{(I, c)\}$ atlası ile verilen eğri boyunca geodezik eğrilik alanı diye, bu eğrinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere $D_T T$ vektör alanına denir.

$$\begin{aligned}
\kappa_g &: I \to \mathbb{R} \\
& t \to \kappa_g(t) = \|D_T T\|
\end{aligned}$$

olarak tanımlanan κ_g fonksiyonuna da c eğrisinin geodezik eğrilik fonksiyonu denir [3].

Teorem 1.32. *M bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir eğri c olsun. O zaman, c eğrisi M de bir geodeziktir gerek ve yeter şart geodezik eğrilik fonksiyonu sıfır fonksiyondur ve c nın skalar hız fonksiyonu sabittir [3].*

İspat c eğrisinin bir atlasını $\{(I, c)\}$ ile gösterelim. c nın hız vektör alanı da V olsun.
c eğrisi M de bir geodezik eğri olsun. O zaman,

$$D_V V = 0$$

dir. Diğer taraftan;

$$T = \frac{V}{\|V\|}$$

ve

$$V = \|V\|T$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} D_V V &= D_{\|V\|T}(\|V\|T) \\ &= \|V\|D_T(\|V\|T) \\ &= \|V\|[(T\|V\|)T + \|V\|D_T T] \end{aligned}$$

elde edilir. $D_V V = 0$ ve $\|V\| \neq 0$ olduğundan

$$(T\|V\|)T + \|V\|D_T T = 0 \tag{1.30}$$

dır. (1.30) denklemi kendisi ile iç çarpıma alınırsa

$$[T(\|V\|)]^2 + \|V\|^2\langle D_T T, D_T T\rangle + 2T(\|V\|)\|V\|\langle T, D_T T\rangle = 0$$

bulunur. Halbuki, $\langle T, T\rangle = 1$ olduğundan

$$T\langle T, T\rangle = 0$$

ve

$$\langle T, D_T T\rangle = 0$$

dır. Bu değer yardımıyla

$$[T(\|V\|)]^2 + \|V\|^2\langle D_T T, D_T T\rangle = 0$$

dir. Buradan

$$T(\|V\|) = 0 \ ve \ D_T T = 0$$

ve

$$T(\|V\|) = 0 \ ve \ \kappa_g = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde, c eğrisi M de geodezik ise c nın geodezik eğrilik fonksiyonu sıfır fonksiyonu ve c nın skalar hız fonksiyonu sabit fonksiyondur.
c nın skalar hız fonksiyonu sabit ve geodezik eğrilik fonksiyonu sıfır olsun. O zaman

$$T(\|V\|) = 0 \ ve \ \kappa_g = 0$$

dır. O halde

$$\|V\|[T(\|V\|)T + \|V\|D_T T] = 0$$

veya

$$D_{\|V\|T}(\|V\|T) = 0$$

ve buradan da

$$D_V V = 0$$

bulunur. O halde, c eğrisi M de bir geodezik eğridir [3]. ■

Tanım 1.33. *M yüzeyinin p noktasındaki baş eğrilikleri $k_1(p)$ ve $k_2(p)$ olsun.*

1. $k_1(p)k_2(p) > 0$ ise p noktasına M yüzeyinin bir eliptik noktası denir.
2. $k_1(p)k_2(p) = 0$ ve $k_1(p)$ ile $k_2(p)$ den en az biri sıfırdan farklı ise p noktasına M yüzeyinin bir parabolik noktası denir.
   $k_1(p) = 0$ ve $k_2(p) = 0$ ise p noktasına M yüzeyinin bir düzlemsel noktası denir.
3. $k_1(p)k_2(p) < 0$ ise p noktasına M yüzeyinin bir hiperbolik noktası denir [3].

Tanım 1.34.

$$II(\varphi_*(\mu), \varphi_*(\mu)) = 1$$

ve

$$II(\varphi_*(\mu), \varphi_*(\mu)) = -1$$

denklemlerinin belirttiği konik eğrileri sırasıyla D^+ ve D^- ile gösterildiğine göre $D^+ \cup D^-$ kümesine, M yüzeyinin p_0 noktasında Dupin göstergesi denir ve D ile gösterilir [3].

2. ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA İKİ YÜZEYİN ARAKESİT EĞRİSİ

Bu bölümde, yüzeylerin transversal ve teğetsel arakesit durumları incelendi. Transversal arakesit durumunda eğrinin normal eğriliği, geodezik eğriliği, geodezik torsiyonu, eğrilik vektörü, eğriliği ve torsiyonu hesaplandı. Teğetsel arakesit durumunda arakesit eğrisinin normal eğriliği, eğrilik vektörü ve eğriliği hesaplandı. Bu bölümde [1] ve [7] kaynaklarından yararlanılmıştır.

2.1. Yüzeyler Üzerinde Temel Hesaplar

Bu bölümde parametrik formda ve kapalı formda verilen yüzeyler için temel hesaplamalar yapılacaktır.

2.1.1. Parametrik Formda Verilen Yüzeyler

Parametrik formda

$$x = x_A(u_A, v_A), \quad y = y_A(u_A, v_A), \quad z = z_A(u_A, v_A)$$

ve

$$x = x_B(u_B, v_B), \quad y = y_B(u_B, v_B), \quad z = z_B(u_B, v_B)$$

veya vektörel formda

$$r = S^A(u_A, v_A)$$

ve

$$r = S^B(u_B, v_B)$$

ile verilen iki parametrik yüzey A ve B olsun. Bu yüzeylerin regüler olduğunu farz edelim. Başka bir değişle

$$S^A_{u_A} \times S^A_{v_A} \neq 0, \quad S^B_{u_B} \times S^B_{v_B} \neq 0 \tag{2.1}$$

olsun. Parametrik formda verilen yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \frac{S_u \times S_v}{\|S_u \times S_v\|} \tag{2.2}$$

biçimindedir. uv düzleminde $u = u(s)$ ve $v = v(s)$ eğrisi bir $S(u, v)$ parametrik yüzeyi üzerinde $r = c(s) = S(u(s), v(s))$ eğrisi tanımlar. Parametrik formda verilen yüzey üzerindeki bir eğride zincir kuralı kullanarak $c^{'}$, $c^{''}$, $c^{'''}$ gibi arakesit eğrisinin ilk üç türevi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$c^{'}(s) = S_u u^{'} + S_v v^{'}, \tag{2.3}$$

$$c^{''}(s) = S_{uu}(u^{'})^2 + 2S_{uv}u^{'}v^{'} + S_{vv}(v^{'})^2 + S_u u^{''} + S_v v^{''}, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} c^{'''}(s) = {} & S_{uuu}(u^{'})^3 + 3S_{uuv}(u^{'})^2 v^{'} + 3S_{uvv}u^{'}(v^{'})^2 + S_{vvv}(v^{'})^3 \\ & + 3[S_{uu}u^{'}u^{''} + S_{uv}(u^{''}v^{'} + u^{'}v^{''}) + S_{vv}v^{'}v^{''}] + S_u u^{'''} + S_v v^{'''} \end{aligned} \tag{2.5}$$

[7].

2.1.2. Kapalı Formda Verilen Yüzeyler

$f^A(x, y, z) = 0$ ve $f^B(x, y, z) = 0$ kapalı formda verilmiş iki yüzey olsun. Bu yüzeylerin regüler olduğunu farz edelim. Başka bir değişle

$$\nabla f^A \neq 0, \quad \nabla f^B \neq 0 \tag{2.6}$$

olsun. $f(x, y, z) = 0$ kapalı formunda verilen bir yüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \tag{2.7}$$

biçimindedir. $f(x(s), y(s), z(s)) = 0$ kısıtlamasıyla $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ eğrisi $f(x, y, z) = 0$ kapalı formda verilen yüzey üzerinde bir eğri tanımlar. Kapalı formda verilen yüzey üzerindeki bir eğride zincir kuralı kullanarak $df/ds, d^2f/ds^2$ ve d^3f/ds^3 gibi arakesit eğrisinin ilk üç türevi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{df}{ds} = f_x x^{'} + f_y y^{'} + f_z z^{'} = 0, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{ds^2} = {} & f_{xx}(x^{'})^2 + f_{yy}(y^{'})^2 + f_{zz}(z^{'})^2 \\ & + 2(f_{xy}x^{'}y^{'} + f_{yz}y^{'}z^{'} + f_{xz}x^{'}z^{'}) \\ & + f_x x^{''} + f_y y^{''} + f_z z^{''} = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3 f}{ds^3} &= f_{xxx}(x^{'})^3 + f_{yyy}(y^{'})^3 + f_{zzz}(z^{'})^3 \\
&+ 3[f_{xxy}(x^{'})^2 y^{'} + f_{xxz}(x^{'})^2 z^{'} + f_{xyy}x^{'}(y^{'})^2 \\
&+ f_{yyz}(y^{'})^2 z^{'} + f_{xzz}x^{'}(z^{'})^2 + f_{yzz}y^{'}(z^{'})^2 + 2f_{xyz}x^{'}y^{'}z^{'}] \\
&+ 3[f_{xx}x^{'}x^{''} + f_{yy}y^{'}y^{''} + f_{zz}z^{'}z^{''} + f_{xy}(x^{''}y^{'} + x^{'}y^{''}) \\
&+ f_{yz}(y^{''}z^{'} + y^{'}z^{''}) + f_{xz}(x^{''}z^{'} + x^{'}z^{''})] + f_x x^{'''} + f_y y^{'''} + f_z z^{'''} = 0 \quad (2.10)
\end{aligned}
$$

[7].

2.2. TRANSVERSAL ARAKESİT EĞRİSİ

Bu bölümde, transversal arakesit eğrisinin normal eğriliği, geodezik eğriliği, geodezik torsiyonu, eğrilik vektörü, eğriliği ve torsiyonu hesaplandı.

2.2.1. Transversal Arakesit Eğrisinin Teğetsel Yönü

c arakesit eğrisinin teğet vektörü her iki yüzeyin teğet düzlemi üzerinde yatar. Böylece; c transversal arakesit eğrisinin teğet vektörü Şekil 2.1 de gösterildiği gibi P notasındaki iki yüzeyin birim normal vektörlerinin vektörel çarpımı olarak

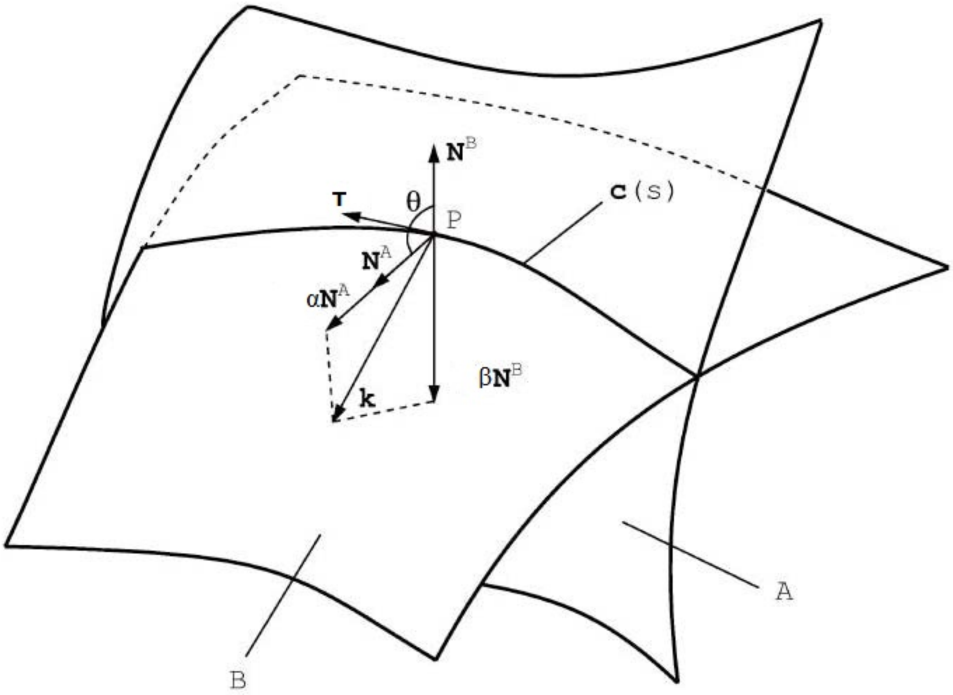
$$
T = \frac{\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B}{\|\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B\|} \qquad (2.11)
$$

biçiminde bulunur. Burada $\mathbf{N}^A$ ve $\mathbf{N}^B$, bu iki yüzeyin birim normal vektör alanlarıdır [7].

2.2.2. Normal Eğrilik

Parametrik formda verilen bir yüzey için normal eğrilik, yüzeyin birim normali üzerine (2.4) eşitliğinde verilen $c^{''}$ nin izdüşümü yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\kappa_n = \langle c^{''}, \mathbf{N}\rangle &= \langle S_{uu}(u^{'})^2 + 2S_{uv}u^{'}v^{'} + S_{vv}(v^{'})^2 + S_u u^{''} + S_v v^{''}, \mathbf{N}\rangle \\
&= \langle S_{uu}, \mathbf{N}\rangle (u^{'})^2 + 2\langle S_{uv}, \mathbf{N}\rangle u^{'}v^{'} + \langle S_{vv}, \mathbf{N}\rangle (v^{'})^2 + \langle S_u, \mathbf{N}\rangle u^{''} + \langle S_v, \mathbf{N}\rangle \\
&= l(u^{'})^2 + 2mu^{'}v^{'} + n(v^{'})^2 \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$



Şekil 2.1: İki yüzeyin transversal arakesiti

biçiminde hesaplanır. Burada l, m, n ;

$$l = \langle S_{uu}, \mathbf{N} \rangle, \quad m = \langle S_{uv}, \mathbf{N} \rangle, \quad n = \langle S_{vv}, \mathbf{N} \rangle \tag{2.13}$$

ile belirli ikinci temel formun katsayılarıdır.
κ_n yi hesaplamak için u' ve v' hesaplanmalıdır. (2.3) eşitliğinden arakesit eğrisinin birim teğet vektörünü bildiğimiz için S_u ve S_v ile (2.3) eşitliğinin her iki tarafı iç çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle S_u, T \rangle &= \langle S_u, S_u u' + S_v v' \rangle \\ &= \langle S_u, S_u \rangle u' + \langle S_u, S_v \rangle v' \\ &= Eu' + Fv' \end{aligned} \tag{2.14}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle S_v, T \rangle &= \langle S_v, S_u u' + S_v v' \rangle \\ &= \langle S_v, S_u \rangle u' + \langle S_v, S_v \rangle v' \\ &= Fu' + Gv' \end{aligned} \tag{2.15}$$

eşitlikleri bulunur. Burada E, F, G;

$$E = \langle S_u, S_u \rangle, \quad F = \langle S_u, S_v \rangle, \quad G = \langle S_v, S_v \rangle \tag{2.16}$$

şeklindeki birinci temel formun katsayılarıdır. (2.14) ve (2.15) eşitliklerinin belirttiği denklem sisteminden,

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle S_u, T\rangle \\ \langle S_v, T\rangle \end{bmatrix}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} \langle S_u, T\rangle G - \langle S_v, T\rangle F \\ \langle S_v, T\rangle E - \langle S_u, T\rangle F \end{bmatrix}$$

eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\langle S_u, T\rangle G - \langle S_v, T\rangle F}{EG - F^2}, \\ v' &= \frac{\langle S_v, T\rangle E - \langle S_u, T\rangle F}{EG - F^2} \end{aligned} \tag{2.17}$$

biçiminde elde edilir.

Dolayısıyla, A ve B yüzeyleri için arakesit eğrisinin normal eğrilikleri, sırasıyla,

$$\kappa_n^A = l^A(u_A')^2 + 2m^A u_A' v_A' + n^A (v_A')^2 \tag{2.18}$$

ve

$$\kappa_n^B = l^B(u_B')^2 + 2m^B u_B' v_B' + n^B (v_B')^2 \tag{2.19}$$

dir. Burada u_A', v_A' ve u_B', v_B'

$$\begin{aligned} u_A' &= \frac{\langle S_{u_A}^A, T\rangle G^A - \langle S_{v_A}^A, T\rangle F^A}{E^A G^A - (F^A)^2}, \\ v_A' &= \frac{\langle S_{v_A}^A, T\rangle E^A - \langle S^A{}_{u_A}, T\rangle F^A}{E^A G^A - (F^A)^2} \end{aligned} \tag{2.20}$$

ve

$$\begin{aligned} u_B' &= \frac{\langle S_{u_B}^B, T\rangle G^B - \langle S_{v_B}^B, T\rangle F^B}{E^B G^B - (F^B)^2}, \\ v_B' &= \frac{\langle S_{v_B}^B, T\rangle E^B - \langle S^B{}_{u_B}, T\rangle F^B}{E^B G^B - (F^B)^2} \end{aligned} \tag{2.21}$$

dir.

Benzer bir şekilde (2.9) eşitliği kullanılarak kapalı formda verilen yüzeyin normal eğriliği de hesaplanabilir. (2.9) eşitliğinden yüzeyin $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ birim normali üzerine

$c^{''} = (x^{''}, y^{''}, z^{''})$ eğrilik vektörünün izdüşümü

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= \langle (x^{''}, y^{''}, z^{''}), \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \rangle \\
&= \langle (x^{''}, y^{''}, z^{''}), \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} (f_x, f_y, f_z) \rangle \\
&= \frac{f_x x^{''} + f_y y^{''} + f_z z^{''}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \\
&= -\frac{f_{xx}(x^{'})^2 + f_{yy}(y^{'})^2 + f_{zz}(z^{'})^2 + 2(f_{xy}x^{'}y^{'} + f_{yz}y^{'}z^{'} + f_{xz}x^{'}z^{'})}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $x^{'}, y^{'}, z^{'}$ (2.11) eşitliği tarafından belirlenen T nin üç bileşenidir [7].

2.2.3. Geodezik Eğrilik

Bu bölümde, c arakesit eğrisinin geodezik eğriliği hesaplanacaktır.
c eğrisinin ikinci türevi

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} = c^{''}(s) &= S^A_{u_A u_A}(u^{'}_A)^2 + 2S^A_{u_A v_A} u^{'}_A v^{'}_A + S^A_{v_A v_A}(v^{'}_A)^2 + S^A_{u_A} u^{''}_A + S^A_{v_A} v^{''}_A \\
&= S^B_{u_B u_B}(u^{'}_B)^2 + 2S^B_{u_B v_B} u^{'}_B v^{'}_B + S^B_{v_B v_B}(v^{'}_B)^2 + S^B_{u_B} u^{''}_B + S^B_{v_B} v^{''}_B \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

dir.
Dolayısıyla, (1.28) eşitliğinden, c arakesit eğrisinin geodezik eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa_g &= \langle T^{'}, Y \rangle \\
&= \langle T^{'}, \mathbf{N} \times T \rangle \\
&= \langle S_{uu}(u^{'})^2 + 2S_{uv}u^{'}v^{'} + S_{vv}(v^{'})^2 + S_u u^{''} + S_v v^{''}, \frac{u^{'}}{\|S_u \times S_v\|}(ES_v - FS_u) \\
&+ \frac{v^{'}}{\|S_u \times S_v\|}(FS_v - GS_u) \rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|S_u \times S_v\|}\{\langle S_{uu}(u^{'})^2, u^{'}(ES_v - FS_u)\rangle + \langle S_{uu}(u^{'})^2, v^{'}(FS_v - GS_u)\rangle \\
&+ \langle 2S_{uv}u^{'}v^{'}, u^{'}(ES_v - FS_u)\rangle + \langle 2S_{uv}u^{'}v^{'}, v^{'}(FS_v - GS_u)\rangle \\
&+ \langle S_{vv}v^{'2}, u^{'}(ES_v - FS_u)\rangle + \langle S_{vv}v^{'2}, v^{'}(FS_v - GS_u)\rangle + \langle S_u u^{''}, u^{'}(ES_v - FS_u)\rangle \\
&+ \langle S_u u^{''}, v^{'}(FS_v - GS_u)\rangle + \langle S_v v^{''}, u^{'}(ES_v - FS_u)\rangle + \langle S_v v^{''}, v^{'}(FS_v - GS_u)\rangle\} \\
&= \frac{1}{\|S_u \times S_v\|}\{(u^{'})^3[E\langle S_{uu}, S_v\rangle - F\langle S_{uu}, S_u\rangle] + (u^{'})^2 v^{'}[F\langle S_{uu}, S_v\rangle - G\langle S_{uu}, S_u\rangle] \\
&+ 2(u^{'})^2 v^{'}[E\langle S_{uv}, S_v\rangle - F\langle S_{uv}, S_u\rangle] + 2u^{'}(v^{'})^2[F\langle S_{uv}, S_v\rangle - G\langle S_{uv}, S_u\rangle] \\
&+ u^{'}(v^{'})^2[E\langle S_{vv}, S_v\rangle - F\langle S_{vv}, S_u\rangle] + (v^{'})^3[F\langle S_{vv}, S_v\rangle - G\langle S_{vv}, S_u\rangle] \\
&+ u^{''}u^{'}[E\langle S_u, S_v\rangle - F\langle S_u, S_u\rangle] + u^{''}v^{'}[F\langle S_u, S_v\rangle - G\langle S_u, S_u\rangle] \\
&+ u^{'}v^{''}[E\langle S_v, S_v\rangle - F\langle S_v, S_u\rangle] + v^{''}v^{'}[F\langle S_v, S_v\rangle - G\langle S_v, S_u\rangle]\} \\
&= \frac{1}{\|S_u \times S_v\|}\{\{(u^{'})^3[E\langle S_{uu}, S_v\rangle - F\langle S_{uu}, S_u\rangle] + (u^{'})^2 v^{'}[F\langle S_{uu}, S_v\rangle - G\langle S_{uu}, S_u\rangle]\} \\
&+ \{2(u^{'})^2 v^{'}[E\langle S_{uv}, S_v\rangle - F\langle S_{uv}, S_u\rangle] + 2u^{'}(v^{'})^2[F\langle S_{uv}, S_v\rangle - G\langle S_{uv}, S_u\rangle]\} \\
&+ \{u^{'}v^{''}[E\langle S_v, S_v\rangle - F\langle S_v, S_u\rangle] + (v^{'})^3[F\langle S_{vv}, S_v\rangle - G\langle S_{vv}, S_u\rangle]\}\} \\
&+ (EG - F^2)(u^{'}v^{''} - u^{''}v^{'}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\{[(F_u - \frac{E_v}{2})\langle S_u, T\rangle - \frac{E_u}{2}\langle S_v, T\rangle](u'')^2 + (G_u\langle S_u, T\rangle - E_v\langle S_v, T\rangle)u^{'}v^{'} \\
&+ [\frac{G_v}{2}\langle S_u, T\rangle - (F_v - \frac{G_u}{2})\langle S_v, T\rangle](v^{'})^2\} + \sqrt{EG - F^2}(u^{'}v^{''} - v^{'}u^{''}) \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Dolayısıyla A ve B yüzeyleri için arakesit eğrisinin geodezik eğrilikleri, sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
\kappa_g^A &= \frac{1}{\sqrt{E^A G^A - (F^A)^2}}\{[(F_u^A - \frac{E_v^A}{2})\langle S_{u_A}^A, T\rangle - \frac{E_u^A}{2}\langle S_{v_A}^A, T\rangle](u_A{}^{'})^2 \\
&+ (G_u^A\langle S_{u_A}^A, T\rangle - E_u^A\langle S_{v_A}^A, T\rangle)u_A{}^{'}v_A{}^{'} \\
&+ [\frac{G_u^A}{2}\langle S_{u_A}^A, T\rangle - (F_v^A - \frac{G_u^A}{2})\langle S_{v_A}^A, T\rangle](v_A{}^{'})^2\} \\
&+ \sqrt{E^A G^A - (F^A)^2}(u_A{}^{'}v_A{}^{''} - u_A{}^{''}v_A{}^{'})
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\kappa_g^B &= \frac{1}{\sqrt{E^B G^B - (F^B)^2}}\{[(F_u^B - \frac{E_v^B}{2})\langle S_{u_B}^B, T\rangle - \frac{E_u^B}{2}\langle S_{v_B}^B, T\rangle](u_B{}^{'})^2 \\
&+ (G_u^B\langle S_{u_B}^B, T\rangle - E_u^B\langle S_{v_B}^B, T\rangle)u_B{}^{'}v_B{}^{'} \\
&+ [\frac{G_u^B}{2}\langle S_{u_B}^B, T\rangle - (F_v^B - \frac{G_u^B}{2})\langle S_{v_B}^B, T\rangle](v_B{}^{'})^2\} \\
&+ \sqrt{E^B G^B - (F^B)^2}(u_B{}^{'}v_B{}^{''} - u_B{}^{''}v_B{}^{'})
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $u_A^{''}, v_A^{''}$ ve $u_B^{''}, v_B^{''}$ bilinmeyenlerini bulmak için (2.23) eşitliği aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse;

$$S_{u_A}^A u_A^{''} + S_{v_A}^A v_A^{''} = S_{u_B}^B u_B^{''} + S_{v_B}^B v_B^{''} + \Delta \tag{2.25}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}\Delta &= S_{u_B u_B}^B (u_B^{'})^2 + 2S_{u_B v_B}^B u_B^{'} v_B^{'} + S_{v_B v_B}^B (v_B^{'})^2 - S_{u_A u_A}^A (u_A^{'})^2 \\ &- 2S_{u_A v_A}^A u_A^{'} v_A^{'} - S_{v_A v_A}^A (v_A^{'})^2\end{aligned} \tag{2.26}$$

dir. (2.25) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{N}^B$ ile iç çarpım yapılırsa

$$\langle S_{u_A}^A, \mathbf{N}^B\rangle u_A{}'' + \langle S_{v_A}^A, \mathbf{N}^B\rangle v_A{}'' = \langle S_{u_B}^B, \mathbf{N}^B\rangle u_B{}'' + \langle S_{v_B}^B, \mathbf{N}^B\rangle v_B{}'' + \langle \Delta, \mathbf{N}^B\rangle \tag{2.27}$$

eşitliği ve (2.23) eşitliğinin her iki tarafı T ile iç çarpılırsa,

$$\langle T', T\rangle = \langle S_{u_A u_A}^A, T\rangle (u_A{}')^2 + 2\langle S_{u_A v_A}^A, T\rangle u_A{}' v_A{}' + \langle S_{v_A v_A}^A, T\rangle (v_A{}')^2 + \langle S_{u_A}^A, T\rangle u_A{}'' + \langle S_{v_A}^A, T\rangle v_A{}'' = 0$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\langle S_{u_A}^A, T\rangle u_A{}'' + \langle S_{v_A}^A, T\rangle v_A{}'' = -\langle S_{u_A u_A}^A, T\rangle (u_A{}')^2 - 2\langle S_{u_A v_A}^A, T\rangle u_A{}' v_A{}' - \langle S_{v_A v_A}^A, T\rangle (v_A{}')^2 \tag{2.28}$$

bulunur. (2.27) ve (2.28) eşitliklerinin belirttiği denklem sisteminden,

$$\begin{bmatrix} \langle S_{u_A}^A, \mathbf{N}^B\rangle & \langle S_{v_A}^A, \mathbf{N}^B\rangle \\ \langle S_{u_A}^A, T\rangle & \langle S_{v_A}^A, T\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A^{''} \\ v_A^{''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle S_{u_B}^B, \mathbf{N}^B\rangle u_B{}'' + \langle S_{v_B}^B, \mathbf{N}^B\rangle v_B{}'' + \langle \Delta, \mathbf{N}^B\rangle \\ -\langle S_{u_A u_A}^A, T\rangle (u_A{}')^2 - 2\langle S_{u_A v_A}^A, T\rangle u_A{}' v_A{}' - \langle S_{v_A v_A}^A, T\rangle (v_A{}')^2 \end{bmatrix}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{bmatrix} u_A^{''} \\ v_A^{''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\varepsilon_{11} u_B{}'' - \varepsilon_{12} v_B{}'' - \varepsilon_{13}(u_A{}')^2 - \varepsilon_{14} u_A{}' v_A{}' - \varepsilon_{15}(v_A{}')^2}{\langle S_{u_A}^A, \mathbf{N}^B\rangle \langle S_{v_A}^A, T\rangle - \langle S_{v_A}^A, \mathbf{N}^B\rangle \langle S_{u_A}^A, T\rangle} \\ \dfrac{\varepsilon_{21} u_B{}'' + \varepsilon_{22} v_B{}'' + \varepsilon_{23}(u_A{}')^2 + \varepsilon_{24} u_A{}' v_A{}' - \varepsilon_{25}(v_A{}')^2}{\langle S_{u_A}^A, \mathbf{N}^B\rangle \langle S_{v_A}^A, T\rangle - \langle S_{v_A}^A, \mathbf{N}^B\rangle \langle S_{u_A}^A, T\rangle} \end{bmatrix}$$

eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} u_A^{''} &= \frac{-\varepsilon_{11} u_B{}'' - \varepsilon_{12} v_B{}'' - \varepsilon_{13}(u_A{}')^2 - \varepsilon_{14} u_A{}' v_A{}' - \varepsilon_{15}(v_A{}')^2}{\langle S_{u_A}^A, N^B\rangle \langle S_{v_A}^A, T\rangle - \langle S_{v_A}^A, \mathbf{N}^B\rangle \langle S_{u_A}^A, T\rangle}, \\ v_A^{''} &= \frac{\varepsilon_{21} u_B{}'' + \varepsilon_{22} v_B{}'' + \varepsilon_{23}(u_A{}')^2 + \varepsilon_{24} u_A{}' v_A{}' - \varepsilon_{25}(v_A{}')^2}{\langle S_{u_A}^A, \mathbf{N}^B\rangle \langle S_{v_A}^A, T\rangle - \langle S_{v_A}^A, \mathbf{N}^B\rangle \langle S_{u_A}^A, T\rangle} \end{aligned} \tag{2.29}$$

biçiminde elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \langle S^A_{v_A}, T\rangle\langle S^B_{u_B}, \mathbf{N}^B\rangle \\
\varepsilon_{12} &= \langle S^A_{v_A}, T\rangle\langle S^B_{v_B}, \mathbf{N}^B\rangle \\
\varepsilon_{13} &= \langle S^A_{v_A}, T\rangle\langle \Delta, \mathbf{N}^B\rangle - \langle S^A_{v_A}, \mathbf{N}^B\rangle\langle S^A_{u_A u_A}, T\rangle \\
\varepsilon_{14} &= 2\langle S^A_{v_A}, \mathbf{N}^B\rangle\langle S^A_{u_A v_A}, T\rangle \\
\varepsilon_{15} &= \langle S^A_{v_A}, \mathbf{N}^B\rangle\langle S^A_{v_A v_A}, T\rangle \\
\varepsilon_{21} &= \langle S^A_{u_A}, T\rangle\langle S^B_{u_B}, \mathbf{N}^B\rangle \\
\varepsilon_{22} &= \langle S^A_{u_A}, T\rangle\langle S^B_{v_B}, \mathbf{N}^B\rangle \\
\varepsilon_{23} &= \langle S^A_{u_A}, T\rangle\langle \Delta, \mathbf{N}^B\rangle + \langle S^A_{u_A}, \mathbf{N}^B\rangle\langle S^A_{u_A u_A}, T\rangle \\
\varepsilon_{24} &= 2\langle S^A_{u_A}, \mathbf{N}^B\rangle\langle S^A_{u_A v_A}, T\rangle \\
\varepsilon_{25} &= \langle S^A_{u_A}, \mathbf{N}^B\rangle\langle S^A_{v_A v_A}, T\rangle
\end{aligned}$$

dir. ${u_A}'', {v_A}''$ ve ${u_B}'', {v_B}''$ katsayıları arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır. (2.25) eşitliğini $S^B_{v_B}$ ile vektörel çarparsak,

$$(S^A_{u_A}\times S^B_{v_B})u''_A+(S^A_{v_A}\times S^B_{v_B})v''_A=(S^B_{u_B}\times S^B_{v_B})u''_B+(S^B_{v_B}\times S^B_{v_B})v''_B+(\Delta\times S^B_{v_B}) \tag{2.30}$$

eşitliği elde edilir. (2.30) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra $\mathbf{N}^B$ yüzey normali üzerine izdüşümü alınırsa,

$$\langle(S^A_{u_A}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle u''_A+\langle(S^A_{v_A}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle v''_A=\langle(S^B_{u_B}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle u''_B+\langle(\Delta\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle \tag{2.31}$$

bulunur. Buradan u''_B

$$u''_B=\frac{\langle(S^A_{u_A}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle}{\langle(S^B_{u_B}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle}u''_A+\frac{\langle(S^A_{v_A}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle}{\langle(S^B_{u_B}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle}v''_A+\frac{\langle(S^B_{v_B})\times\Delta,\mathbf{N}^B\rangle}{\langle(S^B_{u_B}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle} \tag{2.32}$$

dir. Benzer şekilde (2.25) eşitliği $S^B_{u_B}$ ile vektörel çarpılırsa,

$$(S^A_{u_A}\times S^B_{u_B})u''_A+(S^A_{v_A}\times S^B_{u_B})v''_A=(S^B_{u_B}\times S^B_{u_B})u''_B+(S^B_{v_B}\times S^B_{u_B})v''_B+(\Delta\times S^B_{u_B}) \tag{2.33}$$

eşitliği elde edilir. (2.33) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra $\mathbf{N}^B$ yüzey normali üzerine izdüşümü alınırsa,

$$\langle(S^A_{u_A}\times S^B_{u_B}),\mathbf{N}^B\rangle u''_A+\langle(S^A_{v_A}\times S^B_{u_B}),\mathbf{N}^B\rangle v''_A=\langle(S^B_{v_B}\times S^B_{u_B}),\mathbf{N}^B\rangle v''_B+\langle(\Delta\times S^B_{u_B}),\mathbf{N}^B\rangle \tag{2.34}$$

bulunur. Buradan v''_B

$$\begin{aligned}
v''_B &= \frac{\langle(S^A_{u_A}\times S^B_{u_B}),\mathbf{N}^B\rangle}{\langle(S^B_{v_B}\times S^B_{u_B}),\mathbf{N}^B\rangle}u''_A+\frac{\langle(S^A_{v_A}\times S^B_{u_B}),\mathbf{N}^B\rangle}{\langle(S^B_{v_B}\times S^B_{u_B}),\mathbf{N}^B\rangle}v''_A+\frac{\langle(S^B_{u_B})\times\Delta,\mathbf{N}^B\rangle}{\langle(S^B_{u_B}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle} \\
&= \frac{\langle(S^B_{u_B}\times S^A_{u_A}),\mathbf{N}^B\rangle}{\langle(S^B_{u_B}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle}u''_A+\frac{\langle(S^B_{u_B}\times S^A_{v_A}),\mathbf{N}^B\rangle}{\langle(S^B_{u_B}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle}v''_A+\frac{\langle\Delta\times(S^B_{u_B}),\mathbf{N}^B\rangle}{\langle(S^B_{u_B}\times S^B_{v_B}),\mathbf{N}^B\rangle}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

dir. $(u_B^{''}, v_B^{''})$ aşağıdaki gibi $(u_A^{''}, v_A^{''})$ tarafından ifade edilirse:

$$\begin{aligned} u_B^{''} &= a_{11}u_A^{''} + a_{12}v_A^{''} + a_{13}, \\ v_B^{''} &= a_{21}u_A^{''} + a_{22}v_A^{''} + a_{23}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Burada

$$a_{11} = \frac{\langle (S_{u_A}^A \times S_{v_B}^B), \mathbf{N}^B \rangle}{\langle (S_{u_B}^B \times S_{v_B}^B), \mathbf{N}^B \rangle} = \frac{\det(S_{u_A}^A, S_{v_B}^B, \mathbf{N}^B)}{\sqrt{E^B G^B - (F^B)^2}} \tag{2.37}$$

$$a_{12} = \frac{\langle (S_{v_A}^A \times S_{v_B}^B), \mathbf{N}^B \rangle}{\langle (S_{u_B}^B \times S_{v_B}^B), \mathbf{N}^B \rangle} = \frac{\det(S_{v_A}^A, S_{v_B}^B, \mathbf{N}^B)}{\sqrt{E^B G^B - (F^B)^2}} \tag{2.38}$$

$$a_{13} = \frac{\langle S_{v_B}^B \times \Delta, \mathbf{N}^B \rangle}{\langle S_{u_B}^B \times S_{v_B}^B, \mathbf{N}^B \rangle} = \frac{\det(S_{v_B}^B, \Delta, \mathbf{N}^B)}{\sqrt{E^B G^B - (F^B)^2}}, \tag{2.39}$$

$$a_{21} = \frac{\langle (S_{u_B}^A \times S_{u_A}^A), \mathbf{N}^B \rangle}{\langle (S_{u_B}^B \times S_{v_B}^B), \mathbf{N}^B \rangle} = \frac{\det(S_{u_B}^B, S_{v_A}^A, \mathbf{N}^B)}{\sqrt{E^B G^B - (F^B)^2}} \tag{2.40}$$

$$a_{22} = \frac{\langle (S_{u_B}^B \times S_{v_A}^A), \mathbf{N}^B \rangle}{\langle (S_{u_B}^B \times S_{v_B}^B), \mathbf{N}^B \rangle} = \frac{\det(S_{u_B}^B, S_{v_A}^A, \mathbf{N}^B)}{\sqrt{E^B G^B - (F^B)^2}} \tag{2.41}$$

$$a_{23} = \frac{\langle \Delta \times S_{u_B}^B, \mathbf{N}^B \rangle}{\langle S_{u_B}^B \times S_{v_B}^B, \mathbf{N}^B \rangle} = \frac{\det(\Delta, S_{u_B}^B, \mathbf{N}^B)}{\sqrt{E^B G^B - (F^B)^2}}. \tag{2.42}$$

dir.

Benzer şekilde kapalı formda verilen yüzeyler için $\nabla f^A = (f_x^A, f_y^A, f_z^A) \neq 0$ ve $\nabla f^B = (f_x^B, f_y^B, f_z^B) \neq 0$ olduğu için normal vektörleri

$$N^A = \frac{\nabla f^A}{\|\nabla f^A\|}, N^B = \frac{\nabla f^B}{\|\nabla f^B\|}$$

olarak gösterilir. Arakesit eğrisinin teğet vektörü

$$T = \frac{\nabla f^A \times \nabla f^B}{\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|} \tag{2.43}$$

dir.

c arakesit eğrisinin geodezik eğriliği,

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \langle T^{'}, Y \rangle \\ &= \langle (x^{''}, y^{''}, z^{''}), \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \times (x^{'}, y^{'}, z^{'}) \rangle \\ &= \det((x^{''}, y^{''}, z^{''}), \frac{f_x, f_y, f_z}{\|\nabla f\|}, (x^{'}, y^{'}, z^{'})) \\ &= \begin{vmatrix} x^{''} & \frac{f_x}{\|\nabla f\|} & x^{'} \\ y^{''} & \frac{f_y}{\|\nabla f\|} & y^{'} \\ z^{''} & \frac{f_{xz}}{\|\nabla f\|} & z^{'} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\nabla f\|}\{(y^{'}z^{''} - y^{''}z^{'})f_x + (z^{'}x^{''} - z^{''}x^{'})f_y + (x^{'}y^{''} - x^{''}y^{'})f_z\} \end{aligned}$$

dir. Burada $x^{'}, y^{'}, z^{'}$ (2.43) eşitliği ile belirlidir. Dolayısıyla, geodezik eğriliği bulmak için $x^{''}, y^{''}, z^{''}$ elde edilmelidir. $\langle T, T^{'} \rangle = 0$ eşitliğini kullanarak $x^{''}, y^{''}, z^{''}$ ye göre ilk lineer eşitlik

$$x^{'}x^{''} + y^{'}y^{''} + z^{'}z^{''} = 0 \tag{2.44}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, $\langle T, \nabla f \rangle = 0$ olduğundan verilen eşitlikte her iki tarafın türevi alınırsa

$$\langle T^{'}, \nabla f \rangle = -\langle T, (\nabla f)^{'} \rangle$$

elde edilir. Buradan da diğer lineer eşitlik

$$\begin{aligned} f_x x^{''} + f_y y^{''} + f_z z^{''} &= f_{xx}(x^{'})^2 - f_{yy}(y^{'})^2 - f_{zz}(z^{'})^2 \\ &- 2(f_{xy}x^{'}y^{'} + f_{xz}x^{'}z^{'} + f_{yz}y^{'}z^{'}) \end{aligned} \tag{2.45}$$

olarak bulunur. (2.44) ve (2.45) eşitliklerinden sıfırdan farklı katsayılar determinantı ile $x^{''}, y^{''}, z^{''}$ ye göre lineer sistem çözülür. Burada, bu sistemin çözümü arakesit eğrisinin geodezik eğriliğini içerir. Benzer bir şekilde A ve B yüzeylerine göre c arakesit eğrisinin geodezik eğrilikleri, sırasıyla,

$$\kappa_g^A = \frac{1}{\|\nabla f^A\|}\{(y_A^{'}z_A^{''} - y_A^{''}z_A^{'})f_{x_A}^A + (z_A^{'}x_A^{''} - z_A^{''}x_A^{'})f_{y_A}^A + (x_A^{'}y_A^{''} - x_A^{''}y_A^{'})f_{z_A}^A\}$$

ve

$$\kappa_g^B = \frac{1}{\|\nabla f^B\|}\{(y_B^{'}z_B^{''} - y_B^{''}z_B^{'})f_{x_B}^B + (z_B^{'}x_B^{''} - z_B^{''}x_B^{'})f_{y_B}^B + (x_B^{'}y_B^{''} - x_B^{''}y_B^{'})f_{z_B}^B\}$$

dir [1].

2.2.4. Geodezik Torsiyon

(1.29) eşitliğinden c arakesit eğrisinin geodezik torsiyonu,

$$
\begin{aligned}
\tau_g &= \langle Y^{'}, \mathbf{N}\rangle \\
&= \langle (\mathbf{N}\times T)^{'}, \mathbf{N}\rangle \\
&= \langle [(\frac{S_u\times S_v}{\|S_u\times S_v\|})\times (S_u u_A^{'} + S_v v^{'})]^{'}, \mathbf{N}\rangle \\
&= \langle \{\frac{u^{'}}{\|S_u\times S_v\|}(S_u\times S_v)\times S_u + \frac{v^{'}}{\|S_u\times S_v\|}(S_u\times S_v)\times S_v\}^{'}, \mathbf{N}\rangle \\
&= \langle \{\frac{u^{'}}{\|S_u\times S_v\|}[\langle S_u, S_u\rangle S_v - \langle S_v, S_u\rangle S_u] + \frac{v^{'}}{\|S_u\times S_v\|}[\langle S_u, S_v\rangle S_v - \langle S_v, S_v\rangle S_u]\}^{'}, \mathbf{N}\rangle \\
&= \langle \{\frac{u^{'}}{\|S_u\times S_v\|}[ES_u - FS_u] + \frac{v^{'}}{\|S_u\times S_v\|}[FS_v - GS_u]\}^{'}, \mathbf{N}\rangle \\
&= \langle (\frac{1}{\|S_u\times S_v\|})^{'}[u^{'}(ES_v - FS_u) + v^{'}(FS_v - GS_u], \mathbf{N}\rangle \\
&+ \langle \frac{1}{\|S_u\times S_v\|}[u^{'}(ES_v - FS_u) + v^{'}(FS_v - GS_u)]^{'}, \mathbf{N}\rangle \\
&= (\frac{1}{\|S_u\times S_v\|})^{'}\{(u^{'}E\langle S_v, \mathbf{N}\rangle - u^{'}F\langle S_u, \mathbf{N}\rangle) + (v^{'}F\langle S_v, \mathbf{N}\rangle - v^{'}G\langle S_u, \mathbf{N}\rangle)\} \\
&+ \langle \frac{1}{\|S_u\times S_v\|}\{u^{''}[ES_v - FS_u] + u^{'}[E(S_{vu}u^{'} + S_{vv}v^{'}) - F(S_{uu}u^{'} + S_{uv}v^{'})] \\
&+ v^{''}[FS_v - GS_u] + v^{'}[F(S_{uv}u^{'} + S_{vv}v^{'}) - G(S_{uu}u^{'} + S_{uv}v^{'})]\}, \mathbf{N}\rangle \\
&= \langle \frac{1}{\|S_u\times S_v\|}u^{''}(ES_v - FS_u) + v^{''}(FS_v - GS_u) \\
&+ (u^{'})^2(ES_{uv} - FS_{uu}) + (v^{'})^2(FS_{vv} - GS_{uv})u^{'}v^{'}(ES_{vv} - GS_{uu}), \mathbf{N}\rangle && (2.46) \\
&= \frac{1}{\|S_u\times S_v\|}\{u^{''}\langle ES_v - FS_u, \mathbf{N}\rangle + v^{''}\langle FS_v - GS_u, \mathbf{N}\rangle && (2.47) \\
&+ (u^{'})^2\langle ES_{uv} - FS_{uu}, \mathbf{N}\rangle + (v^{'})^2\langle FS_{vv} - FS_{uv}, \mathbf{N}\rangle + u^{'}v^{'}\langle (ES_{vv} - GS_{uu}), \mathbf{N}\rangle\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\{u^{''}[E\langle S_v, N\rangle - F\langle S_u, \mathbf{N}\rangle] + v^{''}[F\langle S_v, \mathbf{N}\rangle - G\langle S_u, \mathbf{N}\rangle] \\
&+ (u^{'})^2[E\langle S_{uv}, \mathbf{N}\rangle - F\langle S_{uu}, \mathbf{N}\rangle] + (v^{'})^2[F\langle S_{vv}, \mathbf{N}\rangle - G\langle S_{uv}, \mathbf{N}\rangle] \\
&+ u^{'}v^{'}[E\langle S_{vv}, \mathbf{N}\rangle - G\langle S_{uu}, \mathbf{N}\rangle]\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\{(u^{'})^2(Em - Fl) + (v^{'})^2(Fn - Gm) + u^{'}v^{'}(En - Gl)\}
\end{aligned}
$$

(2.48)

bulunur. Burada $u^{'}$ ve $v^{'}$ (2.17) eşitliğinde verilmiştir.
Dolayısıyla, arakesit eğrisinin A ve B yüzeyleri için geodezik torsiyonları, sırasıyla,

$$\tau_g^A = \frac{1}{\sqrt{E^A G^A - (F^A)^2}} \{(E^A m^A - F^A l^A)({u_A}^{'})^2 + (E^A n^A - G^A l^A){u_A}^{'}{v_A}^{'} + (F^A n^A - G^A m^A)({v_A}^{'})^2\} \quad (2.49)$$

ve

$$\tau_g^B = \frac{1}{\sqrt{E^B G^B - (F^B)^2}} \{(E^B m^B - F^B l^B)({u_B}^{'})^2 + (E^B n^B - G^B l^B){u_B}^{'}{v_B}^{'} + (F^B n^B - G^B m^B)({v_B}^{'})^2\} \quad (2.50)$$

dir.
Kapalı formda verilen iki yüzeyin arakesit eğrisi için geodezik torsiyon,

$$\begin{aligned}
\tau_g^A &= \langle Y^{'}, \mathbf{N}\rangle \\
&= \langle \mathbf{N} \times T, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\rangle \\
&= \langle (\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \times \frac{\nabla f^A \times \nabla f^B}{\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|})^{'}, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\rangle \\
&= \langle \{\frac{1}{\|\nabla f\|\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|}[\nabla f \times (\nabla f^A \times \nabla f^B)]\}^{'}, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\rangle \\
&= \langle \{\{\frac{1}{\|\nabla f\|\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|}[\langle \nabla f, \nabla f^B\rangle \nabla f^A - \langle \nabla f, \nabla f^A\rangle \nabla f^B]\}^{'}, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\rangle \\
&= \langle (\{\frac{1}{\|\nabla f\|\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|})^{'}[\langle \nabla f, \nabla f^B\rangle \nabla f^A - \langle \nabla f, \nabla f^A\rangle \nabla f^B] \\
&+ \{\frac{1}{\|\nabla f\|\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|}[\langle \nabla f, \nabla f^B\rangle \nabla f^A - \langle \nabla f, \nabla f^A\rangle \nabla f^B]^{'}, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\rangle \\
&= \langle (\frac{1}{\|\nabla f\|\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|})^{'}[\langle \nabla f, \nabla f^B\rangle \nabla f^A - \langle \nabla f, \nabla f^A\rangle \nabla f^B], \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\rangle \\
&+ \langle \frac{1}{\|\nabla f\|\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|}[(\langle \nabla f, \nabla f^B\rangle)^{'} \nabla f^A + \langle \nabla f, \nabla f^B\rangle (\nabla f^A)^{'} - (\langle \nabla f, \nabla f^A\rangle)^{'} \nabla f^B \\
&- \langle \nabla f, \nabla f^A\rangle (\nabla f^B)^{'}], \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\rangle \\
&= \frac{1}{\|\nabla f\|}\{(\frac{1}{\|\nabla f^A\|\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|})^{'}[\langle \nabla f, \nabla f^B\rangle \langle \nabla f^A, \nabla f\rangle - \langle \nabla f, \nabla f^A\rangle \langle \nabla f^A, \nabla f\rangle]\} \\
&+ \langle \frac{1}{\|\nabla f\|\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|}\{[\langle (\nabla f)^{'}, \nabla f^B\rangle + \langle \nabla f, (\nabla f^B)^{'}\rangle]\nabla f^A + \langle \nabla f, \nabla f^B\rangle (\nabla f^A)^{'} \\
&- [\langle (\nabla f)^{'}, \nabla f^A\rangle + \langle \nabla f, (\nabla f^A)^{'}\rangle]\nabla f^B - \langle \nabla f, \nabla f^A\rangle (\nabla f^B)^{'}\}, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|\nabla f\|^2 \|\nabla f^A \times \nabla f^B\|} \{\langle (\nabla f)^{'}, \nabla f^B \rangle \langle \nabla f^A, \nabla f \rangle + \langle \nabla f, (\nabla f^B)^{'} \rangle \langle \nabla f^A, \nabla f \rangle \\
&+ \langle \nabla f, \nabla f^B \rangle \langle (\nabla f^A)^{'}, \nabla f \rangle - \langle (\nabla f)^{'}, \nabla f^A \rangle \langle \nabla f^B, \nabla f \rangle - \langle \nabla f, (\nabla f^A)^{'} \rangle \langle \nabla f^B, \nabla f \rangle \\
&- \langle \nabla f, \nabla f^A \rangle \langle (\nabla f^B)^{'}, \nabla f \rangle \} \\
&= \frac{1}{\|\nabla f\|^2 \|\nabla f^A \times \nabla f^B\|} \{\langle (\nabla f)^{'}, \nabla f^B \rangle \langle \nabla f^A, \nabla f \rangle - \langle (\nabla f)^{'}, \nabla f^A \rangle \langle \nabla f^B, \nabla f \rangle \} \\
&= \frac{1}{\|\nabla f\|^2 \|\nabla f^A \times \nabla f^B\|} \{\langle \nabla f^A, \nabla f \rangle \langle (\nabla f)^{'}, \nabla f^B \rangle - \langle \nabla f^B, \nabla f \rangle \langle (\nabla f)^{'}, \nabla f^A \rangle \} \\
&= \frac{1}{\|\nabla f\|^2 \|\nabla f^A \times \nabla f^B\|} \{\langle \langle \nabla f^A, \nabla f \rangle \langle \nabla f^B - \langle \nabla f^B, \nabla f \rangle \nabla f^A \rangle, (\nabla f)^{'} \} \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

dir. Burada

$$(\nabla f)^{'} = (f_{xx}x^{'} + f_{xy}y^{'} + f_{xz}z^{'}, f_{xy}x^{'} + f_{yy}y^{'} + f_{yz}z^{'}, f_{xz}x^{'} + f_{yz}y^{'} + f_{zz}z^{'})$$

dir.

Teorem 2.1. $f^A = 0$ ve $f^B = 0$ kapalı formlarıyla verilen A ve B yüzeylerinin arakesit eğrisinin geodezik torsiyonları sırasıyla,

$$\tau_g^A = (\frac{1}{\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|} \nabla G - \frac{\cot\theta}{\|\nabla f^A\|^2} \nabla F) \Phi T$$

ve

$$\tau_g^B = (\frac{-1}{\|\nabla f^A \times \nabla f^B\|} \nabla G + \frac{\cot\theta}{\|\nabla f^A\|^2} \nabla F) \Psi T$$

dir. Burada θ normal vektörler arasındaki açı,

$$\nabla F = \begin{bmatrix} f_x^A & f_y^A & f_z^A \end{bmatrix}, \quad \nabla G = \begin{bmatrix} f_x^B & f_y^B & f_z^B \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} f_{xx}^A & f_{xy}^A & f_{xz}^A \\ f_{xy}^A & f_{yy}^A & f_{yz}^A \\ f_{xz}^A & f_{yz}^A & f_{zz}^A \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} f_{xx}^B & f_{xy}^B & f_{xz}^B \\ f_{xy}^B & f_{yy}^B & f_{yz}^B \\ f_{xz}^B & f_{yz}^B & f_{zz}^B \end{bmatrix}$$

dir [1].

2.2.5. Yüzeylerin Normal ve Geodezik Eğriliklerine Göre Eğrilik Vektörü

P noktasında arakesit eğrisinin $\mathbf{k}$ eğrilik vektörü $\mathbf{N}^A$ ve $\mathbf{N}^B$ tarafından gerilen normal düzlemde yatar. Böylece

$$\mathbf{k} = \alpha\mathbf{N}^A + \beta\mathbf{N}^B \tag{2.52}$$

olarak ifade edilebilir. Burada α ve β belirlenmesi gereken katsayılardır. P noktasındaki normal eğrilik, $\mathbf{k}$ eğrilik vektörünün $\mathbf{N}$ birim yüzey normal vektörü üzerine izdüşümüdür. Yani

$$\kappa_n = \langle \mathbf{k}, \mathbf{N} \rangle \tag{2.53}$$

dir.

(2.52) eşitliğinde verilen eğrilik vektörünün, sırasıyla, $\mathbf{N}^A$ ve $\mathbf{N}^B$ yüzey normalleri üzerine izdüşümleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\kappa_n^A &= \langle \mathbf{k}, \mathbf{N}^A \rangle \\ &= \langle \alpha_1\mathbf{N}^A + \beta_1\mathbf{N}^B, \mathbf{N}^A \rangle \\ &= \alpha_1\langle \mathbf{N}^A, \mathbf{N}^A \rangle + \beta_1\langle \mathbf{N}^B, \mathbf{N}^A \rangle \\ &= \alpha_1 + \beta_1\cos\theta \end{aligned} \tag{2.54}$$

ve

$$\begin{aligned}\kappa_n^B &= \langle \mathbf{k}, \mathbf{N}^B \rangle \\ &= \langle \alpha_1\mathbf{N}^A + \beta_1\mathbf{N}^B, \mathbf{N}^B \rangle \\ &= \alpha_1\langle \mathbf{N}^A, \mathbf{N}^B \rangle + \beta_1\langle \mathbf{N}^B, \mathbf{N}^B \rangle \\ &= \alpha_1\cos\theta + \beta_1 \end{aligned} \tag{2.55}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada θ, $\mathbf{N}^A$ ve $\mathbf{N}^B$ arasındaki açı olup,

$$\cos\theta = \langle \mathbf{N}^A, \mathbf{N}^B \rangle$$

dir. (2.54) ve (2.55) ile verilen lineer denklem sisteminin matris formu

$$\begin{bmatrix} 1 & cos\theta \\ cos\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_n^A \\ \kappa_n^B \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Buradan α_1 ve β_1 katsayıları

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sin^2\theta} \begin{bmatrix} 1 & -\cos\theta \\ -\cos\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_n^A \\ \kappa_n^B \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin^2\theta} \begin{bmatrix} \kappa_n^A - \kappa_n^B\cos\theta \\ -\kappa_n^A\cos\theta + \kappa_n^B \end{bmatrix}\end{aligned}$$

eşitliği yardımıyla elde edilir. α_1 ve β_1 katsayıları (2.52) eşitliğinde yerine yazılırsa, eğrilik vektörü

$$\mathbf{k} = \frac{\kappa_n^A - \kappa_n^B \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^A + \frac{\kappa_n^B - \kappa_n^A \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^B \tag{2.56}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde geodezik eğrilik ile arakesit eğrisinin eğrilik vektörünü ifade edelim. (2.52) eşitliğinin her iki yanı Y^A ve Y^B ile iç çarpılırsa, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\kappa_g^A = \langle T', Y^A\rangle &= \langle \alpha_2 \mathbf{N}^A + \beta_2 \mathbf{N}^B, Y^A\rangle \\
&= \alpha_2 \langle \mathbf{N}^A, Y^A\rangle + \beta_2 \langle \mathbf{N}^B, Y^A\rangle \\
&= \beta_2 \langle \mathbf{N}^B, \mathbf{N}^A \times T\rangle \\
&= \beta_2 \langle \mathbf{N}^B \times \mathbf{N}^A, \frac{\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B}{\|\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B\|}\rangle \\
&= \beta_2 \frac{1}{\|\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B\|}\langle \mathbf{N}^B \times \mathbf{N}^A, \mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B\rangle \\
&= -\beta_2 \frac{1}{\|\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B\|}\|\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B\|^2 \\
&= -\beta_2 \|\mathbf{N}^A\|\|\mathbf{N}^B\| \sin\theta \\
&= -\beta_2 \sin\theta
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\kappa_g^B = \langle T', Y^B\rangle &= \langle \alpha_2 \mathbf{N}^A + \beta_2 \mathbf{N}^B, Y^B\rangle \\
&= \alpha_2 \langle \mathbf{N}^A, Y^B\rangle + \beta_2 \langle \mathbf{N}^B, Y^B\rangle \\
&= \alpha_2 \langle \mathbf{N}^A, \mathbf{N}^B \times T\rangle \\
&= \alpha_2 \langle \mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B, \frac{\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B}{\|\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B\|}\rangle \\
&= \alpha_2 \frac{1}{\|\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B\|}\|\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B\|^2 \\
&= \alpha_2 \|\mathbf{N}^A \times \mathbf{N}^B\| \\
&= \alpha_2 \|\mathbf{N}^A\|\|\mathbf{N}^B\| \sin\theta \\
&= \alpha_2 \sin\theta
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sin\theta}\kappa_g^B, \ \beta_2 = -\frac{1}{\sin\theta}\kappa_g^A \tag{2.57}$$

dir. Burada θ yüzeylerin normal vektörleri arasındaki açıdır.

Eğer (2.52) eşitliğinde (2.57) eşitliği yerine konulursa

$$\mathbf{k} = T' = \frac{1}{\sin\theta}(\kappa_g^B \mathbf{N}^A - \kappa_g^A \mathbf{N}^B) \tag{2.58}$$

arakesit eğrisinin eğrilik vektörü elde edilir.

2.2.6. Normal ve Geodezik Eğrilikler Cinsinden Eğrinin Eğriliği

P noktasındaki c arakesit eğrisinin eğriliği (1.9) ve (2.56) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\kappa &= \sqrt{\langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle} \\
&= \{\langle \frac{\kappa_n^A - \kappa_n^B \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^A + \frac{\kappa_n^B - \kappa_n^A \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^B, \frac{\kappa_n^A - \kappa_n^B \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^A + \frac{\kappa_n^B - \kappa_n^A \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^B \rangle\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \{\langle \frac{\kappa_n^A - \kappa_n^B \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^A, \frac{\kappa_n^A - \kappa_n^B \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^A \rangle + 2\langle \frac{\kappa_n^A - \kappa_n^B \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^A, \frac{\kappa_n^B - \kappa_n^A \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^B \rangle \\
&+ \langle \frac{\kappa_n^B - \kappa_n^A \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^B, \frac{\kappa_n^B - \kappa_n^A \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^B \rangle\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \{\frac{(\kappa_n^A - \kappa_n^B \cos\theta)^2}{\sin^4\theta} + 2\frac{(\kappa_n^A - \kappa_n^B \cos\theta)(\kappa_n^B - \kappa_n^A \cos\theta)}{\sin^4\theta}\cos\theta + \frac{(\kappa_n^B - \kappa_n^A \cos\theta)^{'}}{\sin^4\theta}\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{|\sin\theta|}\sqrt{(\kappa_n^A)^2 + (\kappa_n^B)^2 - 2\kappa_n^A\kappa_n^B\cos\theta} \qquad (2.59)
\end{aligned}$$

dir [7]. (1.9) ve (2.58) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\kappa &= \sqrt{\langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle} \\
&= \{\langle \frac{1}{\sin\theta}(\kappa_g^B\mathbf{N}^A - \kappa_g^A\mathbf{N}^B), \frac{1}{\sin\theta}(\kappa_g^B\mathbf{N}^A - \kappa_g^A\mathbf{N}^B)\rangle\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{|\sin\theta|}\sqrt{(\kappa_g^A)^2 + (\kappa_g^B)^2 - 2\kappa_g^A\kappa_g^B\cos\theta} \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

olarak bulunur [1].

2.2.7. Üçüncü Mertebeden Türev Vektörü ve Torsiyon

$\mathbf{N}^A$ ve $\mathbf{N}^B$ normal düzlem üzerinde yattığından (1.13) eşitliğindeki $\kappa^{'}N + \kappa\tau B$ terimleri yerine $\gamma\mathbf{N}^A + \delta\mathbf{N}^B$ alınabilir. Böylece

$$c^{'''}(s) = -\kappa^2 T + \gamma\mathbf{N}^A + \delta\mathbf{N}^B \qquad (2.61)$$

dir. $c^{'''}$ nin $\mathbf{N}^A$ $(\mathbf{N}^B)$ birim yüzey normal vektörü üzerine izdüşümü λ_n^A (λ_n^B) ile gösterilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}\lambda_n^A &= \langle c^{'''}, \mathbf{N}^A\rangle \\ &= \langle -\kappa^2 T + \gamma\mathbf{N}^A + \delta\mathbf{N}^B, \mathbf{N}^A\rangle \\ &= -\kappa^2\langle T, \mathbf{N}^A\rangle + \gamma\langle \mathbf{N}^A, \mathbf{N}^A\rangle + \delta\langle \mathbf{N}^B, \mathbf{N}^A\rangle \\ &= \gamma + \delta\cos\theta \end{aligned} \tag{2.62}$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda_n^B &= \langle c^{'''}, \mathbf{N}^B\rangle \\ &= \langle -\kappa^2 T + \gamma\mathbf{N}^A + \delta\mathbf{N}^B, \mathbf{N}^B\rangle \\ &= -\kappa^2\langle T, \mathbf{N}^B\rangle + \gamma\langle \mathbf{N}^A, \mathbf{N}^B\rangle + \delta\langle \mathbf{N}^B, \mathbf{N}^B\rangle \\ &= \gamma\cos\theta + \delta \end{aligned} \tag{2.63}$$

biçiminde bulunur. γ ve δ için (2.62) ve (2.63) lineer denklem sisteminden,

$$\begin{bmatrix}\lambda_n^A \\ \lambda_n^B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & cos\theta \\ cos\theta & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma \\ \delta\end{bmatrix}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{bmatrix}\gamma \\ \delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -cos\theta \\ -cos\theta & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_n^A \\ \lambda_n^B\end{bmatrix}$$

eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{sin^2\theta}(\lambda_n^A - \lambda_n^B\cos\theta) \\ \delta &= \frac{1}{sin^2\theta}(\lambda_n^B - \lambda_n^A\cos\theta)\end{aligned} \tag{2.64}$$

elde edilirler. (2.64) eşitlikleri (2.61) de yerine yazılırsa

$$c^{'''} = -\kappa^2 T + \frac{\lambda_n^A - \lambda_n^B\cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^A + \frac{\lambda_n^B - \lambda_n^A\cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^B \tag{2.65}$$

bulunur.

Bir önceki eğrilik vektörünün durumuna benzer olarak $c^{'''}$ hesaplamak için λ_n^A ve λ_n^B nin bulunması gerekir. Parametrik formda verilen bir yüzey için λ_n, $c^{'''}$ üzerine birim yüzey normalinin izdüşümü alınarak elde edilir. Yani, (2.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \langle c^{'''}, \mathbf{N}\rangle \\
&= \langle S_{uuu}, \mathbf{N}\rangle (u^{'})^3 + 3\langle S_{uuv}, \mathbf{N}\rangle (u^{'})^2 v^{'} + 3\langle S_{uvv}, \mathbf{N}\rangle u^{'}(v^{'})^2 \\
&+ \langle S_{vvv}, \mathbf{N}\rangle (v^{'})^3 + 3[\langle S_{uu}, \mathbf{N}\rangle u^{'}u^{''} + \langle S_{uv}, \mathbf{N}\rangle (u^{''}v^{'} + u^{'}v^{''}) \\
&+ \langle S_{vv}, \mathbf{N}\rangle v^{'}v^{''}] + \langle S_u, \mathbf{N}\rangle u^{'''} + \langle S_v, \mathbf{N}\rangle v^{'''} \\
&= 3[lu^{'}u^{''} + m(u^{''}v^{'} + u^{'}v^{''}) + nv^{'}v^{''}] + \langle S_{uuu}, \mathbf{N}\rangle (u^{'})^3 \\
&+ 3\langle S_{uuv}, \mathbf{N}\rangle (u^{'})^2 v^{'} + 3\langle S_{uvv}, \mathbf{N}\rangle u^{'}(v^{'})^2 + \langle S_{vvv}, \mathbf{N}\rangle (v^{'})^3
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lambda_n = 3[lu^{'}u^{''} + m(u^{''}v^{'} + u^{'}v^{''}) + nv^{'}v^{''}] + III \tag{2.66}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
III &= \langle S_{uuu}, \mathbf{N}\rangle (u^{'})^3 + 3\langle S_{uuv}, \mathbf{N}\rangle (u^{'})^2 v^{'} \\
&+ 3\langle S_{uvv}, \mathbf{N}\rangle u^{'}(v^{'})^2 + \langle S_{vvv}, \mathbf{N}\rangle (v^{'})^3
\end{aligned} \tag{2.67}$$

üçüncü temel formdur.
Dolayısıyla, A ve B yüzeyleri için λ_n^A ve λ_n^B, sırasıyla

$$\lambda_n^A = 3[l^A u_A^{'}u_A^{''} + m^A(u_A^{''}v_A^{'} + u_A^{'}v_A^{''}) + n^A v_A^{'}v_A^{''}] + III^A \tag{2.68}$$

ve

$$\lambda_n^B = 3[l^B u_B^{'}u_B^{''} + m^B(u_B^{''}v_B^{'} + u_B^{'}v_B^{''}) + n^B v_B^{'}v_B^{''}] + III^B \tag{2.69}$$

dir. Burada III^A ve III^B, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
III^A &= \langle {S^A}_{u_A u_A u_A}, \mathbf{N}\rangle (u_A^{'})^3 + 3\langle {S^A}_{u_A u_A v_A}, \mathbf{N}\rangle (u_A^{'})^2 v_A^{'} \\
&+ 3\langle {S^A}_{u_A v_A v_A}, \mathbf{N}\rangle u_A^{'}(v_A^{'})^2 + \langle {S^A}_{v_A v_A v_A}, \mathbf{N}\rangle (v_A^{'})^3
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
III^B &= \langle {S^B}_{u_B u_B u_B}, \mathbf{N}\rangle (u_B^{'})^3 + 3\langle {S^B}_{u_B u_B v_B}, \mathbf{N}\rangle (u_B^{'})^2 v_B^{'} \\
&+ 3\langle {S^B}_{u_B v_B v_B}, \mathbf{N}\rangle u_B^{'}(v_B^{'})^2 + \langle {S^B}_{v_B v_B v_B}, \mathbf{N}\rangle (v_B^{'})^3
\end{aligned}$$

dir. (2.66) eşitliğinde ki $u^{''}$ ve $v^{''}$, (2.4) eşitliğinin her iki tarafı S_u ve S_v ile iç çarpım yapılarak hesaplanır. Burada $c^{''} = \mathbf{k}$ eşitliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{k}, S_u\rangle = \langle c^{''}, S_u\rangle &= \langle S_{uu}, \mathbf{S_u}\rangle (u^{'})^2 + 2\langle S_{uv}, S_u\rangle u^{'}v^{'} + \langle S_{vv}, S_u\rangle (v^{'})^2 \\
&+\langle S_u, S_u\rangle u^{''} + \langle S_v, S_u\rangle v^{''} \\
&= \frac{E_u}{2}(u^{'})^2 + E_v u^{'}v^{'} + (F_v - \frac{G_u}{2})(v^{'})^2 + Eu^{''} + Fv^{''}
\end{aligned}$$

ve buradan

$$Eu^{''} + Fv^{''} = \langle \mathbf{k}, S_u \rangle - \frac{E_u}{2}(u^{'})^2 - E_v u^{'} v^{'} - (F_v - \frac{G_u}{2})(v^{'})^2 \qquad (2.70)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}, S_v \rangle = \langle c^{''}, S_v \rangle &= \langle S_{uu}, S_v \rangle (u^{'})^2 + 2\langle S_{uv}, S_v \rangle u^{'} v^{'} + \langle S_{vv}, S_v \rangle (v^{'})^2 + \langle S_u, S_v \rangle u^{''} \\ &+ \langle S_v, S_v \rangle v^{''} \\ &= (F_u - \frac{E_v}{2})(u^{'})^2 + G_u u^{'} v^{'} + \frac{G_u}{2}(v^{'})^2 + Fu^{''} + Gv^{''} \end{aligned}$$

ve buradan da

$$Fu^{''} + Gv^{''} = \langle \mathbf{k}, S_v \rangle - (F_u - \frac{E_v}{2})(u^{'})^2 - G_u u^{'} v^{'} - \frac{G_u}{2}(v^{'})^2 \qquad (2.71)$$

olarak bulunur. Burada $u^{''}$ ve $v^{''}$, (2.70) ve (2.71) eşitliklerinin belirttiği denklem sisteminden,

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{''} \\ v^{''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{k}, S_u \rangle - \frac{E_u}{2}(u^{'})^2 - E_v u^{'} v^{'} - (F_v - \frac{G_u}{2})(v^{'})^2 \\ \langle \mathbf{k}, S_v \rangle - (F_u - \frac{E_v}{2})(u^{'})^2 - G_u u^{'} v^{'} - \frac{G_u}{2}(v^{'})^2 \end{bmatrix}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{bmatrix} u^{''} \\ v^{''} \end{bmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{bmatrix} -\langle \mathbf{k}, S_u \rangle G + \langle \mathbf{k}, S_v \rangle F + [\frac{E_u}{2} G - (F_u - \frac{E_v}{2})F](u^{'})^2 + [E_v G - G_u F] u^{'} v^{'} + [(F_v - \frac{G_u}{2})G - \frac{G_u}{2} F](v^{'})^2 \\ \langle \mathbf{k}, S_u \rangle F - \langle \mathbf{k}, S_v \rangle E + [-\frac{E_u}{2} F + (F_u - \frac{E_v}{2})E](u^{'})^2 + [-E_v F + G_u E] u^{'} v^{'} + [-(F_v - \frac{G_u}{2})F + \frac{G_u}{2} E](v^{'})^2 \end{bmatrix}$$

eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} u^{''} &= \frac{-\langle \mathbf{k}, S_u \rangle G + \langle \mathbf{k}, S_v \rangle F + [\frac{E_u}{2} G - (F_u - \frac{E_v}{2})F](u^{'})^2 + [E_v G - G_u F] u^{'} v^{'} + [(F_v - \frac{G_u}{2})G - \frac{G_u}{2} F](v^{'})^2}{EG-F^2}, \\ v^{''} &= \frac{\langle \mathbf{k}, S_u \rangle F - \langle \mathbf{k}, S_v \rangle E + [-\frac{E_u}{2} F + (F_u - \frac{E_v}{2})E](u^{'})^2 + [-E_v F + G_u E] u^{'} v^{'} + [-(F_v - \frac{G_u}{2})F + \frac{G_u}{2} E](v^{'})^2}{EG-F^2} \end{aligned} \qquad (2.72)$$

biçiminde elde edilir. Burada $u^{'}$ ve $v^{'}$ (2.17) eşitliğinde verilmiştir.
Son olarak (1.14) eşitliğinden arakesit eğrisinin torsiyonu

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\langle B, c^{'''} \rangle}{\kappa} \\ &= \frac{1}{\kappa} \langle B, -\kappa^2 T + \frac{\lambda_n^A - \lambda_n^B \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} \mathbf{N}^A + \frac{\lambda_n^B - \lambda_n^A \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} \mathbf{N}^B \rangle \\ &= \frac{1}{\kappa sin^2 \theta} [(\lambda_n^A - \lambda_n^B \cos(\theta)) \langle B, \mathbf{N^A} \rangle + (\lambda_n^B - \lambda_n^A \cos(\theta)) \langle B, \mathbf{N^B} \rangle] \qquad (2.73) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada, binormal vektörü $B = \frac{1}{\kappa}(T \times \mathbf{k})$ dir.
(2.10) eşitliğinden $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ birim normali üzerine $c^{'''} = (x^{'''}, y^{'''}, z^{'''})$ vektörünün

izdüşümü

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \langle (x^{'''}, y^{'''}, z^{'''}), \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \rangle, \\
&= \langle (x^{'''}, y^{'''}, z^{'''}), \frac{(f_x, f_y, f_z)}{\sqrt{f_x + f_y + f_z}} \rangle, \\
&= \frac{f_x x^{'''} + f_y y^{'''} + f_z z^{'''}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \\
&= -\frac{F_1 + F_2 + F_3}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_{xxx}(x^{'})^3 + f_{yyy}(y^{'})^3 + f_{zzz}(z^{'})^3, \\
F_2 &= 3[f_{xxy}(x^{'})^2 y^{'} + f_{xxz}(x^{'})^2 z^{'} + f_{xyy}x^{'}(y^{'})^2 + f_{yyz}(y^{'})^2 z^{'}, \\
&+ f_{xzz}x^{'}(z^{'})^2 + f_{yzz}y^{'}(z^{'})^2 + 2f_{xyz}x^{'}y^{'}z^{'}] \\
F_3 &= 3[f_{xx}x^{'}x^{''} + f_{yy}y^{'}y^{''} + f_{zz}z^{'}z^{''} + f_{xy}(x^{''}y^{'} + x^{'}y^{''}) \\
&+ f_{yz}(y^{''}z^{'} + y^{'}z^{''}) + f_{xz}(x^{''}z^{'} + x^{'}z^{''})]
\end{aligned}$$

dir. $(x^{''}, y^{''}, z^{''})$, (2.56) eşitliği tarafından belirlenir.

2.3. TEĞETSEL ARAKESİT EĞRİSİ

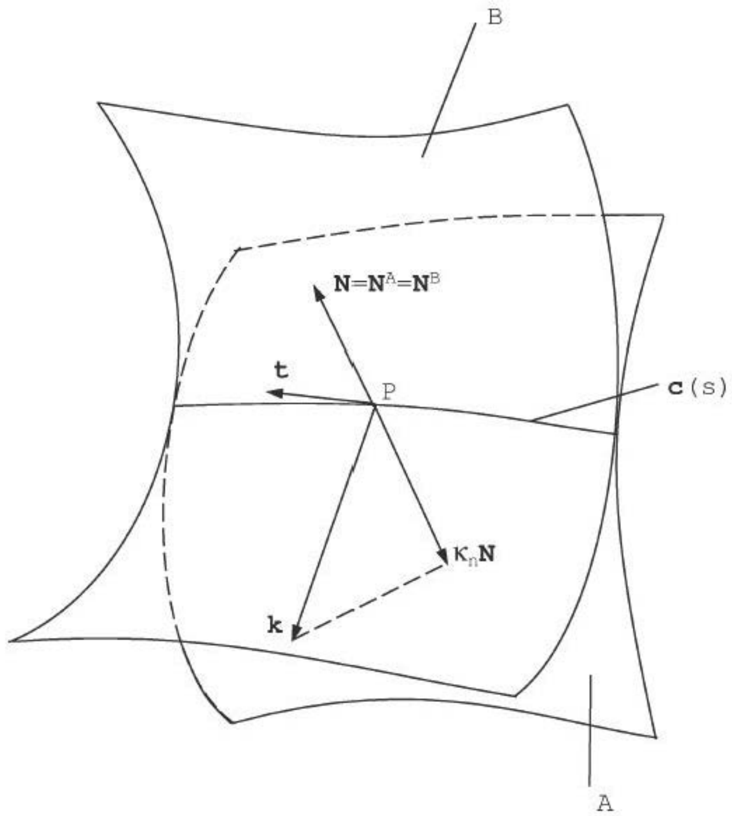
Bu bölüm [7] kaynağından alınmış olup A ve B yüzeylerinin c arakesit eğrisi üzerindeki bir P noktasında teğetsel olarak kesiştiğini farz edelim. Yani, P noktasında $\mathbf{N}^A // \mathbf{N}^B$ olsun. Bu iki normal birbirine paralel olduğu zaman, teğetsel yön (2.11) eşitliğinden belirlenemez. c nin geometrik özelliklerini hesaplamak için yeni yöntemler bulunmalıdır. Özel olarak, bu yüzeylerin yönlendirilmesiyle $\mathbf{N}^A \equiv \mathbf{N}^B \equiv \mathbf{N}$ olduğunu kabul edelim (Şekil 2.2).

2.3.1. Teğetsel Arakesit Eğrisinin Teğetsel Yönü

P noktasında c nin T birim teğet vektörü A ve B nin ortak teğet düzlemi üzerinde yatar. Bundan dolayı, T, (2.3) deki gibi hem $S^A_{u_A}$ ve $S^A_{v_A}$ hem de $S^B_{u_B}$ ve $S^B_{v_B}$ nin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Yani;

$$T = S^A_{u_A} u^{'}_A + S^A_{v_A} v^{'}_A = S^B_{u_B} u^{'}_B + S^B_{v_B} v^{'}_B \qquad (2.75)$$

dir. (2.75) eşitliği teğet vektörün teğet düzleminde kısıtlı olduğu ve normal bileşe-



Şekil 2.2: İki yüzeyin teğetsel arakesiti

nine sahip olmadığı için $(u_A^{'}, v_A^{'}, u_B^{'}, v_B^{'})$ dört bilinmeyenli iki lineer denklemden meydana gelir. P noktasında $\mathbf{N}^A = \mathbf{N}^B = \mathbf{N}$ olduğundan, (2.53) eşitliğinden $\kappa_n^A = \kappa_n^B$ bulunur. Böylece (2.12) eşitliğinden

$$l^A(u_A^{'})^2 + 2m^A u_A^{'} v_A^{'} + n^A(v_A^{'})^2 = l^B(u_B^{'})^2 + 2m^B u_B^{'} v_B^{'} + n^B(v_B^{'})^2 \qquad (2.76)$$

yazılabilir. $(u_A^{'}, v_A^{'}, u_B^{'}, v_B^{'})$ ye göre bir kuadratik denklemdir. Böylece teğet vektörün birim uzunluğa kısıtlanmasıyla, (2.75) ve (2.76) eşitlikleri dört bilinmeyenli dört lineer olmayan denklem sistemi haline dönüşür. Bu lineer olmayan denklem sistemi (2.75) den $u_B^{'}$ ve $v_B^{'}$ terimlerini temsil eden $u_A^{'}$ ve $v_A^{'}$ nın lineer kombinasyonlarına göre (2.76) eşitliğindeki sonuçta yerine konularak çözülür. $S_{u_B}^B$ ile (2.75) eşitliğinin vektörel çarpımı alınır

$$(S_{u_B}^B) \times T = (S_{u_B}^B \times S_{u_A}^A){u_A}' + (S_{u_B}^B \times S_{v_A}^A){v_A}' = (S_{u_B}^B \times S_{u_B}^B){u_B}' + (S_{u_B}^B \times S_{v_B}^B){v_B}'$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$(S_{u_B}^B \times S_{u_A}^A){u_A}' + (S_{u_B}^B \times S_{v_A}^A){v_A}' = (S_{u_B}^B \times S_{v_B}^B){v_B}'$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlik P noktasında $\mathbf{N}$ ortak yüzey normal vektörü üzerine izdüşürülürse,

$$\langle (S^B_{u_B} \times S^A_{u_A}), \mathbf{N}\rangle {u_A}' + \langle (S^B_{u_B} \times S^A_{v_A}), \mathbf{N}\rangle {u_B}' = \langle (S^B_{u_B} \times S^B_{v_B}), \mathbf{N}\rangle {v_B}'$$

eşitliğinden

$${v_B}' = \frac{\langle (S^B_{u_B} \times S^A_{u_A}), \mathbf{N}\rangle}{\langle (S^B_{u_B} \times S^B_{v_B}), \mathbf{N}\rangle}{u_A}' + \frac{\langle (S^B_{u_B} \times S^A_{v_A}), \mathbf{N}\rangle}{\langle (S^B_{u_B} \times S^B_{v_B}), \mathbf{N}\rangle}{v_A}'$$

elde edilir. Benzer şekilde $S^B_{v_B}$ ile (2.75) eşitliğinin vektörel çarpımı alınır

$$(S^B_{v_B}) \times T = (S^B_{v_B} \times S^A_{u_A}){u_A}' + (S^B_{v_B} \times S^A_{v_A}){v_A}' = (S^B_{v_B} \times S^B_{u_B}){u_B}' + (S^B_{v_B} \times S^B_{v_B}){v_B}'$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$(S^B_{v_B}) \times T = (S^B_{v_B} \times S^A_{u_A}){u_A}' + (S^B_{v_B} \times S^A_{v_A}){v_A}' = (S^B_{v_B} \times S^B_{u_B}){u_B}'$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlik P noktasında $\mathbf{N}$ ortak yüzey normal vektörü üzerine izdüşürülürse,

$$\langle (S^B_{v_B} \times S^A_{u_A}), \mathbf{N}\rangle {u_A}' + \langle (S^B_{v_B} \times S^A_{v_A}), \mathbf{N}\rangle {v_A}' = \langle (S^B_{v_B} \times S^B_{u_B}), \mathbf{N}\rangle {u_B}'$$

eşitliğinden de

$$\begin{aligned} {u_B}' &= \frac{\langle (S^B_{v_B} \times S^A_{u_A}), \mathbf{N}\rangle}{\langle S^B_{v_B} \times S^B_{u_B}), \mathbf{N}\rangle}{u_A}' + \frac{\langle (S^B_{v_B} \times S^A_{v_A}), \mathbf{N}\rangle}{\langle (S^B_{v_B} \times S^B_{u_B}), \mathbf{N}\rangle}{v_A}' \\ &= \frac{\langle (S^A_{u_A} \times S^B_{v_B}), \mathbf{N}\rangle}{\langle (S^B_{u_B} \times S^B_{v_B}), \mathbf{N}\rangle}u'_A + \frac{\langle (S^A_{v_A} \times S^B_{v_B}), \mathbf{N}\rangle}{\langle (S^B_{u_B} \times S^B_{v_B}), \mathbf{N}\rangle}v'_A \end{aligned}$$

bulunur. u'_B ve v'_B , u'_A ve v'_A nin lineer kombinasyonu olarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u'_B = a_{11}u'_A + a_{12}v'_A, \tag{2.77}$$

ve

$$v'_B = a_{21}u'_A + a_{22}v'_A. \tag{2.78}$$

dir. (2.76) eşitliğinde (2.77) ve (2.78) yerine konulursa

$$\begin{aligned} l^A(u'_A)^2 + 2m^A u'_A v'_A + n^A(v'_A)^2 &= l^B(u'_B)^2 + 2m^B u'_B v'_B + n^B(v'_B)^2 \\ &= l^B(a_{11}u'_A + a_{12}v'_A)^2 \\ &+ 2m^B(a_{11}u'_A + a_{12}v'_A)(a_{21}u'_A + a_{22}v'_A) \\ &+ n^B(a_{21}u'_A + a_{22}v'_A)^2 \end{aligned}$$

bulunur ve

$$(u_A^{'})^2 \ \ [\ \ l^B {a_{11}}^2 + 2m^B a_{11}a_{21} + n^B {a_{21}}^2 - l^A] + 2u_A^{'}v_A^{'}[l^B a_{11}a_{12} + m^B(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) + n^B a_{21}a_{22} - m^A] + (v_A^{'})^2[l^B {a_{12}}^2 + 2m^B a_{12}a_{22} + n^B {a_{22}}^2 - n^A] = 0 \qquad (2.79)$$

dir. (2.79) eşitliği

$$b_{11}(u_A^{'})^2 + 2b_{12}u_A^{'}v_A^{'} + b_{22}(v_A^{'})^2 = 0 \qquad (2.80)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11}^2 l^B + 2a_{11}a_{21}m^B + a_{21}^2 n^B - l^A \\ b_{12} &= a_{11}a_{12}l^B + 2(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})m^B + a_{21}a_{22}n^B - m^A \\ b_{22} &= a_{12}^2 l^B + 2a_{12}a_{22}m^B + a_{22}^2 n^B - n^A \end{aligned}$$

dir. $b_{11} \neq 0$ için $u_A^{'}/v_A^{'} = w$ ile gösterilirse, bu durumda (2.80) aşağıdaki formdaki gibi ikinci dereceden bir denklem gösterir:

$$b_{11}w^2 + 2b_{12}w + b_{22} = 0.$$

$b_{22} \neq 0$ için $v_A^{'}/u_A^{'} = \mu$ ile gösterilirse, bu durumda (2.80) aşağıdaki formdaki gibi ikinci dereceden bir denklem gösterir:

$$b_{11} + 2b_{12}\mu + b_{22}\mu^2 = 0.$$

w ve μ için (2.80) çözülürse T ,

$$T = \frac{wS_{u_A}^A + S_{v_A}^A}{\|wS_{u_A}^A + S_{v_A}\|} \qquad (2.81)$$

ya da

$$T = \frac{S_{u_A}^A + \mu S_{v_A}^A}{\|S_{u_A}^A + \mu S_{v_A}\|} \qquad (2.82)$$

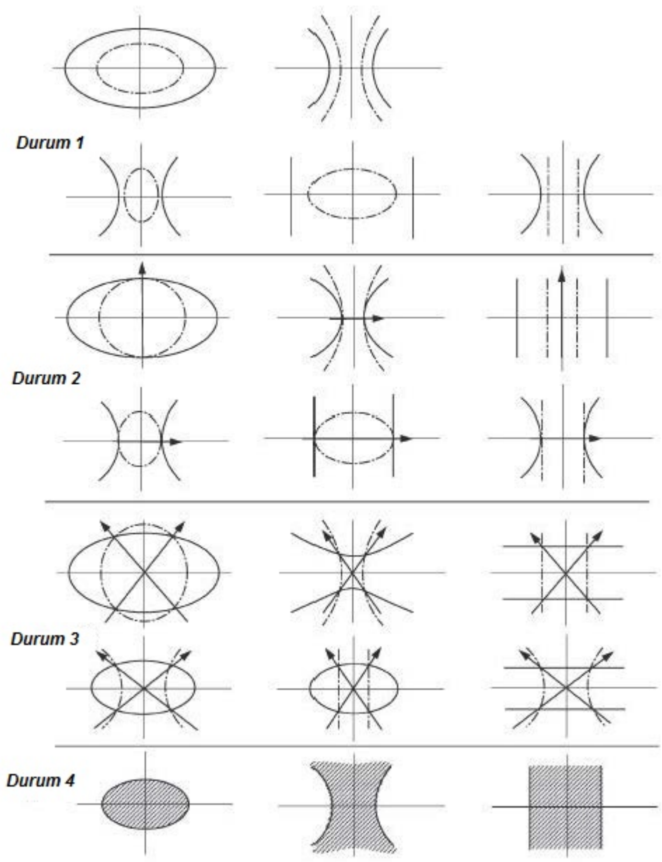
biçiminde bulunur.
$b_{12}^2 - b_{11}b_{22}$ diskriminantına bağlı olarak (2.80) eşitliğini çözmek için dört farklı durum vardır:

1. İzole Edilmiş Teğetsel Değme Noktası: Eğer $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} < 0$ ise o zaman (2.80) eşitliği herhangi bir çözüme sahip değildir. Böylece P noktası A ve B nin izole edilmiş teğetsel değme noktasıdır.

2. Teğetsel Arakesit Eğrisi: Eğer $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = 0$ ve $b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{22}^2 \neq 0$ ise o zaman (2.80) eşitliği çakışık iki köke sahiptir ve T tekdir. Böylece, A ve B, P noktasında ve onun komşuluğunda kesişirler.

3. Dal Noktası: Eğer $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} > 0$ ise o zaman (2.80) eşitliği farklı köklere sahiptir. Böylece, P noktası c arakesit eğrisinin bir dal noktasıdır. P noktasında c yi kesen diğer bir dal vardır.

4. Yüksek Mertebeden Değme Noktası: Eğer $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ ise o zaman (2.80) eşitliği u_A' ve v_A' nin herhangi bir değeri için sıfırdır. Böylece, A ve B, P noktasında en azından ikinci mertebeden bir değmeye sahiptir.



Şekil 2.3: İki teğetsel arakesit yüzeylerinin Dupin göstergeleri

P noktasında bu yüzeylerin biri flat noktası (düzlemsel nokta) olduğu zaman (S^B yi varsayarsak) l^B, m^B, n^B sıfırdır. Ancak, (2.80) eşitliğini hala hesaplayabiliriz. P noktası her iki yüzeyin flat noktası olduğu zaman, bu iki yüzey 4. durumda belirtildiği gibi P noktasında en az ikinci mertebeden değmeye sahiptir.
P noktasında bir yüzeyin Dupin göstergesi bir konik kesitidir. A ve B, P noktasında teğetsel olarak kesiştiğinde, P noktasında aynı teğet düzleme sahiptir. (2.76) eşitliği T eğrisi boyunca P noktasında A ve B nin Dupin göstergelerinin teğetsel olarak kesiştiğini gösterir. Tersine, T, A ve B nin Dupin göstergelerinin

arakesiti boyunca P noktasında ortak teğet düzlem üzerinde yatan vektördür. Bu iki Dupin göstergesi hiçbir noktada kesişmeyebilir (izole edilmiş teğetsel değme noktası) ya da teğetsel olarak iki noktada kesişir ya da dört noktada transversal olarak kesişirler (dal noktası) ya da örtüşür (yüksek mertebeden değme noktası). Örtüşme durumunda Dupin göstergeleri P noktasında aynı olmak zorudadır. Şekil 2.3 dört farklı durum için iki yüzeyin Dupin göstergelerinin olası kombinasyonlarını göstermektedir. Bu iki Dupin göstergesinin koordinat sistemleri kolaylık açısından aynı olarak seçilebilmesine rağmen genelde bunlar farklı yönlendirmeye sahip olabilir. Hiperbolik noktalarda Dupin göstergesi bölgesel olarak normal kesitin teğet düzleminin hangi tarafında yattığına bağlı olan eşlenik hiperbollerin kümesidir. Ancak kolaylık açısından eşlenik hiperbollerin biri için bu durumları örneklerle açıklayacağız. Durum 2 deki Dupin göstergeleri birbirine paraleldirler ve kesişmezler (Bakınız Şekil 2.3 deki sağ üst kısımdadır). Bu durum, aynı asli yöne sahip olan P parabolik noktasında teğetsel olarak A ve B yüzeylerinin kesiştiği durumdur. Genelliği bozmadan kabul edelim ki, u ve v parametre eğrilerinin asli doğrultular yönünde olduğunu kabul edelim. Burada $u = sbt$ olduğunda sıfır eğrilikli asli doğrultudur. Bu varsayımlarla $m^A = m^B = n^A = n^B = 0$ ve $a_{12} = a_{21} = 0$ yazabiliriz. Böylece (2.80) denklemi

$$(a_{11}^2 l^B - l^A)(u_A^{'})^2 = 0. \tag{2.83}$$

(2.83) denklemine indirgenir.

Dolayısıyla $a_{11}^2 l^B - l^A \neq 0$ olduğunda T için ($u_A = sbt$) bir tek yönlendirme ile çakışık iki köke sahiptir. $a_{11}^2 l^B - l^A = 0$ olduğu zaman bu iki yüzey en azından P noktasında sürekli bir eğriliğe sahiptir ve bunların Dupin göstergeleri örtüşür. Kapalı formda verilmiş iki yüzey ve biri parametrik diğeri kapalı formda verilmiş iki yüzeyin arakesit durumları benzer şekilde ele alınabilir. Kapalı formda verilmiş iki yüzeyin arakesit durumunda (2.22) eşitliği kullanılarak kapalı formdaki A ve B yüzeylerinin normal eğrilikleri eşitlenir. (2.22) eşitliğindeki bilinmeyenler $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ birim teğet vektörüdür. (2.80) eşitliğinde yapıldığı gibi (2.8) eşitliğinde $x^{'}$ ve $y^{'}$ kullanılarak $z^{'}$ bileşeni yok edilirse $x^{'}$ ve $y^{'}$ ye bağlı bir kuadratik denklem elde edilir.

Biri parametrik diğeri kapalı formda verilen iki yüzeyin arakesit durumu için parametrik ve kapalı formdaki yüzeyleri (2.12) ve (2.22) daki normal eğrilikleri eşitlenir. Burada bilinmeyenler $x^{'}, y^{'}, z^{'}, u^{'}$ ve $v^{'}$ dir. (2.3) eşitliği $u^{'}$, $v^{'}$, $x^{'}$, $y^{'}$ ve $z^{'}$ ye göre yazılabilir ve dolayısıyla buradan (2.80) e benzer bir kuadratik eşitlik elde edilir. Kuadratik denklem çözülür ve birimleştirilerek birim teğet vektör elde edilir. Üstelik, kapalı formda verilmiş iki yüzeyin ve biri parametrik biri de kapalı formda verilmiş iki yüzeyin arakesitleri için kuadratik denklemin diskriminantına bağlı olan dört farklı durum daha vardır [7].

2.3.2. Eğrilik Vektörü ve Eğrilik

P noktasında c arakesit eğrisinin $\mathbf{k}$ eğrilik vektörü (2.23) eşitliğinde ifade edilmiştir. $\mathbf{k}$ eğrilik vektörünü elde etmek için gerekli olan $(u_A^{''}, v_A^{''})$ ve $(u_B^{''}, v_B^{''})$ katsayıları bölüm 2.2.3 de bulunmuştur.
$(u_A^{''}, v_A^{''})$ için çözüm bulmada ikiden daha fazla eşitliğe ihtiyaç vardır. Ek bir eşitlik de P noktasında

$$c(s) = S^A(u_A(s), v_A(s)) = S^B(u_B(s), v_B(s))$$

eşitliğinde c nin üçüncü türevinin ve $\mathbf{N}$ birim normal vektörü üzerine izdüşümü alınırsa (2.68) ve (2.69) eşitlikleri eşit olacağından

$$\begin{aligned} 3\ [\ & l^A u_A^{'} u_A^{''} + m^A(u_A^{''} v_A^{'} + u_A^{'} v_A^{''}) + n^A v_A^{'} v_A^{''}] + III^A \\ &= 3[l^B u_B^{'} u_B^{''} + m^B(u_B^{''} v_B^{'} + u_B^{'} v_B^{''}) + n^B v_B^{'} v_B^{''}] + III^B \end{aligned} \tag{2.84}$$

bulunur. Diğer bir denklem $\mathbf{k}$ eğrilik vektörünün T teğet vektörüne dikliğinden elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}, T\rangle = \langle c^{''}, T\rangle &= \langle S_u, T\rangle {u_A}^{''} + \langle S_v, T\rangle {v_A}^{''} + \langle S_{uu}, T\rangle ({u_A}^{'})^2 \\ &+ 2\langle S_{uv}, T\rangle {u_A}^{'} {v_A}^{'} + \langle S_{vv}, T\rangle ({v_A}^{'})^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.85}$$

dir. (2.84) eşitliğinde (2.36) eşitliği yerlerine konularak ${u_A}^{''}$ ve ${v_A}^{''}$ için (2.84) ve (2.85) lineer sistemi çözülür. Böylece $\mathbf{k}$ eğrilik vektörü (2.23) eşitliğinden hesaplanır. Ayrıca κ eğriliği (2.59) eşitliğinden bulunabilir.
Biri parametrik diğeri de kapalı formda verilen iki yüzey gibi kapalı formda verilen iki yüzeyin arakesit durumunda eğrilik vektörü benzer bir yöntemle elde edilir. Üç eşitlikli bir lineer sistem çözerek kapalı formda verilen iki yüzey için $(x^{''}, y^{''}, z^{''})$ hesaplanır. $(x^{''}, y^{''}, z^{''})$ de ilk lineer denklem de (2.9) eşitliği kullanılarak elde edilir. İkinci eşitlik birim normal vektör üzerine üçüncü türevin izdüşümü olan (2.74) eşitliği hesaplanarak elde edilir. Son olarak, üçüncü denklem eğrilik vektörünün teğet vektöre dikliği $(x^{'}x^{''} + y^{'}y^{''} + z^{'}z^{''} = 0)$ kullanılarak elde edilir.
Biri parametrik diğeri kapalı formda verilen iki yüzey için $u^{''}$ ve $v^{''}$ de iki eşitlikli bir lineer denklem sistemi çözülerek elde edilir. $(u^{''}, v^{''})$ de ilk lineer sistem

birim normal vektör üzerine c nin üçüncü türev vektörünün izdüşümü hesaplanıp elde edilir. (2.74) eşitliğinde ki $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ ve $(x^{''}, y^{''}, z^{''})$ birinci ve ikinci türevleri, (2.3) ve (2.4) eşitlikleri kullanılarak $u^{'}, v^{'}, u^{''}$ ve $v^{''}$ cinsinden ifade edilir. İkinci denklem (2.85) eşitliğiyle verilir [7].

3. ÖRNEKLER

Bu bölümde transversal arakesit eğrisi ve teğetsel arakesit eğrisi ile ilgili örneklere yer verildi. Bu bölümde [1], [6] ve [7] kaynaklardan ve çizimler için Mathematica 10.01 programından yararlanıldı.

3.1. Biri Parametrik Diğeri Kapalı Formda Verilen İki Yüzeyin Transversal Arakesiti

A yüzeyi

$$r = S(u, v) = (u, v, uv), \quad 0.5 \leq u \leq 2 \quad ve \quad 0 \leq v \leq 2 \tag{3.1}$$

parametrik formda verilen bir hiperbolik paraboloid ve B yüzeyi

$$f(x, y, z) = xz - y^2 = 0 \tag{3.2}$$

kapalı formunda verilen bir koni yüzeyi olsun. Şekil 3.1, biri x-ekseni olan iki arakesit eğrisine sahip arakesit yüzeylerini göstermektedir.
(3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} S_u &= (1, 0, v), \\ S_v &= (0, 1, u), \\ S_{uu} &= S_{vv} = 0, \\ S_{uv} &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

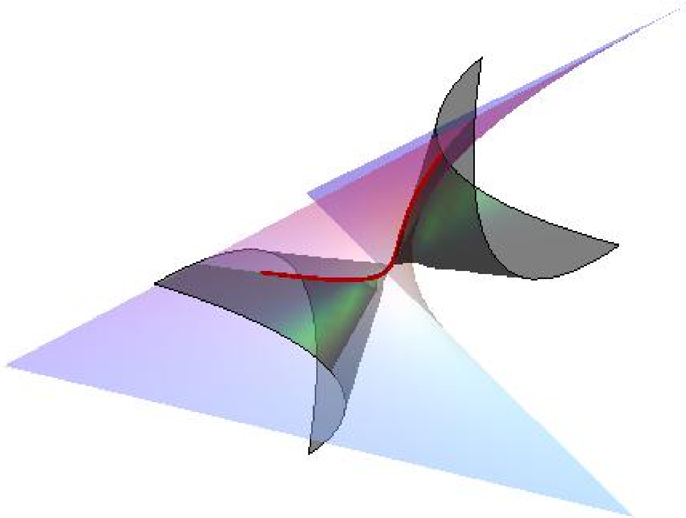
elde edilir ve ikiden daha yüksek mertebeden kısmi türevlerin tümü sıfırdır. Birinci ve ikinci temel formun katsayıları,

$$E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = 1 + u^2, \quad l = n = 0, \quad m = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}$$

dir.
Benzer şekilde

$$f_x = z, \quad f_y = -2y, \quad f_z = x,$$

$$f_{xx} = f_{xy} = f_{xz} = f_{zz} = 0, \quad f_{yy} = -2, f_{xz} = 1$$



Şekil 3.1: Biri parametrik diğeri kapalı formda verilen iki yüzeyin transversal arakesiti

olup, ikiden daha yüksek mertebeden kısmi türevlerin tümü sıfırdır.

A ve B yüzeylerinin birim normal vektörleri ve onların iç çarpımından

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^A &= \frac{(-v,-u,1)}{\sqrt{u^2+v^2+1}}, \\ \mathbf{N}^B &= \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(z,-2y,x)}{\sqrt{x^2+4y^2+z^2}} \\ \cos\theta &= \frac{x+2yu-zv}{\sqrt{u^2+v^2+1}\sqrt{x^2+4y^2+z^2}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitlikleri elde edilir.

Buradan arakesit eğrisinin birim teğet vektörü

$$T = (x^{'}, y^{'}, z^{'}) = \frac{(-xu+2y, xv+z, 2yv+zu)}{\sqrt{(-xu+2y)^2+(xv+z)^2+(2yv+zu)^2}} \tag{3.4}$$

olarak bulunur.

T yönünde parametrik formda verilen A yüzeyini normal eğriliğini hesaplamak için (2.17) eşitliğini kullanarak $(u^{'}, v^{'})$ hesaplanırsa,

$$(u^{'}, v^{'}) = \frac{(-xu+2y, xv+z)}{\sqrt{(-xu+2y)^2+(xv+z)^2+(2yv+zu)^2}} \tag{3.5}$$

ve buradan

$$\kappa_n{}^A = \frac{2(-xu+2y)(xv+z)}{\sqrt{u^2+v^2+1[(-xu+2y)^2+(xv+z)^2+(2yv+zu)^2]}} \tag{3.6}$$

elde edilir.
T yönündeki kapalı formda verilen yüzeyin normal eğriliği (2.22) eşitliğinden

$$\kappa_n{}^B = \frac{2(y^{'})^2 z - 2x^{'} z^{'}}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}} \tag{3.7}$$

biçiminde bulunur. (2.56) eşitliğinde $\mathbf{N}^A, \mathbf{N}^B, \cos\theta, \kappa_n{}^A$ ve $\kappa_n{}^B$ yerlerine yazılarak eğrilik vektörü ve böylece κ eğriliği elde edilebilir.
Birim normal vektör üzerine üçüncü mertebeden türevin izdüşümü parametrik ve kapalı formda verilen yüzeyler için (2.66) ve (2.74) eşitlikleri kullanılarak hesaplanır. Dolayısıyla,

$$\lambda_n{}^A = \frac{3(u^{'} v^{''} + u^{''} v^{'})}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}, \quad \lambda_n{}^B = \frac{-3(x^{'} z^{''} + x^{''} z^{'} - 2y^{'} y^{''})}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}} \tag{3.8}$$

olur. Burada $(u^{''}, v^{''})$, (2.72) eşitliğinden

$$\begin{aligned} u^{''} &= \frac{(\langle \mathbf{k}, S_u \rangle - 2vu^{'} v^{'})(1 + u^2) - (((\langle \mathbf{k}, S_v \rangle - 2uu^{'} v^{'})uv}{u^2 + v^2 + 1}, \\ v^{''} &= \frac{(\langle \mathbf{k}, S_v \rangle - 2uu^{'} v^{'})(1 + v^2) - (\langle \mathbf{k}, \mathbf{S}_u \rangle - 2vu^{'} v^{'})uv}{u^2 + v^2 + 1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

dir. $\kappa, T, \mathbf{N}^A, \mathbf{N}^B, \cos\theta, \lambda_n{}^A$ ve $\lambda_n{}^B$ bilindiğinden, üçüncü mertebeden türev (2.65) eşitliğinden ve torsiyonda (2.73) eşitliğinden elde edilir [7].

3.2. Kapalı Formda Verilen İki Yüzeyin Teğetsel Arakesiti (Dal Noktası)

İki kapalı formdaki yüzey

$$f^A(x, y, z) = \frac{x^2}{0.6^2} + \frac{y^2}{0.8^2} + \frac{z^2}{1^2} - 1 = 0 \tag{3.10}$$

ve

$$f^B(x, y, z) = \frac{x^2}{0.45^2} + \frac{y^2}{0.8^2} + \frac{z^2}{1.25^2} - 1 = 0 \tag{3.11}$$

denklemleri ile verilen elipsoidler olsun.
İki kapalı formdaki yüzeyin kısmi türevleri

$$f_x{}^A(x, y, z) = \frac{x}{0.18}, f_y{}^A = 3.125y, f_z{}^A = 2z,$$

$$f_{xx}{}^A = \frac{1}{0.18}, f_{yy}{}^A = 3.125, f_{zz}{}^A = 2, f_{xy}{}^A = f_{yz}{}^A = f_{xz}{}^A = 0,$$

$$f_x{}^B(x,y,z)=\frac{x}{0.10125}, f_y{}^B=3.125y, f_z{}^B=1.28z,$$

$$f_{xx}{}^B=\frac{1}{0.10125}, f_{yy}{}^B=3.125, f_{zz}{}^B=1.28, f_{xy}{}^B=f_{yz}{}^B=f_{xz}{}^B=0$$

olarak kolayca hesaplanır.

İkiden daha yüksek mertebeden kısmi türevlerin tümü sıfırdır. Açıkça, $P(0,0.8,0)$ arakesit noktasında ∇f^A ve ∇f^B paraleldir. Bu yüzden P teğetsel arakesit noktasıdır. Şimdi teğetsel yönü ve P teğetsel arakesit noktasındaki arakesit eğrisinin eğrilik vektörünü hesaplayalım. P noktasında $f_y{}^A\neq 0$ olduğu için x' ve z' yardımıyla y' ifade edebiliriz.

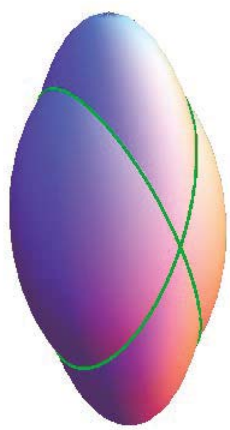
$$y'=-\frac{f_x{}^A x'+f_z{}^A z'}{f_y{}^A} \tag{3.12}$$

P noktasında $f_x{}^A=f_z{}^A=0$ olduğundan y' sıfırdır. T yönünde her iki kapalı formdaki yüzeyin P noktasındaki normal eğriliği aynıdır. Bu yüzden (2.22) den

$$\frac{f_{xx}{}^A(x')^2+f_{zz}{}^A(z')^2}{f_y{}^A}=\frac{f_{xx}{}^B(x')^2+f_{zz}{}^B(z')^2}{f_y{}^B} \tag{3.13}$$

elde edilir.

Bu, x' yardımıyla z' ye göre çözülebilen x' ve z' ye bağlı bir kuadratik denklemdir.



Şekil 3.2: Kapalı formda verilen iki yüzeyin transversal arakesiti

$x=z=0$, $y=0.8$ yerine konularak $z'=\pm(25/27)\sqrt{7}x'$ elde edilir ve böylece P dal noktasıdır. İfadenin normuna bölünmesiyle

$$(x',y',z')=(\frac{27}{4\sqrt{319}},0,\pm\frac{25\sqrt{7}}{4\sqrt{319}})$$

birim teğet vektörü elde edilir.
Daha sonra, eğrilik vektörü hesaplanabilir. (x'', y'', z'') deki ilk lineer denklem, (2.9) eşitliğinden elde edilir:

$$f_x{}^A x'' + f_y{}^A y'' + f_z{}^A z'' = -f_{xx}^A (x')^2 - f_{yy}^A (y')^2 - f_{zz}^A (z')^2. \tag{3.14}$$

İkinci denklem normal vektör üzerinde iki kapalı formdaki yüzeyin üçüncü türevlerinin izdüşümleri eşitlenerek elde edilir:

$$\frac{f_{xx}{}^A x' x'' + f_{yy}{}^A y' y'' + f_{zz}{}^A z' z''}{\sqrt{(f_x{}^A)^2 + (f_y{}^A)^2 + (f_z{}^A)^2}} = \frac{f_{xx}{}^B x' x'' + f_{yy}{}^B y' y'' + f_{zz}{}^B z' z''}{\sqrt{(f_x{}^B)^2 + (f_y{}^B)^2 + (f_z{}^B)^2}} \tag{3.15}$$

Üçüncü denklem de eğrilik vektörü teğet vektöre dik olduğundan dolayı

$$x' x'' + y' y'' + z' z'' = 0 \tag{3.16}$$

formundadır. P noktasında (3.14) , (3.15) ve (3.16) lineer sistemleri çözülerek

$$(x'', y'', z'') = (0, -\frac{320}{319}, 0)$$

bulunur, böylece $\kappa = 320/319$ dır [7].

3.3. Kapalı Formda Verilen İki Yüzeyin Teğetsel Arakesiti (İzole Edilmiş Teğetsel Değme Noktası)

A yüzeyi

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \tag{3.17}$$

kapalı formunda verilen bir küre ve B yüzeyi

$$g(x, y, z) = y - 1 = 0 \tag{3.18}$$

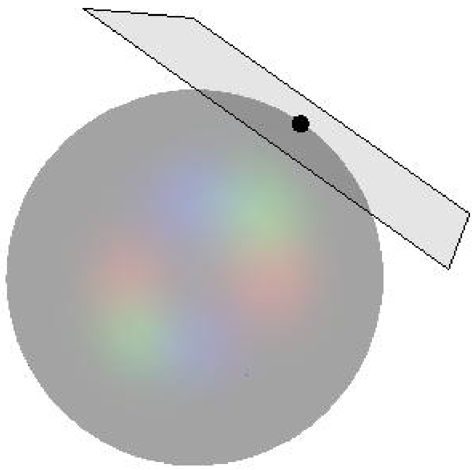
kapalı formunda verilen bir düzlem olsun. İki kapalı formdaki yüzeyin kısmi türevleri

$$\begin{aligned} f_x &= 2x, \\ f_y &= 2y, \\ f_z &= 2z, \\ f_{xx} &= f_{yy} = f_{zz} = 2, \\ f_{xy} &= f_{xz} = f_{yz} = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g_x &= 0, \\ g_y &= 1, \\ g_z &= 0, \\ g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} &= g_{xy} = g_{yz} = g_{xz} = 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $P(0,1,0)$ noktasında (2.7) eşitliğinden A ve B yüzeylerinin



Şekil 3.3: İzole edilmiş teğetsel değme noktası

normalleri, sırasıyla,

$$\mathbf{N}^A = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = (0,1,0) \tag{3.19}$$

ve

$$\mathbf{N}^B = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = (0,1,0) \tag{3.20}$$

olup, P noktasında $\mathbf{N}^A$ ve $\mathbf{N}^B$ eşittir. Bu yüzden, bu iki yüzey P noktasında teğetsel olarak kesişir. Şimdi bu iki yüzeyin normal eğriliklerini (2.22) eşitliğinden hesaplayalım. A yüzeyi için

$$\kappa_n^A = -\frac{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{3.21}$$

ve B yüzeyi için

$$\kappa_n^B = 0 \tag{3.22}$$

bulunur. $\mathbf{N}^A$ ve $\mathbf{N}^B$ eşit olduğundan κ_n^A ve κ_n^B eşittir. Buradan,

$$-\frac{(x^{'})^2 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

dir. Gerekli işlemlerin yapılmasıyla

$$(x^{'})^2 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2 = 0 \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.23) eşitliğinde $z^{'} = \sqrt{-(x^{'})^2 - (y^{'})^2}$ yazılırsa

$$(x^{'})^2 + (y^{'})^2 + \sqrt{-(x^{'})^2 - (y^{'})^2} = 0 \tag{3.24}$$

bulunur. $x^{'} \neq 0$ için $\frac{x^{'}}{y^{'}} = w$ ile gösterilirse, bu durumda (3.24) eşitliği aşağıdaki gibi ikinci dereceden bir denklem gösterir:

$$w^2 + 1 + \sqrt{-w^2 - 1} = 0. \tag{3.25}$$

(3.25) eşitliğinde ki bu denklem düzenlenirse

$$w^4 + 3w^2 + 2 = 0$$

elde edilir. Burada $t = w^2$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$t^2 + 3t + 2 = 0$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir ve bu denkleme ait kökler $t_1 = -2$ ve $t_2 = -1$ olarak bulunur. $w^2 = -2$ ve $w^2 = -1$ olamayacağından (3.25) eşitliği herhangi bir çözüme sahip değildir. Böylece P noktası A ve B yüzeyinin izole edilmiş teğetsel değme noktasıdır [6].

3.4. Kapalı Formda Verilen İki Yüzeyin Teğetsel Arakesiti (Teğetsel Arakesit Eğrisi)

A yüzeyi

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0 \tag{3.26}$$

kapalı formunda verilen bir tor yüzeyi ve B yüzeyi

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \tag{3.27}$$

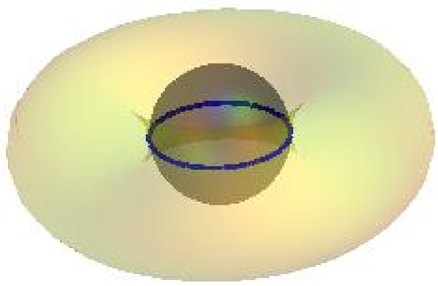
kapalı formunda verilen bir küre yüzeyi olsun. $z = 0$ noktasında, bu iki yüzey için $N^A = N^B$ ve $\Delta = 0$ olduğunu ve bu iki yüzey $z = 0$ noktasında teğetsel arakesit eğrisine sahiptir. (3.26) eşitliğinden kısmi türevler

$$
\begin{aligned}
f_x &= x(x^2 + y^2 - 5), \\
f_y &= y(x^2 + y^2 - 5), \\
f_z &= f_{zz} = f_{xz} = f_{yz} = 0, \\
f_{xx} &= 3x^2 + y^2 - 5, \\
f_{xy} &= 2xy
\end{aligned}
$$

ve (3.27) eşitliğinden de

$$
\begin{aligned}
g_x &= 2x, \\
g_y &= 2y, \\
g_z &= g_{zz} = g_{xy} = g_{yz} = g_{xz} = 0, \\
g_{xx} &= g_{yy} = 2
\end{aligned}
$$

dir. (2.7) eşitliğinden A ve B yüzeylerinin normalleri, sırasıyla,



Şekil 3.4: Teğetsel arakesit eğrisi

$$\mathbf{N}^A = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) \tag{3.28}$$

ve

$$\mathbf{N}^B = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) \tag{3.29}$$

olup, $z = 0$ noktasında $\mathbf{N}^A$ ve $\mathbf{N}^B$ eşittir. Bu yüzden, bu iki yüzey teğetsel olarak kesişir. Şimdi bu iki yüzeyin normal eğriliklerini (2.22) eşitliğinden hesaplayalım. A yüzeyi için

$$\kappa_n^A = -\frac{(3x^2+y^2-5)(x^{'})^2+(x^2+3y^2-5)(y^{'})^2+(4x^2+4y^2)(z^{'})^2+4xyx^{'}y^{'}}{(x^2+y^2-5)\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3.30}$$

ve B yüzeyi için

$$\kappa_n^B = -\frac{(x^{'})^2+(y^{'})^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3.31}$$

bulunur. $\mathbf{N}^A$ ve $\mathbf{N}^B$ eşit olduğundan κ_n^A ve κ_n^B eşittir. Buradan,

$$-\frac{(3x^2+y^2-5)(x^{'})^2+(x^2+3y^2-5)(y^{'})^2+(4x^2+4y^2)(z^{'})^2+4xyx^{'}y^{'}}{(x^2+y^2-5)\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{(x^{'})^2+(y^{'})^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

dir. Gerekli işlemlerin yapılmasıyla

$$x^2(x^{'})^2 + 2xyx^{'}y^{'} + y^2(y^{'})^2 = 0 \tag{3.32}$$

elde edilir. $x^{'} \neq 0$ için $\frac{x^{'}}{y^{'}} = w$ ile gösterilirse, bu durumda (3.32) eşitliği aşağıdaki gibi ikinci dereceden bir denklem gösterir:

$$x^2w^2 + 2xyw + y^2 = 0. \tag{3.33}$$

Bu ikinci dereceden denklemin diskriminantı

$$\Delta = (2xy)^2 - 4x^2y^2 = 0$$

olduğundan A ve B yüzeylerinin arakesit eğrisi teğetsel arakesit eğrisidir [6].

3.5. Parametrik Formda Verilen İki Yüzeyin Arakesiti

A yüzeyi

$$S^A(u_A, v_A) = (\cos u_A \cos v_A, \sin u_A \cos v_A, \sin v_A), \quad 0 \leq u_A \leq \pi, \quad 0 \leq v_A \leq 2\pi$$

parametrik denklemiyle verilen küre ve B

$$S^B(u_B, v_B) = (\frac{1}{2}\cos u_B + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin u_B, v_B), \quad -\pi \leq u_B \leq \pi, \quad -1.5 \leq v_B \leq 1.5$$

parametrik formunda verilen bir silindir yüzeyi olsun.
$P = S^A(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = S^B(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ noktasında arakesit eğrisinin geodezik

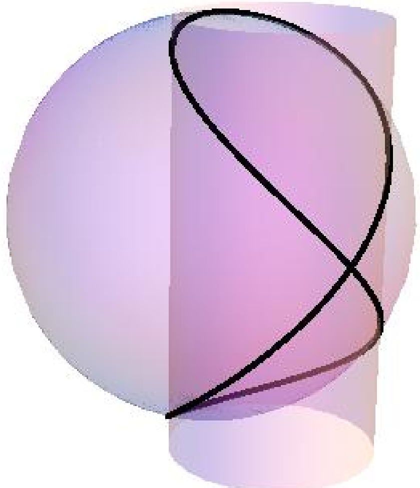
torsiyonunu, geodezik eğriliğini, eğrilik vektörünü ve eğriliğini bulabiliriz.
P noktasında A yüzeyinin kısmi türevleri

$$
\begin{aligned}
{S^A}_{u_A} &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \\
{S^A}_{v_A} &= (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \\
{S^A}_{u_A u_A} &= (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), \\
{S^A}_{u_A v_A} &= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), \\
{S^A}_{v_A v_A} &= (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})
\end{aligned}
$$

dir. Böylece, P noktasında A yüzeyinin birim normalini, birinci ve ikinci temel formun katsayılarını $\mathbf{N}^A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $E^A = -l^A = \frac{1}{2}$, $G^A = 1$, $E^A_v = n^A = -1$, $F^A = E^A_u = F^A_u = F^A_v = G^A_u = G^A_v = m^A = 0$ olarak hesaplanır. Benzer bir şekilde, P noktasında B yüzeyi için kısmi türevler

$$
\begin{aligned}
{S^B}_{u_B} &= (-\frac{1}{2}, 0, 0) \\
{S^B}_{v_B} &= (0, 0, 1) \\
{S^B}_{u_B u_B} &= (0, -\frac{1}{2}, 0) \\
{S^B}_{u_B v_B} = {S^B}_{v_B v_B} &= (0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

dir. P noktasında B yüzeyinin birim normalini, birinci ve ikinci temel formun



Şekil 3.5: Parametrik formda verilen iki yüzeyin arakesiti

katsayıları da $\mathbf{N}^B = (0, 1, 0)$, $E^B = \frac{1}{4}$, $G^B = 1$, $l^B = -\frac{1}{2}$, $F^B = E^B_p =$

$E_q^B = F_p^B = F_q^B = G_p^B = G_q^B = m^B = n^B = 0$ şeklinde hesaplanır.
O zaman, P noktasında arakesit eğrisinin teğet vektörü

$$T = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

dir. P noktasında (2.20) ve (2.58) eşitlikleri kullanılarak ${u_A}' = {v_A}' = \frac{\sqrt{6}}{3}$, ${u_B}' = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, ${v_B}' = \frac{\sqrt{3}}{3}$ bulunur. Bu yüzden, $\Lambda = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{3})$, ${u_A}'' = {v_A}'' = \frac{2}{9}$, ${u_A}'' = \frac{4}{9}$, ${v_A}'' = -\frac{2\sqrt{2}}{9}$ eşitlikleri elde edilir.
Eğer bu sonuçlar (2.49) ve (2.50) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\tau_g^A = 0, \quad \tau_g^B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ve (2.25) ve (2.25) eşitlikleri de kullanılırsa,

$$\kappa_g^A = \frac{5\sqrt{3}}{9}, \quad \kappa_g^B = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

olarak elde edilir.
Bundan dolayı, P noktasında (2.58) dan eğrilik vektörü

$$T' = (-\frac{2}{9}, -\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{9})$$

ve buradan da P noktasında eğrilik

$$\kappa = \frac{2\sqrt{39}}{9}$$

dir [1].

3.6. Kapalı Formda Verilen İki Yüzeyin Arakesiti

A kapalı formda verilen

$$f(x, y, z) = z - xy = 0$$

eğer yüzeyi ve B kapalı formda verilen

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 3 = 0$$

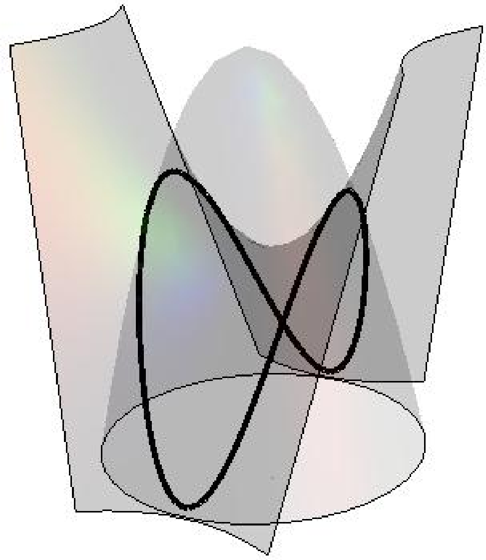
eliptik paraboloid olsun. $P = (1, -2, -2)$ arakesit noktasında A ve B yüzeyinin normal vektörleri sırasıyla $\nabla f = (2, -1, 1)$ ve $\nabla g = (2, -4, 1)$ dir. Ayrıca P noktasında kısmi türevler

$$f_{xx} = f_{xz} = f_{yy} = f_{yz} = f_{zz} = 0, \quad f_{xy} = -1$$

ve

$$g_{xy} = g_{xz} = g_{yz} = g_{zz} = 0, \quad g_{xx} = g_{yy} = 2$$

şeklindedir. Böylece, $\|\nabla f \times \nabla g\| = 3\sqrt{5}$, $\nabla F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\nabla G = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ ve



Şekil 3.6: Kapalı formda verilen iki yüzeyin arakesiti

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\tau_g^A = \frac{1}{6}$ ve $\tau_g^B = -\frac{16}{105}$ dir.
Arakesit eğrisinin geodezik eğriliğini bulmak için, (2.44) ve (2.45) eşitliklerinden elde edilen

$$\begin{aligned} x^{''} - 2z^{''} &= 0 \\ 2x^{''} - y^{''} + z^{''} &= 0 \\ 2x^{''} - 4y^{''} + z^{''} &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

lineer denklemler çözülmelidir. Bu sistemin çözümü $x^{''} = \frac{4}{75}$, $y^{''} = \frac{2}{15}$, $z^{''} = \frac{2}{75}$ dir. Böylece, A yüzeyine göre arakesit eğrisinin geodezik eğriliği $\kappa_g^A = \frac{2\sqrt{30}}{75}$ ve B yüzeyine göre $\kappa_g^A = \frac{2\sqrt{105}}{175}$ dir.
P noktasında arakesit eğrisinin eğrilik vektörü $\mathbf{T}^{'} = (\frac{4}{75}, \frac{2}{15}, \frac{2}{75})$ ve eğriliği $\kappa = \frac{2\sqrt{30}}{75}$ olarak hesaplanır [1].

KAYNAKLAR

[1] Düdül, B. U. ; Çalışkan, M. *The Geodesic Curvature and Geodesic Torsion of The Intersection Curve of Two Surfaces*, Acta Universitatis Apulensis, **2010**, 24, 161-172.

[2] Sabuncuoğlu, A. ; *Diferensiyel Geometri*, Nobel-Ankara, **2006**.

[3] Hacısalihoğlu, H. H. ; Ekmekçi, N. *Tensör Geometri*, Fen Fakültesi, Beşevler-Ankara, **2003**.

[4] Hacısalihoğlu, H. H. *2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri*, Ankara, **2005**.

[5] Hacısalihoğlu, H. H. *Diferensiyel Geometri 1. Cilt*, Fen Fakültesi, Beşevler-Ankara, **2000**.

[6] Nassar H. Abdel-All ; Sayed Abdel-Naeim Badr ; M. A. Soliman ; Soad A. Hassan *Intersection Curves of Two Implicit Surfaces in* $\mathbb{R}^3$, J. Math. Comput. Sci. 2 **2012**, No. 2, 157-171, 1927-5307.

[7] Ye, X. ; Maekawa, T. *Differential Geometry of Intersection Curves of Two Surfaces*, Computer-Aided Geometric Desing, **1999** 16, 767-788.

EK-A

Bu bölümde iki yüzeyin transversal arakesit eğrisinin geodezik eğriliği ve geodezik torsiyonu için Mathematica 10.01 progamında formülleştirmeler yapıldı.
A yüzeyi
$X[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}] := \{x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)\}$; parametrik denklemiyle verilen bir yüzey ve B yüzeyi
$Y[\mathrm{p\_}, \mathrm{q\_}] := \{y_1(p,q), y_2(p,q), y_3(p,q)\}$;
parametrik denklemiyle verilen bir yüzey olsun.
A yüzeyinin kısmi türevleri;
$X_u[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[X[u,v],u]];$
$X_v[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[X[u,v],v]];$
$X_{\mathrm{uu}}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[X[u,v],u,u]];$
$X_{\mathrm{uv}}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[X[u,v],u,v]];$
$X_{\mathrm{vv}}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[X[u,v],v,v]];$
A yüzeyinin birim normali;
$\mathrm{nA}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}\left[X_u[u,v] \times X_v[u,v]\right];$
$\mathrm{normnA}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}\left[\sqrt{\mathrm{nA}[u,v].\mathrm{nA}[u,v]}\right];$
$\mathrm{NA}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}\left[\frac{\mathrm{nA}[u,v]}{\mathrm{normnA}[u,v]}\right];$
A yüzeyi için birinci temel formunun katsayıları;
$\mathrm{Ea}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}\left[X_u[u,v].X_u[u,v]\right];$
$\mathrm{Fa}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}\left[X_u[u,v].X_v[u,v]\right];$
$\mathrm{Ga}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}\left[X_v[u,v].X_v[u,v]\right];$
İkinci temel formun katsayıları;
$\mathrm{La}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}\left[X_{\mathrm{uu}}[u,v].\mathrm{NA}[u,v]\right];$
$\mathrm{Ma}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}\left[X_{\mathrm{uv}}[u,v].\mathrm{NA}[u,v]\right];$
$\mathrm{Na}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}\left[X_{\mathrm{vv}}[u,v].\mathrm{NA}[u,v]\right];$
Birinci temel formun katsayılarının kısmi türevleri;
$\mathrm{Fu}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[\mathrm{Fa}[u,v],u]];$
$\mathrm{Fv}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[\mathrm{Fa}[u,v],v]];$
$\mathrm{Eu}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[\mathrm{Ea}[u,v],u]];$
$\mathrm{Ev}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[\mathrm{Ea}[u,v],v]];$
$\mathrm{Gu}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[\mathrm{Ga}[u,v],u]];$
$\mathrm{Gv}[\mathrm{u\_}, \mathrm{v\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[\mathrm{Ga}[u,v],v]];$
B yüzeyinin kısmi türevleri;
$Y_p[\mathrm{p\_}, \mathrm{q\_}]:=\mathrm{FullSimplify}[D[Y[p,q],p]];$

Y_q[p_, q_]:=FullSimplify[$D[Y[p,q],q]$];
Y_{pp}[p_, q_]:=FullSimplify[$D[Y[p,q],p,p]$];
Y_{pq}[p_, q_]:=FullSimplify[$D[Y[p,q],p,q]$];
Y_{qq}[p_, q_]:=FullSimplify[$D[Y[p,q],q,q]$];
B yüzeyinin birim normali;
nB[p_, q_]:=FullSimplify [$Y_p[p,q] \times Y_q[p,q]$] ;
normnB[p_, q_]:=FullSimplify $\left[\sqrt{\mathrm{nB}[p,q].\mathrm{nB}[p,q]}\right]$;
NB[p_, q_]:=FullSimplify $\left[\frac{\mathrm{nB}[p,q]}{\mathrm{normnB}[p,q]}\right]$;
B yüzeyi için birinci temel formunun katsayıları;
Eb[p_, q_]:=FullSimplify [$Y_p[p,q].Y_p[p,q]$] ;
Fb[p_, q_]:=FullSimplify [$Y_p[p,q].Y_q[p,q]$] ;
Gb[p_, q_]:=FullSimplify [$Y_q[p,q].Y_q[p,q]$] ;
İkinci temel formunun katsayıları;
Lb[p_, q_]:=FullSimplify [$Y_{\mathrm{pp}}[p,q]$.NB[p,q]] ;
Mb[p_, q_]:=FullSimplify [$Y_{\mathrm{pq}}[p,q]$.NB[p,q]] ;
Nb[p_, q_]:=FullSimplify [$Y_{\mathrm{qq}}[p,q]$.NB[p,q]] ;
Birinci temel formun katsayılarının kısmi türevleri;
fp[p_, q_]:=FullSimplify[D[Fb[p,q], p]];
fq[p_, q_]:=FullSimplify[D[Fb[p,q], q]];
ep[p_, q_]:=FullSimplify[D[Eb[p,q], p]];
eq[p_, q_]:=FullSimplify[D[Eb[p,q], q]];
gp[p_, q_]:=FullSimplify[D[Gb[p,q], p]];
gq[p_, q_]:=FullSimplify[D[Gb[p,q], q]];
Arakesit eğrisinin tanjant vektörü;
Tpay[u_, v_, p_, q_]:=FullSimplify[NA[u,v] × NB[p,q]];
Tpayda[u_, v_, p_, q_]:=FullSimplify $\left[\sqrt{(\mathrm{NA}[u,v]\times\mathrm{NB}[p,q]).(\mathrm{NA}[u,v]\times\mathrm{NB}[p,q])}\right]$;
T[u_, v_, p_, q_]:=FullSimplify $\left[\frac{\mathrm{NA}[u,v]\times\mathrm{NB}[p,q]}{\sqrt{(\mathrm{NA}[u,v]\times\mathrm{NB}[p,q]).(\mathrm{NA}[u,v]\times\mathrm{NB}[p,q])}}\right]$; u' ve v' ;
u[u_, v_, p_, q_]:=
FullSimplify [(Ga[u,v] ($T[u,v,p,q].X_u[u,v]$) − Fa[u,v] ($T[u,v,p,q].X_v[u,v]$))/
(Ea[u,v]Ga[u,v] − Fa[u,v]^2)] ;
v[u_, v_, p_, q_]:=
FullSimplify [(Ea[u,v] ($T[u,v,p,q].X_v[u,v]$) − Fa[u,v] ($T[u,v,p,q].\ X_u[u,v]$))/
(Ea[u,v]Ga[u,v] − Fa[u,v]^2)] ; p' ve q' ;
p[u_, v_, p_, q_]:=
FullSimplify [(Gb[p,q] ($T[u,v,p,q].Y_p[p,q]$) − Fb[p,q] ($T[u,v,p,q].Y_q[p,q]$))/
(Eb[p,q]Gb[p,q] − Fb[p,q]^2)] ;

q[u_, v_, p_, q_]:=

FullSimplify $[(\mathrm{Eb}[p,q]\,(T[u,v,p,q].Y_q[p,q]) - \mathrm{Fb}[p,q]\,(T[u,v,p,q].Y_p[p,q])\ )/$

$(\mathrm{Eb}[p,q]\mathrm{Gb}[p,q] - \mathrm{Fb}[p,q]^2)]$;

A ve B yüzeyinin normal eğrilikleri, sırasıyla,

KNA[u_, v_, p_, q_]:=

FullSimplify $[\mathrm{La}[u,v]u[u,v,p,q]^2 + 2\mathrm{Ma}[u,v]\mathrm{Na}[u,v]u[u,v,p,q]v[u,v,p,q] + \mathrm{Na}[u,v]v[u,v,p,q]^2]$

KNB[u_, v_, p_, q_]:=

FullSimplify $[\mathrm{Lb}[p,q]p[u,v,p,q]^2 + 2\mathrm{Mb}[p,q]\mathrm{Nb}[p,q]p[u,v,p,q]q[u,v,p,q] + \mathrm{Nb}[p,q]q[u,v,p,q]^2]$;

A ve B yüzeylerinin normallerinden;

cos[u_, v_, p_, q_]:=FullSimplify[NA$[u,v]$.NB$[p,q]$];

sin[u_, v_, p_, q_]:=FullSimplify $[1 - (\cos[u,v,p,q])^2]$;

kappa[u_, v_, p_, q_]:=

FullSimplify[

$\frac{1}{\sin[u,v,p,q]}\sqrt{}(\mathrm{KNA}[u,v,p,q]^2 + \mathrm{KNB}[u,v,p,q]^2 - 2\mathrm{KNA}[u,v,p,q]\mathrm{KNB}[u,v,p,q]\cos[u,v,p,q])\Big]$;

A ve B yüzeylerinin geodezik torsiyonları, sırasıyla,

TGA[u_, v_, p_, q_]:=

FullSimplify $\Big[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ea}[u,v]\mathrm{Ga}[u,v]-\mathrm{Fa}[u,v]^2}}$

$((\mathrm{Ea}[u,v]\mathrm{Ma}[u,v] - \mathrm{Fa}[u,v]\mathrm{La}[u,v])u[u,v,p,q]^2 +$

$(\mathrm{Ea}[u,v]\mathrm{Na}[u,v] - \mathrm{Ga}[u,v]\mathrm{La}[u,v])u[u,v,p,q]v[u,v,p,q] +$

$(\mathrm{Fa}[u,v]\mathrm{Na}[u,v] - \mathrm{Ga}[u,v]\mathrm{Ma}[u,v])\ v[u,v,p,q]^2)]$;

ve

TGB[u_, v_, p_, q_]:=

FullSimplify $\Big[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Eb}[p,q]\mathrm{Gb}[p,q]-\mathrm{Fb}[p,q]^2}}$

$((\mathrm{Eb}[p,q]\mathrm{Mb}[p,q] - \mathrm{Fb}[p,q]\mathrm{Lb}[p,q])p[u,v,p,q]^2 +$

$(\mathrm{Eb}[p,q]\mathrm{Nb}[p,q] - \mathrm{Gb}[p,q]\mathrm{Lb}[p,q])p[u,v,p,q]q[u,v,p,q] +$

$(\mathrm{Fb}[p,q]\mathrm{Nb}[p,q] - \mathrm{Gb}[p,q]\mathrm{Mb}[p,q])\ q[u,v,p,q]^2)]$;

dir.

Λ[u_, v_, p_, q_]:=Y11$[p,q]$p1$[u,v,p,q]^2$ + 2Y12$[p,q]$p1$[u,v,p,q]$ q1$[u,v,p,q]$ +

Y22$[p,q]$q1$[u,v,p,q]^2$−X11$[u,v]$u1$[u,v,p,q]^2$−2X12$[u,v]$u1$[u,v,p,q]$ v1$[u,v,p,q]$−

X22$[u,v]$v1$[u,v,p,q]^2$;

olup

a11[u_, v_, p_, q_]:=FullSimplify $\left[\frac{\mathrm{Det}[\{\mathrm{X1}[u,v],\mathrm{Y2}[p,q],\mathrm{NB}[p,q]\}]}{\sqrt{\mathrm{Eb}[p,q]\mathrm{Gb}[p,q]-\mathrm{Fb}[p,q]^2}}\right]$;

a12[u_, v_, p_, q_]:=FullSimplify $\left[\frac{\mathrm{Det}[\{\mathrm{X2}[u,v],\mathrm{Y2}[p,q],\mathrm{NB}[p,q]\}]}{\sqrt{\mathrm{Eb}[p,q]\mathrm{Gb}[p,q]-\mathrm{Fb}[p,q]^2}}\right]$;

a13[u_, v_, p_, q_]:=FullSimplify $\left[\frac{\mathrm{Det}[\{\mathrm{Y2}[p,q],\Lambda[u,v,p,q],\mathrm{NB}[p,q]\}]}{\sqrt{\mathrm{Eb}[p,q]\mathrm{Gb}[p,q]-\mathrm{Fb}[p,q]^2}}\right]$;
a21[u_, v_, p_, q_]:=FullSimplify $\left[\frac{\mathrm{Det}[\{\mathrm{Y1}[p,q],\mathrm{X1}[u,v],\mathrm{NB}[p,q]\}]}{\sqrt{\mathrm{Eb}[p,q]\mathrm{Gb}[p,q]-\mathrm{Fb}[p,q]^2}}\right]$;
a22[u_, v_, p_, q_]:=FullSimplify $\left[\frac{\mathrm{Det}[\{\mathrm{Y1}[p,q],\mathrm{X2}[u,v],\mathrm{NB}[p,q]\}]}{\sqrt{\mathrm{Eb}[p,q]\mathrm{Gb}[p,q]-\mathrm{Fb}[p,q]^2}}\right]$;
a23[u_, v_, p_, q_]:=FullSimplify $\left[\frac{\mathrm{Det}[\{\Lambda[u,v,p,q],\mathrm{Y1}[p,q],\mathrm{NB}[p,q]\}]}{\sqrt{\mathrm{Eb}[p,q]\mathrm{Gb}[p,q]-\mathrm{Fb}[p,q]^2}}\right]$;
dir. Buradan,
p2[u_, v_, p_, q_]:=
FullSimplify[a11$[u, v, p, q]$u2$[u, v, p, q]$ + a12$[u, v, p, q]$v2$[u, v, p, q]$ + a13$[u, v, p, q]$];
q2[u_, v_, p_, q_]:=
FullSimplify[a21$[u, v, p, q]$u2$[u, v, p, q]$ + a22$[u, v, p, q]$v2$[u, v, p, q]$ + a23$[u, v, p, q]$];
dir.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	AKINCI Benen
Uyruğu	:	T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri	:	04.11.1989 Beykoz
e-mail	:	benenkzlgdk@gmail.com

Eğitim

Lise	:	50. Yıl İnsa Lisesi
Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil	:	İngilizce