T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WRIGHT FONKSİYONU İLE TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR

Enes ATA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR 2018

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WRIGHT FONKSİYONU İLE TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR

Enes ATA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

KIRŞEHİR 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK** Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan:
Doç. Dr. Recep ŞAHİN

Üye:
Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

Üye:
Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../20..

Prof. Dr. Yılmaz ALTUN
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik, davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Enes ATA

WRIGHT FONKSİYONU İLE TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Enes ATA

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Ağustos 2018

ÖZET

Bu çalışmada,Wright fonksiyonu yardımıyla genelleştirilmiş gama ve beta fonksiyonları tanımlanmış, ardından genelleştirilmiş beta fonksiyonu kullanılarak Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonları da genelleştirilmiştir. Ayrıca, tanımlanan genelleştirilmiş fonksiyonlar için integral temsilleri, Mellin dönüşümleri, türev formülleri, dönüşüm formülleri ve indirgeme bağıntıları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Wright fonksiyonu, Gauss hipergeometrik fonksiyonu, Konfluent hipergeometrik fonksiyonu.

Sayfa Adedi: 55

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

GENERALIZED SPECIAL FUNCTIONS DEFINED BY WRIGHT FUNCTION

(Master Thesis)

Enes ATA

Kırşehir Ahi Evran University
Institute of Science

August 2018

ABSTRACT

In this study, new generalizations of gamma and beta functions are defined with the help of Wright function and then, new generalizations of Gauss and confluent hypergeometric functions are also given by using the generalized beta function. Furthermore, for these generalized functions the integral representations, Mellin transformations, derivative formulas, transformation formulas and recurrence relations are obtained.

Keywords: Gamma function, Beta function, Wright function, Gauss hypergeometric function, Confluent hypergeometric function.
Number of Pages: 55
Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. İ. Onur KIYMAZ

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim süresince değerli ve derin bilgileriyle bana yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek destek olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ'a, titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım Sayın Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA'ya, eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Enes ATA

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\Gamma(x)$	: Gama fonksiyonu
$B(x,y)$	: Beta fonksiyonu
$(\alpha)_n$	: Pochhammer sembolü
$F(a,b;c;z)$	: Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$\Phi(b;c;z)$	: Konfluent hipergeometrik fonksiyonu
${}_0\Psi_1(\alpha,\beta;z)$	: Wright fonksiyonu
$\mathcal{M}\left[f(x):s\right]$	: Mellin dönüşümü
$\mathcal{M}^{-1}\left[F(s):x\right]$	: Ters Mellin dönüşümü
$\Gamma(x;p)$	: Genişletilmiş gama fonksiyonu
${}^{\Psi}\Gamma_p^{(\alpha,\beta)}(x)$	: Ψ-gama fonksiyonu
$B(x,y;p)$	: Genişletilmiş beta fonksiyonu
${}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)$	: Ψ-beta fonksiyonu
$F_p(a,b;c;z)$	: Genişletilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonu
${}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)$	: Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$\Phi_p(b;c;z)$	: Genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonu
${}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)$	: Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonu
$H(t)$	: Heaviside fonksiyonu
$\delta(t)$	: Dirac delta fonksiyonu
$\Delta f(t)$	: Fark operatörü

1. GİRİŞ

Özel fonksiyonlar teorisi uygulamalı matematiğin önemli çalışma alanlarından biridir. Özel fonksiyonlar, genellikle has olmayan integraller ya da sonsuz seriler yardımıyla tanımlanırlar. Bu fonksiyonların en önemli olanlarından bazıları gama, beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarıdır.

Literatür incelendiğinde, bu fonksiyonlarla ilgili çok sayıda yayın olduğu görülmektedir (bkz. [1-4, 15, 16, 23, 29, 31, 32, 41]). Ayrıca, bu fonksiyonların fizik, istatistik, tıp ve mühendislik bilimlerinde pek çok uygulama alanına sahip olduğu da bir gerçektir (bkz. [5-10, 14, 17, 19, 20, 22, 26, 32, 34, 39, 40]).

Son yıllarda özel fonksiyonların çeşitli genelleştirmeleri üzerine de oldukça çok sayıda yayın yapılmaktadır (bkz. [6, 11-13, 18, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 33, 35-38, 40, 42]). Bu çalışmaların bir çoğunda genelleştirmeler, gama fonksiyonunun integral temsilinde yer alan e^{-t} terimi yerine daha genel fonksiyonlar kullanılarak tanımlanmaktadır. Daha sonra simetri özelliğini bozmayacak şekilde benzer bir terim kullanılarak beta fonksiyonu için de genelleştirmeler verilmektedir. Son olarak, Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonların genelleştirmelerini tanımlamak için de genelleştirilmiş beta fonksiyonu kullanılmaktadır. Tüm bu çalışmalar ile özel fonksiyonların uygulama alanlarının genişletilmesi amaçlanmaktadır. Bu çalışmalardan bazılarına tezin üçüncü bölümünde değinilecektir.

Bu tez çalışmasında, yukarıda bahsedilen bu yayınlardan da esinlenerek, Wright fonksiyonu yardımıyla gama, beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonları için yeni genelleştirmeler tanımlanacaktır. Ayrıca tanımlanan bu fonksiyonlar için çeşitli özellikler incelenecek ve bazı integral temsilleri, Mellin dönüşümleri, türev formülleri, dönüşüm formülleri ve indirgeme bağıntıları elde edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde kullanılacak bazı temel kavramlara değinilecektir.

Tanım 2.1. (Gama Fonksiyonu) Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x>0 \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır [1].

Gama fonksiyonuna

$$\Gamma(x+1)=x!, \quad x>-1$$

özelliğinden dolayı genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir [1]. Ayrıca

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), \quad x>0$$

eşitliği de sağlanır [1]. Belirtelim ki, $x\in\mathbb{C}$ olması durumunda (2.1) integrali $Re(x)>0$ için yakınsaktır [39].

Tanım 2.2. (Beta Fonksiyonu) $B(x,y)$ ile gösterilen beta fonksiyonu

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x>0,\ y>0 \tag{2.2}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır [1].

Gama fonksiyonu ile beta fonksiyonu arasında

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x,y\neq 0,-1,-2,\ldots \tag{2.3}$$

şeklinde bir ilişki vardır [39]. Ayrıca (2.3) eşitliğinden kolaylıkla görülebilir ki

$$B(x,y)=B(y,x) \tag{2.4}$$

olup, bu eşitlik beta fonksiyonunun simetri özelliği olarak adlandırılır [1].

Yine belirtmeliyiz ki, $x,y \in \mathbb{C}$ olması durumunda (2.2) integrali $Re(x)>0$ ve $Re(y)>0$ için yakınsaktır [39].

Diğer taraftan (2.2) integral temsilinde $t=(\sin\theta)^2$ ve $t=\frac{u}{1+u}$ dönüşümleri yapılırsa beta fonksiyonu için iki ayrı integral temsili sırasıyla

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta, \quad x>0,\ y>0$$
$$B(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du, \quad x>0,\ y>0$$

biçiminde elde edilir [1].

Tanım 2.3. (Pochhammer Sembolü) α kompleks bir sayı ve n sıfır ya da pozitif tamsayı olmak üzere Pochhammer sembolü

$$(\alpha)_n=\begin{cases}\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) & ,n\in\mathbb{N}\\ 1 & ,n=0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [39]. Ayrıca Pochhammer sembolü gama fonksiyonu yardımıyla

$$(\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha\neq 0,-1,-2,\dots$$

biçiminde de verilir [39].

Tanım 2.4. (Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu) $a,b,c\in\mathbb{C}$ ve $c\neq 0,-1,-2,\dots$ olmak üzere Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_1(a,b;c;z)=F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}, \quad |z|<1$$

şeklinde tanımlanır [39].

Pochhammer sembolü ile beta fonksiyonu arasındaki

$$\frac{(b)_n}{(c)_n}=\frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c)\Gamma(c-b)}{\Gamma(b)\Gamma(c+n)\Gamma(c-b)}=\frac{B(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}, \quad Re(c)>Re(b)>0 \tag{2.5}$$

özelliğinden [1] yararlanılarak Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}, \quad |z|<1$$
$$(Re(c)>Re(b)>0)$$

biçiminde de yazılabilir.

Ayrıca Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$
{}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt
$$
$$
(|arg(1-z)|<\pi,\, Re(c)>Re(b)>0)
$$

integral temsiline sahiptir [39].

Tanım 2.5. (Konfluent Hipergeometrik Fonksiyonu) $b,c\in\mathbb{C}$ ve $c\neq 0,-1,-2,\ldots$ olmak üzere konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$
{}_1F_1(b;c;z)=\Phi(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<\infty
$$

şeklinde ifade edilir [39]. (2.5) özelliğinden yararlanılarak konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$
\Phi(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}
$$
$$
(Re(c)>Re(b)>0)
$$

biçiminde de yazılabilir. Ayrıca konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$
\Phi(b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}dt
$$
$$
(Re(c)>Re(b)>0)
$$

integral temsiline sahiptir [39].

Tanım 2.6. (Mellin Dönüşümü) $(0,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir f fonksiyonu için

$$
\mathcal{M}[f(x):s]=F(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)dx,\quad s\in\mathbb{C}
$$

ifadesine f fonksiyonunun Mellin dönüşümü denir [19]. Ayrıca Mellin dönüşümü

$$
\mathcal{M}[f(x):s]=F(s)\Rightarrow\mathcal{M}[f'(x):s]=-(s-1)F(s-1) \tag{2.6}
$$

eşitliğini sağlar [19].

Tanım 2.7. (Ters Mellin Dönüşümü) F fonksiyonunun ters Mellin dönüşümü

$$\mathcal{M}^{-1}[F(s):x]=f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}-i\infty}^{\mathfrak{c}+i\infty} x^{-s}F(s)ds, \quad \mathfrak{c}=Re(s)$$

şeklinde tanımlanır [19].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR

Bu bölümde gama, beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının çeşitli genellemeleri üzerine yapılmış bazı çalışmalara değineceğiz.

1994 yılında Chaudhry ve Zubair [6] klasik gama integral temsiline düzenleyici olarak $e^{-\frac{p}{t}}$ çarpanını ekleyerek genişletilmiş gama fonksiyonunu

$$\Gamma(x;p)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{\left(-t-\frac{p}{t}\right)}dt, \quad Re(p)>0 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlamışlar ve gama fonksiyonunun tanım kümesini tüm kompleks düzleme genişletmişlerdir. Beta fonksiyonu için de aynı genelleme düşünülürse gama fonksiyonu için kullanılan $e^{-\frac{p}{t}}$ düzenleyicisinin beta fonksiyonu için çok önemli olan (2.4) simetri özelliğini bozacağı görülür. Bu yüzden 1997 yılında Chaudhry ve arkadaşları [9] klasik beta integral temsiline $e^{-\frac{p}{t(1-t)}}$ çarpanını ekleyerek genişletilmiş beta fonksiyonunu

$$B(x,y;p)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}e^{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)}dt, \quad Re(p)>0 \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlamışlar ve tanım kümesini tüm kompleks düzleme genişletmişlerdir. Kolayca görülebileceği gibi $p=0$ için (3.1) ve (3.2) integral temsilleri, klasik gama ve beta integral temsillerine indirgenir.

2004 yılında Chaudhry ve arkadaşları [11], 1997 yılında genişlettikleri beta fonksiyonu yardımıyla, genişletilmiş Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının serisel temsillerini $p\geq 0$ ve $Re(c)>Re(b)>0$ olmak üzere sırasıyla

$$F_p(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B(b+n,c-b;p)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}, \quad |z|<1 \tag{3.3}$$

$$\Phi_p(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(b+n,c-b;p)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

2011 yılında Özergin ve arkadaşları [30], gama ve beta fonksiyonlarının

$$\Gamma_p^{(\alpha,\beta)}(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-t-\frac{p}{t}\right)dt$$

$$(Re(p)>0, Re(x)>0, Re(\alpha)>0, Re(\beta)>0),$$

$$B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \tag{3.5}$$

$$(Re(p)>0, Re(x)>0, Re(y)>0, Re(\alpha)>0, Re(\beta)>0)$$

biçiminde genelleştirmelerini vermişlerdir. Ayrıca (3.5) genelleştirilmiş beta fonksiyonunu kullanarak, genelleştirilmiş Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının serisel temsillerini

$$F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

$$\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

biçiminde tanımlamışlardır.

2011 yılında Lee ve arkadaşları [21], genelleştirilmiş beta fonksiyonunu

$$B(x,y;p;m)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}e^{\left(-\frac{p}{t^m(1-t)^m}\right)}dt, \quad Re(p)>0, m>0$$

şeklinde ifade etmişlerdir. Bu fonksiyon yardımıyla, genelleştirilmiş Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının serisel temsillerini $Re(c) > Re(b) > 0$ ve $p \geq 0, m > 0$ olmak üzere

$$F_p(a,b;c;z;m)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B(b+n,c-b;p;m)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}, \quad |z|<1$$

$$\Phi_p(b;c;z;m)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(b+n,c-b;p;m)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

biçiminde vermişlerdir.

2013 yılında Parmar [33], genelleştirilmiş gama ve beta fonksiyonlarını

$$\Gamma_p^{(\alpha,\beta;m)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-t-\frac{p}{t^m}\right)dt$$

$$(Re(p)>0, Re(x)>0, Re(m)>0, Re(\alpha)>0, Re(\beta)>0),$$

$$B_p^{(\alpha,\beta;m)}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{p}{t^m(1-t)^m}\right)dt \tag{3.6}$$

$$(Re(p)>0, Re(x)>0, Re(y)>0, Re(m)>0, Re(\alpha)>0, Re(\beta)>0)$$

şeklinde tanımlamıştır. Ayrıca genelleştirdiği (3.6) beta fonksiyonunu kullanarak, genelleştirilmiş Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının serisel temsillerini $p\geq 0, Re(m)>0, Re(c)>Re(b)>0, Re(\alpha)>0$ ve $Re(\beta)>0$ olmak üzere

$$F_p^{(\alpha,\beta;m)}(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a)_n \frac{B_p^{(\alpha,\beta;m)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}, \quad |z|<1$$

$$\Phi_p^{(\alpha,\beta;m)}(b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_p^{(\alpha,\beta;m)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

biçiminde ifade etmiştir.

2014 yılında Choi ve arkadaşları [12], genelleştirilmiş beta fonksiyonunu

$$B(x,y;p,q) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}e^{\left(-\frac{p}{t}-\frac{q}{1-t}\right)}dt$$

$$(Re(p)>0, Re(q)>0)$$

şeklinde tanımlamışlardır. Buradan genelleştirilmiş Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının serisel temsillerini $Re(c) > Re(b) > 0$ ve $p \geq 0, q \geq 0$ olmak üzere

$$F_{p,q}(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a)_n \frac{B(b+n,c-b;p,q)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}, \quad |z|<1$$

$$\Phi_{p,q}(b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(b+n,c-b;p,q)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

biçiminde tanımlamışlardır.

2014 yılında Srivastava ve arkadaşları [40], genelleştirilmiş beta fonksiyonunu

$$B_p^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{p}{t^{\kappa}(1-t)^{\mu}}\right)dt$$

$$(Re(p)\geq 0, \min\{Re(x),Re(y),Re(\alpha),Re(\beta)\}>0, \min\{Re(\kappa),Re(\mu)\}>0)$$

şeklinde vermişlerdir. Ayrıca genelleştirilmiş beta fonksiyonu yardımıyla, genelleştirilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonunun serisel temsilini $Re(c) > Re(b) > 0$, $Re(p) \geq 0$, $\min\{Re(\alpha),Re(\beta),Re(\kappa),Re(\mu)\} > 0$ olmak üzere

$$F_p^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B_p^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1$$

biçiminde ifade etmişlerdir.

2017 yılında Mubeen ve arkadaşları [27], genelleştirilmiş beta fonksiyonunu

$$B_{p,q}^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{p}{t}\right){}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{q}{1-t}\right)dt$$

$$(p,q\in\mathbb{R}_0^+, \alpha\in\mathbb{C},\ \beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-, Re(x)>0, Re(y)>0)$$

şeklinde tanımlamışlardır.

2018 yılında Goswami ve arkadaşları [18], genelleştirilmiş beta fonksiyonunu

$$B_{p,q}^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{p}{t}-\frac{q}{1-t}\right)dt$$

$$(\alpha\in\mathbb{C},\beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-, \min\{Re(p),Re(q)\}>0, p=q=0, \min\{Re(x),Re(y)\}>0)$$

biçiminde tanımlamışlardır. Ayrıca bu fonksiyon yardımıyla, genelleştirilmiş Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının serisel temsillerini $p,q\in\mathbb{R}_0^+$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ ve $Re(c) > Re(b) > 0$ olmak üzere

$$F_{p,q}^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B_{p,q}^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1$$

$$\Phi_{p,q}^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{p,q}^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

olacak biçimde tanımlamışlardır.

2018 yılında Shadab ve arkadaşları [38], genelleştirilmiş beta fonksiyonunu

$$B^{p}_{\alpha}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}E_{\alpha}\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt$$
$$(\alpha\in\mathbb{R}^{+}_{0},\, Re(p)\geq 0)$$

şeklinde tanımlamışlardır. Yine bu fonksiyon yardımıyla, genelleştirilmiş Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının serisel temsillerini $\alpha\in\mathbb{R}^{+}, p\in\mathbb{R}^{+}_{0}$ ve $Re(c)>Re(b)>0$ olmak üzere

$$F_{p,\alpha}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B^{p}_{\alpha}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1$$
$$\Phi_{p,\alpha}(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^{p}_{\alpha}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

biçiminde tanımlamışlardır. Yukarıda kullanılan E_{α} fonksiyonu Mittag-Leffler fonksiyonu olarak adlandırılır ve

$$E_{\alpha}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)},\quad \alpha\in\mathbb{C},\ Re(\alpha)>0$$

biçiminde tanımlanır [22].

2018 yılında Rahman ve arkadaşları [36], genelleştirilmiş beta fonksiyonunu

$$B^{\alpha;m}_{p}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}E_{\alpha}\left(-\frac{p}{t^m(1-t)^m}\right)dt \tag{3.7}$$
$$(Re(p)\geq 0, Re(x)>0, Re(y)>0, \alpha, m>0)$$

şeklinde ifade etmişlerdir. Ayrıca (3.7) fonksiyonu yardımıyla, genelleştirilmiş Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının serisel temsillerini $p\geq 0$, $\alpha>0$, $m>0$ ve $Re(c)>Re(b)>0$ olmak üzere

$$F^{\alpha;m}_{p}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B^{\alpha;m}_{p}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1$$
$$\Phi^{\alpha;m}_{p}(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^{\alpha;m}_{p}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

olacak şekilde vermişlerdir.

2018 yılında Rahman ve arkadaşları [37], genelleştirilmiş beta fonksiyonunu

$$B^{\alpha}_{p,q}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}E_{\alpha}\left(-\frac{p}{t}\right)E_{\alpha}\left(-\frac{q}{1-t}\right)dt$$

$$(p,q\geq 0, Re(x)>0, Re(y)>0, Re(\alpha)>0)$$

şeklinde tanımlamışlardır. Yine bu fonksiyonu kullanarak, genelleştirilmiş Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının serisel temsillerini $Re(c) > Re(b) > 0$, $p,q \geq 0$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere

$$F^{\alpha}_{p,q}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B^{\alpha}_{p,q}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1$$

$$\Phi^{\alpha}_{p,q}(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^{\alpha}_{p,q}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

biçiminde ifade etmişlerdir.

2018 yılında Çetinkaya ve arkadaşları [13, 14], genelleştirilmiş gama ve beta fonksiyonlarını

$$\Gamma^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}_{p,q}(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{t^{\kappa}}{p}-\frac{q}{t^{\mu}}\right)dt$$

$$(\min\{Re(p),Re(q),Re(\alpha),Re(\beta),Re(\kappa),Re(\mu)\}>0, R(x)>0),$$

$$B^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}_{p,q}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1F_1\left(\alpha;\beta;-\frac{p}{t^{\kappa}}-\frac{q}{(1-t)^{\mu}}\right)dt$$

$$(\min\{Re(p),Re(q),Re(\alpha),Re(\beta),Re(\kappa),Re(\mu)\}>0, \min\{Re(x),Re(y)\}>0)$$

şeklinde tanımlamışlardır. Ayrıca genelleştirdikleri beta fonksiyonu yardımıyla, genelleştirilmiş Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının serisel temsillerini $\min\{Re(p),Re(q),Re(\alpha),Re(\beta),Re(\kappa),Re(\mu)\}>0$ ve $R(c)>R(b)>0$ olmak üzere

$$F^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}_{p,q}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{B^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}_{p,q}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1$$

$$\Phi^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}_{p,q}(b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^{(\alpha,\beta;\kappa,\mu)}_{p,q}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$

ile vermişlerdir.

2018 yılında Şahin ve arkadaşları [42], genelleştirilmiş gama ve beta fonksiyonlarını

$$\Gamma_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{\left(-\frac{t^\kappa}{p} - \frac{q}{t^\mu}\right)} dt$$

$$(R(p) > 0, R(q) > 0, R(\kappa) > 0, R(\mu) > 0),$$

$$B_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} e^{\left(-\frac{p}{t^\kappa} - \frac{q}{(1-t)^\mu}\right)} dt \tag{3.8}$$

$$(R(p) > 0, R(q) > 0, R(\kappa) > 0, R(\mu) > 0)$$

olacak biçimde tanımlamışlardır [42]. Yine (3.8) genelleştirilmiş beta fonksiyonunu kullanarak, genelleştirilmiş Gauss ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının serisel temsillerini $\min\{R(p) > 0, R(q) > 0, R(\kappa) > 0, R(\mu) > 0\}$ ve $R(c) > R(b) > 0$ olmak üzere

$$F_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^\infty (a)_n \frac{B_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(b+n, c-b)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

$$\Phi_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(b;c;z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{B_{p,q}^{(\kappa,\mu)}(b+n, c-b)}{B(b, c-b)} \frac{z^n}{n!}$$

şeklinde ifade etmişlerdir.

Yukarıda bahsedilen tüm bu çalışmalardan da esinlenerek, tez çalışmasının sonraki bölümünde Wright fonksiyonu yardımıyla yeni genelleştirilmiş özel fonksiyonlar tanımlanacak ve bu fonksiyonların sağladığı bazı özellikler incelenecektir.

4. WRIGHT FONKSİYONU İLE TANIMLANAN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖZEL FONKSİYONLAR

Bu bölümde Wright fonksiyonu yardımıyla gama, beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonları genelleştirilecek ve genelleştirilen bu fonksiyonların integral temsilleri, Mellin dönüşümleri, dönüşüm formülleri, indirgeme bağıntıları gibi çeşitli özellikleri incelenecektir. Kısalığın hatırına, genelleştirilmiş gama, beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonları sırasıyla Ψ-gama, Ψ-beta, Ψ-Gauss hipergeometrik, Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonları şeklinde adlandırılacaktır. Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe $k,m,n \in \mathbb{N}$, $\alpha,\beta,a,b,c,p,x,y,z \in \mathbb{C}$, $Re(p)>0$, $Re(x)>0$, $Re(y)>0$, $Re(c)>Re(b)>0$ ve $Re(\alpha)>-1$ olarak alınacaktır.

4.1. Ψ-GAMA FONKSİYONU

Tanım 4.1. Ψ-gama fonksiyonu

$$
{}^{\Psi}\Gamma_p^{(\alpha,\beta)}(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-t-\frac{p}{t}\right)dt \tag{4.1}
$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda kullanılan ${}_0\Psi_1$ fonksiyonu Wright fonksiyonu olarak adlandırılır ve

$$
{}_0\Psi_1(\alpha,\beta;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{z^n}{n!}
$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca Wright fonksiyonu

$$
\frac{d^m}{dz^m}\left\{{}_0\Psi_1(\alpha,\beta;z)\right\} = {}_0\Psi_1(\alpha,\alpha+m\beta;z) \tag{4.2}
$$

özelliğini sağlar. Wright fonksiyonu ile ilgili ayrıntılı bilgi için bakınız [17, 19, 34].

Teorem 4.2. Ψ-gama fonksiyonu için

$$\begin{aligned}{}^{\Psi}\Gamma_p^{(\alpha,\beta)}(x)\,{}^{\Psi}\Gamma_p^{(\alpha,\beta)}(y) = \; 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} & r^{2(x+y)-1}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1} \\ & \times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-r^2(\cos\theta)^2-\frac{p}{r^2(\cos\theta)^2}\right) \\ & \times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-r^2(\sin\theta)^2-\frac{p}{r^2(\sin\theta)^2}\right)dr d\theta\end{aligned}$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. (4.1) integral temsilinde $t=\mu^2$ dönüşümü yapılıp yerine yazılırsa

$$ {}^{\Psi}\Gamma_p^{(\alpha,\beta)}(x)=2\int_0^{\infty}\mu^{2x-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\mu^2-\frac{p}{\mu^2}\right)d\mu \tag{4.3}$$

eşitliği elde edilir. Benzer olarak (4.1) integral temsilinde $t=\xi^2$ dönüşümü yapılır ve x yerine y yazılırsa

$$ {}^{\Psi}\Gamma_p^{(\alpha,\beta)}(y)=2\int_0^{\infty}\xi^{2y-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\xi^2-\frac{p}{\xi^2}\right)d\xi \tag{4.4}$$

bulunur. (4.3) ve (4.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}{}^{\Psi}\Gamma_p^{(\alpha,\beta)}(x)\,{}^{\Psi}\Gamma_p^{(\alpha,\beta)}(y) = \; 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} & \mu^{2x-1}\xi^{2y-1} \\ & \times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\mu^2-\frac{p}{\mu^2}\right){}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\xi^2-\frac{p}{\xi^2}\right)d\mu d\xi\end{aligned} \tag{4.5}$$

sonucuna ulaşılır. $\mu=r(\cos\theta)$ ve $\xi=r(\sin\theta)$ dönüşümleri yapılıp (4.5) eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa istenilen sonuca ulaşılır. ■

4.2. Ψ-BETA FONKSİYONU

Tanım 4.3. Ψ-beta fonksiyonu

$$ {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y):=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.4. Ψ-beta fonksiyonu

$$ {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\ {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2}\right)d\theta $$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.6) integral temsilinde $t=(\sin\theta)^2$ dönüşümü yapılırsa

$$ \begin{aligned} {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-2}(\cos\theta)^{2y-2}(\sin\theta)(\cos\theta) \\ &\qquad \times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2}\right)d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\ {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2}\right)d\theta \end{aligned} $$

elde edilir. ■

Teorem 4.5. Ψ-beta fonksiyonu

$$ {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\ {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-2p-p\left(u+\frac{1}{u}\right)\right)du $$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.6) integral temsilinde $t=\frac{u}{1+u}$ dönüşümü yapılırsa

$$ \begin{aligned} {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) &= \int_0^{\infty}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{y-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{2} {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{\left(\frac{u}{1+u}\right)\left(\frac{1}{1+u}\right)}\right)du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1}}\frac{1}{(1+u)^{y-1}}\frac{1}{(1+u)^2}\ {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{\frac{u}{(1+u)^2}}\right)du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\ {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-p\frac{(1+u)^2}{u}\right)du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\ {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-p\frac{(1+2u+u^2)}{u}\right)du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\ {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-2p-p\left(u+\frac{1}{u}\right)\right)du \end{aligned} $$

bulunur. ■

Teorem 4.6. Ψ-beta fonksiyonu

$$
{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) = (c-a)^{1-x-y}\int_a^c (u-a)^{x-1}(c-u)^{y-1} \times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p(c-a)^2}{(u-a)(c-u)}\right)du \tag{4.7}
$$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.6) integral temsilinde $t=\frac{u-a}{c-a}$ dönüşümü yapılır ve düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) &= \int_a^c \left(\frac{u-a}{c-a}\right)^{x-1}\left(1-\frac{u-a}{c-a}\right)^{y-1}\frac{1}{c-a}\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p(c-a)^2}{(u-a)(c-u)}\right)du \\
&= (c-a)^{1-x-y}\int_a^c (u-a)^{x-1}(c-u)^{y-1}\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p(c-a)^2}{(u-a)(c-u)}\right)du
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.7. (4.7) integral temsilinde $a=-1$ ve $c=1$ seçilirse

$$
{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) = 2^{1-x-y}\int_{-1}^1 (1+u)^{x-1}(1-u)^{y-1}\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{4p}{(1-u^2)}\right)du
$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.8. $Re(x)>m$, $Re(y)>m$ olmak üzere Ψ-beta fonksiyonunun p parametresine göre $m.$ mertebeden türevi

$$
\frac{d^m}{dp^m}\left\{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\} = (-1)^m\,{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha m+\beta)}(x-m,y-m) \tag{4.8}
$$

eşitliğini sağlar.

İspat. (1.Yol) Tümevarım yöntemi kullanılarak yapılır. (4.6) integral temsili dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dp}\left\{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\} &= \frac{d}{dp}\left\{\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\right\} \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\frac{d}{dp}\left\{{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)\right\}dt
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\frac{d}{dp}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)^n}{n!}\right\}dt$$

$$= (-1)\int_0^1 t^{x-2}(1-t)^{y-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha n+\alpha+\beta)}\frac{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)^n}{n!}\,dt$$

$$= (-1)\int_0^1 t^{x-2}(1-t)^{y-2}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt$$

$$= (-1)\;{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(x-1,y-1) \tag{4.9}$$

bulunur ki, bu $m = 1$ için (4.8) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir. Şimdi (4.8) eşitliğinin $m = k$ için geçerli olduğunu kabul edelim, yani

$$\frac{d^k}{dp^k}\left\{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\} = (-1)^k\;{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha k+\beta)}(x-k,y-k) \tag{4.10}$$

eşitliği sağlansın. (4.10) eşitliğinin her iki tarafının p parametresine göre türevi alınır ve (4.9) eşitliği kullanılırsa

$$\frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left\{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\} = \frac{d}{dp}\left\{\frac{d^k}{dp^k}\left\{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\}\right\}$$

$$=(-1)^k\frac{d}{dp}\left\{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha k+\beta)}(x-k,y-k)\right\}$$

$$=(-1)^k\frac{d}{dp}\left\{\int_0^1 t^{x-k-1}(1-t)^{y-k-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha k+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)\right\}dt$$

$$=(-1)^k\int_0^1 t^{x-k-1}(1-t)^{y-k-1}\frac{d}{dp}\left\{{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha k+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)\right\}dt$$

$$=(-1)^k\int_0^1 t^{x-k-1}(1-t)^{y-k-1}\frac{d}{dp}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha n+\alpha k+\beta)}\frac{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)^n}{n!}\right\}dt$$

$$=(-1)^{k+1}\int_0^1 t^{x-k-2}(1-t)^{y-k-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha n+\alpha k+\alpha+\beta)}\frac{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)^n}{n!}\,dt$$

$$=(-1)^{k+1}\int_0^1 t^{x-k-2}(1-t)^{y-k-2}\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha k+\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt$$

$$=(-1)^{k+1}\;{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha(k+1)+\beta)}(x-(k+1),y-(k+1))$$

elde edilir ki, bu da (4.8) eşitliğinin $m=k+1$ içinde doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

(2.Yol) Şimdi Ψ-beta fonksiyonunun p parametresine göre m. mertebeden türevinin ispatının ikinci yolu olarak

$$\frac{d^m}{dp^m}\left\{p^n\right\}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}p^{n-m}, \quad n\geq m \tag{4.11}$$

özelliğinden yararlanacağız [26]. Ψ-beta fonksiyonu dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dp^m}\left\{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\}=&\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\\&\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{1}{t^n(1-t)^n}\frac{1}{n!}\frac{d^m}{dp^m}\left\{p^n\right\}dt\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.11) özelliği (4.12) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{d^m}{dp^m}\left\{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\}\\&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{1}{t^n(1-t)^n}\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}p^{n-m}dt\end{aligned} \tag{4.13}$$

bulunur. (4.13) eşitliğinde n yerine $n+m$ yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{d^m}{dp^m}\left\{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\}\\&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{\Gamma(\alpha(n+m)+\beta)}\frac{1}{t^{n+m}(1-t)^{n+m}}\frac{1}{(n+m)!}\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)}p^n dt\\&=(-1)^m\int_0^1 t^{x-m-1}(1-t)^{y-m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha n+\alpha m+\beta)}\frac{\left(-\frac{p}{t(1-t)}\right)^n}{n!}dt\\&=(-1)^m\int_0^1 t^{x-m-1}(1-t)^{y-m-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha m+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\&=(-1)^m\,{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha m+\beta)}(x-m,y-m)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki bu ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.9. Ψ-beta fonksiyonunun p parametresi üzerinden Mellin dönüşümü

$$\mathcal{M}\left[{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y):s\right]=B(x+s,y+s)\,{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s), \quad Re(s)>0$$

şeklindedir.

İspat. (4.6) eşitliğine p parametresi üzerinden Mellin dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y):s\right] &= \int_0^\infty p^{s-1}\ {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)\ dp \\
&= \int_0^\infty p^{s-1}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dtdp \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\int_0^\infty p^{s-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dpdt \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.14) eşitliğinde $u=\frac{p}{t(1-t)}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y):s\right] &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\int_0^\infty [ut(1-t)]^{s-1}\, t(1-t)\ {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-u\right)dudt \\
&= \int_0^1 t^{x+s-1}(1-t)^{y+s-1}\int_0^\infty u^{s-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-u\right)dudt \\
&= B(x+s,y+s)\,{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.10. Ψ-beta fonksiyonunun bir başka integral temsili

$$ {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}-i\infty}^{\mathfrak{c}+i\infty} B(x+s,y+s)\,{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)p^{-s}ds, \quad Re(s)>0$$

şeklindedir.

Teorem 4.11. Ψ-beta fonksiyonu

$$ {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) = {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x+1,y)+{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y+1)$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

İspat. (4.6) integral temsilinin kullanılmasıyla kolayca

$$\begin{aligned}
{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= \int_0^1 t^{x}(1-t)^{y}\frac{1}{t(1-t)}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= \int_0^1 t^{x}(1-t)^{y}\left[(1-t)^{-1}+t^{-1}\right]{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= \int_0^1 \left[t^{x}(1-t)^{y-1}+t^{x-1}(1-t)^{y}\right]{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\quad+\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&= {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x+1,y)+{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y+1)
\end{aligned}
$$

bulunur. ■

Teorem 4.12. Ψ-beta fonksiyonu

$$
{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,1-y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y)_n}{n!}\,{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x+n,1),\quad Re(y)<1
$$

toplam formülünü sağlar.

İspat. Eşitliğin sol tarafı için (4.6) integral temsili

$$
{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,1-y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-y}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt
$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte

$$
(1-t)^{-y}=\sum_{n=0}^{\infty}(y)_n\frac{t^n}{n!},\quad |t|<1
$$

serisel ifadesi [1] yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,1-y) &= \int_0^1 t^{x-1}\sum_{n=0}^{\infty}(y)_n\frac{t^n}{n!}\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y)_n}{n!}\int_0^1 t^{x+n-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y)_n}{n!}\,{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x+n,1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Teorem 4.13. Ψ-beta fonksiyonu

$$
{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x+n,y+1)
$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Eşitliğin sol tarafı için (4.6) integral temsili

$$ {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt $$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte

$$ (1-t)^{y-1} = (1-t)^y \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t|<1 $$

serisel ifadesi yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$ \begin{aligned} {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y \sum_{n=0}^{\infty} t^n {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^{x+n-1}(1-t)^y {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x+n,y+1) \end{aligned} $$

bulunur. ■

Lemma 4.14. Ψ-beta fonksiyonu

$$ {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \int_0^{\infty} t^{x-1}(1-t)^{y-1} H(1-t)\, {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \tag{4.15} $$

integral temsiline sahiptir. Burada

$$ H(1-t) = \begin{cases} 0 & ,t>1 \text{ ise} \\ 1 & ,t<1 \text{ ise} \end{cases} $$

şeklinde tanımlanan Heaviside fonksiyonudur [29].

İspat. (4.15) eşitliğinin

$$ \begin{aligned} &\int_0^{\infty} t^{x-1}(1-t)^{y-1} H(1-t)\, {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &\quad = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} H(1-t)\, {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &\quad\quad + \int_1^{\infty} t^{x-1}(1-t)^{y-1} H(1-t)\, {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \end{aligned} $$

$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt$$
$$= {}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)$$

ifadesini sağladığı açıkça görülebilir. ■

Uyarı 4.15. Ayrıca belirtelim ki (4.15) eşitliği

$$^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)=\mathcal{M}\left[(1-t)^{y-1}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):x\right] \tag{4.16}$$

biçiminde de ifade edilir.

Teorem 4.16. Ψ-beta fonksiyonu $Re(x)>1, Re(y)>1$ olmak üzere

$$x\,{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y+1)-y\,{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x+1,y)=2p\,{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(x,y-1)-p\,{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(x-1,y-1)$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

İspat. $f^{(\alpha,\beta)}(t:y;p)$ fonksiyonunu

$$f^{(\alpha,\beta)}(t:y;p)=(1-t)^{y-1}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)$$

şeklinde tanımlayarak, bu fonksiyona t parametresi üzerinden Mellin dönüşümü uygulanırsa (4.16) eşitliğinden

$$\mathcal{M}\left[f^{(\alpha,\beta)}(t:y;p):x\right]={}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y)$$

elde edilir. Diğer taraftan δ Dirac delta fonksiyonu [29] olmak üzere

$$\frac{d}{dt}H(1-t)=-\delta(1-t) \tag{4.17}$$

eşitliğinden yararlanarak ve (4.2) eşitliğinde $m=1$ seçilerek gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{f^{(\alpha,\beta)}(t:y;p)\right\}=&-\delta(1-t)(1-t)^{y-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)\\&-(y-1)(1-t)^{y-2}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)\\&+\frac{p(1-2t)}{t^2(1-t)^2}(1-t)^{y-1}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $t \neq 1$ için $\delta(1-t)=\delta(t-1)=0$ olduğu dikkate alınır ve eşitliğin her iki tarafınına t parametresi üzerinden Mellin dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[\frac{d}{dt}\{f^{(\alpha,\beta)}(t:y;p)\}:x\right]=&-(y-1)\mathcal{M}\left[(1-t)^{y-2}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):x\right]\\&+p\mathcal{M}\left[\frac{1}{t^2(1-t)^2}(1-t)^{y-1}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):x\right]\\&-2p\mathcal{M}\left[\frac{1}{t(1-t)^2}(1-t)^{y-1}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):x\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Mellin dönüşümü tanımı ve (2.6) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}&-(x-1)^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x-1,y)\\&\qquad=-(y-1)\int_0^{\infty}t^{x-1}(1-t)^{y-2}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\&\qquad+p\int_0^{\infty}t^{x-3}(1-t)^{y-3}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\&\qquad-2p\int_0^{\infty}t^{x-2}(1-t)^{y-3}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\end{aligned}$$

bulunur. (4.15) eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}-(x-1)^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x-1,y)=&-(y-1)^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y-1)\\&+p^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(x-2,y-2)\\&-2p^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(x-1,y-2)\end{aligned}$$

olup, x yerine $x+1$ ve y yerine $y+1$ yazılırsa

$$x^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x,y+1)-y^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(x+1,y)=2p^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(x,y-1)-p^{\Psi}B_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(x-1,y-1)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır. ∎

4.3. Ψ-GAUSS HİPERGEOMETRİK FONKSİYONU

Tanım 4.17. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z):=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1 \tag{4.18}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.18. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$
{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} \times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \tag{4.19}
$$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.18) eşitliğinde Ψ-beta fonksiyonunun integral temsili kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\\
&=\frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)\frac{z^n}{n!}dt\\
&=\frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)\frac{(zt)^n}{n!}dt\\
&=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{(zt)^n}{n!}dt
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$$
(1-zt)^{-a}=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{(zt)^n}{n!}
$$

serisel ifadesinden yararlanılırsa

$$
{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt
$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.19. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$
{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)=\frac{2}{B(b,c-b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2b-1}(\cos\theta)^{2c-2b-1}\left(1-z(\sin\theta)^2\right)^{-a} \times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2}\right)d\theta
$$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.19) integral temsilinde $t=(\sin\theta)^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z) =& \frac{2}{B(b,c-b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2b-2}(\cos\theta)^{2c-2b-2}\left(1-z(\sin\theta)^2\right)^{-a}\\ &\times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2}\right)(\sin\theta)(\cos\theta)\,d\theta\\ =& \frac{2}{B(b,c-b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2b-1}(\cos\theta)^{2c-2b-1}\left(1-z(\sin\theta)^2\right)^{-a}\\ &\times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2}\right)d\theta\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.20. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned}{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}& u^{b-1}(1+u)^{a-c}\left[1+u(1-z)\right]^{-a}\\ &\times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-2p-p\left(u+\frac{1}{u}\right)\right)du\end{aligned}$$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.19) integral temsilinde $t=\frac{u}{1+u}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z) =& \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{b-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{c-b-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{2}\left(1-z\frac{u}{1+u}\right)^{-a}\\ &\times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{\left(\frac{u}{1+u}\right)\left(\frac{1}{1+u}\right)}\right)du\\ =& \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}\frac{u^{b-1}}{(1+u)^{b-1}}\frac{1}{(1+u)^{c-b-1}}\frac{1}{(1+u)^2}\left(1-z\frac{u}{1+u}\right)^{-a}\\ &\times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{\frac{u}{(1+u)^2}}\right)du\\ =& \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}\frac{u^{b-1}}{(1+u)^{c}}\frac{(1+u-zu)^{-a}}{(1+u)^{-a}}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-p\frac{(1+u)^2}{u}\right)du\\ =& \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}u^{b-1}(1+u)^{a-c}\left[1+u(1-z)\right]^{-a}\\ &\times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-2p-p\left(u+\frac{1}{u}\right)\right)du\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 4.21. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonunun z parametresine göre $m.$ mertebeden türevi

$$\frac{d^m}{dz^m}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}=\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\;{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+m,b+m;c+m;z) \tag{4.20}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. (1.Yol) Tümevarım yöntemi kullanılarak yapılır. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonunun her iki tarafının z parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}&=\frac{d}{dz}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!}\right\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(a)_n\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) eşitliğinde n yerine $n+1$ yazılırsa

$$\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_{n+1}\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n+1,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!} \tag{4.22}$$

bulunur. Beta fonksiyonu ve Pochammer sembolülünün

$$B(b,c-b)=\frac{c}{b}B(b+1,c-b)$$

$$(a)_{n+1}=a(a+1)_n$$

özellikleri (4.22) eşitliğinde kullanılırlarsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}&=\frac{(a)(b)}{(c)}\sum_{n=0}^{\infty}(a+1)_n\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n+1,c-b)}{B(b+1,c-b)}\frac{z^n}{n!}\\&=\frac{(a)(b)}{(c)}\;{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+1,b+1;c+1;z)\end{aligned} \tag{4.23}$$

sonucuna ulaşılır ki, bu $m=1$ için (4.20) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir. Şimdi (4.20) eşitliğinin $m=k$ için geçerli olduğunu kabul edelim yani,

$$\frac{d^k}{dz^k}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}=\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\;{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+k,b+k;c+k;z) \tag{4.24}$$

eşitliği sağlansın. (4.24) eşitliğinin her iki tarafı z parametresine göre türevi alınır ve (4.23) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\} &= \frac{d}{dz}\left\{\frac{d^k}{dz^k}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}\right\}\\ &= \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+k,b+k;c+k;z)\right\}\\ &= \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}}\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+k+1,b+k+1;c+k+1;z)\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da (4.20) eşitliğinin $m=k+1$ içinde doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

(2.Yol) Şimdi Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonunun z parametresine göre m. mertebeden türevinin ispatının ikinci yolu olarak

$$\frac{d^m}{dz^m}\{z^n\}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}z^{n-m}, \quad n\geq m \tag{4.25}$$

özelliğinden yararlanacağız. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{d^m}{dz^m}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{d^m}{dz^m}\{z^n\} \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.25) özelliği (4.26) eşitliğinde kullanılırsa

$$\frac{d^m}{dz^m}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}=\sum_{n=m}^{\infty}(a)_n\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}\frac{z^{n-m}}{n!} \tag{4.27}$$

bulunur. (4.27) eşitliğinde n yerine $n+m$ yazılır ve gerekli sadeleştirme yapılırsa

$$\frac{d^m}{dz^m}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_{n+m}\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n+m,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{\Gamma(n+1)} \tag{4.28}$$

sonucuna ulaşılır. (4.28) eşitliğinde $(a)_{n+m}=(a)_m(a+m)_n$ Pochhammer özelliği kullanılırsa

$$\frac{d^m}{dz^m}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_m(a+m)_n\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n+m,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!} \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.29) eşitliği $\frac{B(b+m,c-b)}{B(b+m,c-b)}$ ifadesi ile çarpılırsa

$$\frac{d^m}{dz^m}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}=(a)_m\sum_{n=0}^{\infty}(a+m)_n\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n+m,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{B(b+m,c-b)}{B(b+m,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$
$$=\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\sum_{n=0}^{\infty}(a+m)_n\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n+m,c-b)}{B(b+m,c-b)}\frac{z^n}{n!}$$
$$=\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+m,b+m;c+m;z)$$

sonucuna ulaşılır ki bu ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.22. $Re(s)>0$ olmak üzere Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonunun p parametresi üzerinden Mellin dönüşümü

$$\mathcal{M}\left[{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z):s\right]=\frac{{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,c-b)}{}_2F_1(a,b+s;c+2s;z)$$

şeklindedir.

İspat. (4.19) integral temsiline p parametresi üzerinden Mellin dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{M}\left[{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z):s\right]=\int_0^{\infty}p^{s-1}\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\,dp$$
$$=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty}p^{s-1}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dtdp$$
$$=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\int_0^{\infty}p^{s-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dpdt \quad (4.30)$$

elde edilir. ${}_0\Psi_1$ fonksiyonuna p parametresi üzerinden Mellin dönüşümü uygulanır ve $u=\frac{p}{t(1-t)}$ dönüşümü yapılırsa

$$\mathcal{M}\left[{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):s\right]=\int_0^{\infty}p^{s-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dp$$
$$=\int_0^{\infty}u^{s-1}t^{s-1}(1-t)^{s-1}t(1-t)\,{}_0\Psi_1(\alpha,\beta;-u)\,du$$
$$=\int_0^{\infty}u^{s-1}t^{s}(1-t)^{s}{}_0\Psi_1(\alpha,\beta;-u)\,du$$
$$=t^s(1-t)^s\int_0^{\infty}u^{s-1}{}_0\Psi_1(\alpha,\beta;-u)\,du$$
$$=t^s(1-t)^s\,{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s) \quad (4.31)$$

bulunur. (4.31) eşitliği (4.30) eşitliğinde kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z):s\right] &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b+s-1}(1-t)^{c+s-b-1}(1-zt)^{-a}\,{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)dt\\ &= \frac{{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)}{B(b,c-b)}\frac{B(b+s,c+s-b)}{B(b+s,c+s-b)}\int_0^1 t^{b+s-1}(1-t)^{c+2s-(b+s)-1}(1-zt)^{-a}dt\\ &= \frac{{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,c-b)}\,{}_2F_1(a,b+s;c+2s;z)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Sonuç 4.23. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu için bir başka integral temsili de $Re(s)>0$ olmak üzere

$${}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}-i\infty}^{\mathfrak{c}+i\infty}\frac{{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,c-b)}\,{}_2F_1(a,b+s;c+2s;z)p^{-s}ds$$

şeklindedir.

Teorem 4.24. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$${}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) \tag{4.32}$$

dönüşüm formülünü sağlar.

İspat. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonunun dönüşüm formülünün ispatı için

$$[1-z(1-t)]^{-a}=(1-z)^{-a}\left(1+\frac{zt}{1-z}\right)^{-a} \tag{4.33}$$

özelliğinden yararlanacağız [1]. (4.19) integral temsilinde t yerine $1-t$ yazılırsa

$$\begin{aligned}&{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\\ &=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}\left[1-z(1-t)\right]^{-a}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.33) özelliği (4.34) eşitliğinde kullanılır ve beta fonksiyonunun (2.4) simetri özelliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}&{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\\ &=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}(1-z)^{-a}\left(1+\frac{zt}{1-z}\right)^{-a}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(1-z)^{-a}}{B(c-b,b)} \int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}\left(1-\frac{zt}{z-1}\right)^{-a} {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= (1-z)^{-a}\ {}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. ■

Sonuç 4.25. (4.32) eşitliğinde z yerine sırasıyla $1-\dfrac{1}{z}$ ve $\dfrac{z}{1+z}$ yazılırsa

$$
{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}\left(a,b;c;1-\frac{1}{z}\right) = z^a\ {}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}\left(a,c-b;c;1-z\right)
$$

ve

$$
{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}\left(a,b;c;\frac{z}{1+z}\right) = (1+z)^a\ {}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}\left(a,c-b;c;-z\right)
$$

dönüşüm formülleri elde edilir.

Teorem 4.26. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$
\Delta_a\left[{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right] = z\frac{b}{c}\ {}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+1,b+1;c+1;z) \tag{4.35}
$$

bağıntısını sağlar. Burada Δ_a,

$$
\Delta_a\left[{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right] = {}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+1,b;c;z) - {}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z) \tag{4.36}
$$

şeklinde tanımlanan bir fark operatörüdür [12].

İspat. (4.36) eşitliğinde (4.19) integral temsili kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\Delta_a\left[{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right] &= {}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+1,b;c;z) - {}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z) \\
&= \frac{z}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^b(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= z\frac{b}{c}\frac{1}{B(b+1,c-b)} \int_0^1 t^b(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\
&= z\frac{b}{c}\ {}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+1,b+1;c+1;z)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.27. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$a\Delta_a\left[{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right]=z\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}$$

bağıntısını sağlar.

İspat. (4.35) eşitliğinin her iki tarafı a parametresi ile çarpılırsa

$$a\Delta_a\left[{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right]=z\frac{(a)(b)}{(c)}\;{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+1,b+1;c+1;z)$$

elde edilir. (4.20) eşitliğinde $m=1$ seçilerek kullanılırsa

$$a\Delta_a\left[{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right]=z\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\right\}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 4.28. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned}{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z) &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}H(1-t)\\ &\qquad\times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \end{aligned} \tag{4.37}$$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.37) eşitliğinin

$$\begin{aligned}&\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\ &=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{1} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\ &\quad+\frac{1}{B(b,c-b)}\int_1^{\infty} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\ &=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{1} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\ &={}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)\end{aligned}$$

ifadesini sağladığı açıkça görülebilir. ■

Uyarı 4.29. Ayrıca belirtelim ki (4.37) eşitliği

$$B(b,c-b)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z) = \mathcal{M}\left[(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right] \quad (4.38)$$

biçiminde de ifade edilir.

Teorem 4.30. $Re(b)>2, Re(c)>Re(b+2)$ olmak üzere Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned}(b-1)B(b-1,c-b+1)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b-1;c;z) &= (c-b-1)B(b,c-b-1)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c-1;z)\\ &\quad - azB(b,c-b)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+1,b;c;z)\\ &\quad - pB(b-2,c-b-2)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(a,b-2;c-4;z)\\ &\quad + 2pB(b-1,c-b-2)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(a,b-1;c-3;z)\end{aligned}$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

İspat. $f_{a,b,c}^{(\alpha,\beta)}(t:z;p)$ fonksiyonunu

$$f_{a,b,c}^{(\alpha,\beta)}(t:z;p)=(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)$$

şeklinde tanımlayarak, bu fonksiyona t parametresi üzerinden Mellin dönüşümü uygulanırsa (4.38) eşitliğinden

$$\mathcal{M}\left[f_{a,b,c}^{(\alpha,\beta)}(t:z;p):b\right]=B(b,c-b)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z)$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.17) eşitliğinden ve (4.2) eşitliğinde $m=1$ seçilerek gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\left[\frac{d}{dt}\left\{f_{a,b,c}^{(\alpha,\beta)}(t:z;p)\right\}:b\right]\\ &=-(c-b-1)\mathcal{M}\left[(1-t)^{c-b-2}(1-zt)^{-a}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]\\ &\quad +az\mathcal{M}\left[(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-(a+1)}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]\end{aligned}$$

$$+p\mathcal{M}\left[\frac{1}{t^2}(1-t)^{c-b-3}(1-zt)^{-a}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]$$
$$-2p\mathcal{M}\left[\frac{1}{t}(1-t)^{c-b-3}(1-zt)^{-a}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]$$

bulunur. Mellin dönüşümü tanımı ve (2.6) özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&-(b-1)B(b-1,c-b+1)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b-1;c;z)\\
&\quad=-(c-b-1)\int_0^\infty t^{b-1}(1-t)^{c-b-2}(1-zt)^{-a}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\qquad+az\int_0^\infty t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-(a+1)}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\qquad+p\int_0^\infty t^{b-3}(1-t)^{c-b-3}(1-zt)^{-a}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\qquad-2p\int_0^\infty t^{b-2}(1-t)^{c-b-3}(1-zt)^{-a}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.37) eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
&(b-1)B(b-1,c-b+1)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b-1;c;z)\\
&\quad=(c-b-1)B(b,c-b-1)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c-1;z)\\
&\qquad-azB(b,c-b)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\beta)}(a+1,b;c;z)\\
&\qquad-pB(b-2,c-b-2)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(a,b-2;c-4;z)\\
&\qquad+2pB(b-1,c-b-2)\,{}^{\Psi}F_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(a,b-1;c-3;z)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.4. Ψ-KONFLUENT HİPERGEOMETRİK FONKSİYONU

Tanım 4.31. Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!} \tag{4.39}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.32. Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$ {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \quad (4.40) $$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.39) eşitliğinde Ψ-beta fonksiyonunun integral temsili kullanılırsa

$$ \begin{aligned} {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z) &= \frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)\frac{(zt)^n}{n!}dt \\ &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zt)^n}{n!}dt \end{aligned} $$

bulunur. Burada

$$ e^{zt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zt)^n}{n!} $$

serisel ifadesinden yararlanılırsa

$$ {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt $$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.33. Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$ \begin{aligned} {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z) &= \frac{2}{B(b,c-b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2b-1}(\cos\theta)^{2c-2b-1}e^{z(\sin\theta)^2} \\ &\quad \times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2}\right)d\theta \end{aligned} $$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.40) integral temsilinde $t=(\sin\theta)^2$ dönüşümü yapılırsa

$$ \begin{aligned} {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z) &= \frac{2}{B(b,c-b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2b-2}(\cos\theta)^{2c-2b-2}(\sin\theta)(\cos\theta)e^{z(\sin\theta)^2} \\ &\quad \times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2}\right)d\theta \\ &= \frac{2}{B(b,c-b)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2b-1}(\cos\theta)^{2c-2b-1}e^{z(\sin\theta)^2}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2}\right)d\theta \end{aligned} $$

elde edilir. ■

Teorem 4.34. Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$ {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z) = \frac{e^z}{B(b,c-b)} \int_0^\infty u^{b-1}(1+u)^{-c}\, e^{\left(-\frac{z}{1+u}\right)} {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-2p-p\left(u+\frac{1}{u}\right)\right) du $$

integral temsiline sahiptir.

İspat. (4.40) integral temsilinde $t=\frac{u}{1+u}$ dönüşümü yapılırsa

$$ \begin{aligned} {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z) = & \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{1+u}\right)^{b-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{c-b-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{2} e^{z\frac{u}{1+u}} \\ & \times {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{\left(\frac{u}{1+u}\right)\left(\frac{1}{1+u}\right)}\right) du \\ = & \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^\infty \frac{u^{b-1}}{(1+u)^{b-1}} \frac{1}{(1+u)^{c-b-1}} \frac{1}{(1+u)^2} e^{z\frac{u}{1+u}} {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{\frac{u}{(1+u)^2}}\right) du \\ = & \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^\infty \frac{u^{b-1}}{(1+u)^c} e^{z\frac{u}{1+u}}\, {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-p\frac{(1+u)^2}{u}\right) du \\ = & \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^\infty u^{b-1}(1+u)^{-c}\, e^{z\left(1-\frac{1}{1+u}\right)} {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-2p-p\left(u+\frac{1}{u}\right)\right) du \\ = & \frac{e^z}{B(b,c-b)} \int_0^\infty u^{b-1}(1+u)^{-c}\, e^{\left(-\frac{z}{1+u}\right)} {}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-2p-p\left(u+\frac{1}{u}\right)\right) du \end{aligned} $$

bulunur. ■

Teorem 4.35. Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonunun z parametresine göre m. mertebeden türevi

$$ \frac{d^m}{dz^m}\left\{ {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\} = \frac{(b)_m}{(c)_m}\, {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b+m;c+m;z) \tag{4.41} $$

eşitliğini sağlar.

İspat. Tümevarım yöntemi kullanılarak yapılır. Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonunun her iki tarafının z parametresine göre türevi alınırsa

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dz}\left\{ {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\} = & \frac{d}{dz}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)} \frac{z^n}{n!} \right\} \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n,c-b)}{B(b,c-b)} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned} \tag{4.42} $$

elde edilir. (4.42) eşitliğinde n yerine $n+1$ yazılırsa

$$\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n+1,c-b)}{B(b,c-b)}\frac{z^n}{n!} \tag{4.43}$$

bulunur. Beta fonksiyonunun

$$B(b,c-b)=\frac{c}{b}B(b+1,c-b)$$

özelliği (4.43) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\}=&\frac{(b)}{(c)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}^{\Psi}B_p^{(\alpha,\beta)}(b+n+1,c-b)}{B(b+1,c-b)}\frac{z^n}{n!}\\=&\frac{(b)}{(c)}\;{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b+1;c+1;z)\end{aligned} \tag{4.44}$$

sonucuna ulaşılır ki, bu $m=1$ için (4.41) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir. Şimdi $m=k$ için (4.41) eşitliğinin geçerli olduğunu kabul edelim yani,

$$\frac{d^k}{dz^k}\left\{{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\}=\frac{(b)_k}{(c)_k}\;{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b+k;c+k;z) \tag{4.45}$$

eşitliği sağlansın. (4.45) eşitliğinin her iki tarafı z parametresine göre türevi alınır ve (4.44) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}\left\{{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\}=&\frac{d}{dz}\left\{\frac{d^k}{dz^k}\left\{{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\}\right\}\\=&\frac{(b)_k}{(c)_k}\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b+k;c+k;z)\right\}\\=&\frac{(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}}\;{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b+k+1;c+k+1;z)\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da (4.41) eşitliğinin $m=k+1$ içinde doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Ayrıca belirtelim ki bu teoremin ispatı (4.20) teoreminin (2.Yol) ispatına benzer şekilde tümevarım yapılmadan da verilebilir.

Teorem 4.36. $Re(s)>0$ olmak üzere Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonunun p parametresi üzerinden Mellin dönüşümü

$$\mathcal{M}\left[{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z):s\right]=\frac{{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,c-b)}\Phi(b+s;c+2s;z)$$

şeklindedir.

İspat. (4.40) integral temsiline p parametresi üzerinden Mellin dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z):s\right] &= \int_0^{\infty} p^{s-1}\ {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\ dp \\ &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty} p^{s-1}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dtdp \\ &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}\int_0^{\infty} p^{s-1}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dpdt \qquad (4.46)\end{aligned}$$

bulunur. (4.31) eşitliği (4.46) eşitliğinde kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(a,b;c;z):s\right] &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b+s-1}(1-t)^{c+s-b-1}e^{zt}\ {}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)dt \\ &= \frac{{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,c-b)B(b+s,c+s-b)}\int_0^1 t^{b+s-1}(1-t)^{c+2s-(b+s)-1}e^{zt}dt \\ &= \frac{{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,c-b)}\Phi(b+s;c+2s;z)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Sonuç 4.37. Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonu için bir başka integral temsili de $Re(s)>0$ olmak üzere

$${}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}-i\infty}^{\mathfrak{c}+i\infty}\frac{{}^{\Psi}\Gamma_0^{(\alpha,\beta)}(s)B(b+s,c+s-b)}{B(b,c-b)}\Phi(b+s;c+2s;z)p^{-s}ds$$

şeklindedir.

Teorem 4.38. Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$${}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z) = e^{z}\ {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(c-b;c;-z)$$

dönüşüm formülüne sahiptir.

İspat. (4.40) integral temsilinde t yerine $1-t$ yazılırsa

$$\begin{aligned}{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z) &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}e^{z(1-t)}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt \\ &= \frac{e^z}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}e^{-zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\end{aligned}$$

elde edilir. Beta fonksiyonunun simetri özelliği olan (2.4) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z) =& \frac{e^z}{B(c-b,b)}\int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}e^{-zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
=& e^z\, {}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(c-b;c;-z)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.39. Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$
b\Delta_b\left[{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z)\right]+c\Delta_c\left[{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right]=0 \tag{4.47}
$$

bağıntısını sağlar.

İspat. (4.36) fark operatörü kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&b\Delta_b\left[{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z)\right]+c\Delta_c\left[{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right]\\
&= b\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b+1;c+1;z) - b\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z)\\
&\quad + c\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z) - c\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\\
&=\frac{b}{B(b+1,c-b)}\int_0^1 t^{b}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\quad-\frac{b}{B(b,c-b+1)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b}e^{zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\quad+\frac{c}{B(b,c-b+1)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b}e^{zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\quad-\frac{c}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&=\frac{c}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(t-1)e^{zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\quad-\frac{c}{c-b}\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b}(b-c)e^{zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&=-\frac{c}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b}e^{zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\quad+\frac{c}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b}e^{zt}{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&=0
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır ki bu ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.40. Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\}=\frac{b}{c}\ {}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z)-\Delta_{c}\left[{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right]$$

bağıntısını sağlar.

İspat. (4.41) eşitliğinde $m=1$ seçilirse

$$\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\}=\frac{b}{c}\ {}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b+1;c+1;z) \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.48) eşitliğine $\frac{b}{c}\ {}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z)$ fonksiyonu eklenilir ve çıkarılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\}\\&=\frac{b}{c}\left[{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z)+{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b+1;c+1;z)-{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z)\right]\end{aligned}$$

bulunur. (4.36) fark operatörü dikkate alınırsa

$$\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\}=\frac{b}{c}\left[{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z)+\Delta_{b}\left[{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z)\right]\right]$$

elde edilir. (4.47) eşitliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left\{{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right\}&=\frac{b}{c}\left[{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z)-\frac{c}{b}\ \Delta_{c}\left[{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right]\right]\\&=\frac{b}{c}\ {}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c+1;z)-\Delta_{c}\left[{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\right]\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Lemma 4.41. Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned}{}^{\Psi}\Phi_{p}^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_{0}^{\infty}&t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}H(1-t)\\&\times{}_{0}\Psi_{1}\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\end{aligned} \tag{4.49}$$

integral temsiline sahiptir.

İspat. Ψ-Gauss hipergeometrik fonksiyonu için verilen Lemma 4.28. in ispatına benzer olarak yapılabilir. ■

Uyarı 4.42. Ayrıca belirtelim ki (4.49) eşitliği

$$B(b,c-b)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z) = \mathcal{M}\left[(1-t)^{c-b-1}e^{zt}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt : b\right] \tag{4.50}$$

şeklinde de ifade edilir.

Teorem 4.43. $Re(b)>2$, $Re(c)>Re(b+2)$ olmak üzere Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned}(b-1)B(b-1,c-b+1)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b-1;c;z) &= (c-b-1)B(b,c-b-1)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c-1;z)\\ &\quad - zB(b,c-b)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\\ &\quad - pB(b-2,c-b-2)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(b-2;c-4;z)\\ &\quad + 2pB(b-1,c-b-2)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(b-1;c-3;z)\end{aligned}$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

İspat. $f_{b,c}^{(\alpha,\beta)}(t:z;p)$ fonksiyonunu

$$f_{b,c}^{(\alpha,\beta)}(t:z;p)=(1-t)^{c-b-1}e^{zt}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)$$

şeklinde tanımlayarak, bu fonksiyona t parametresi üzerinden Mellin dönüşümü uygulanırsa (4.50) eşitliğinden

$$\mathcal{M}\left[f_{b,c}^{(\alpha,\beta)}(t:z;p):b\right]=B(b,c-b)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.17) eşitliğinden ve (4.2) eşitliğinde $m=1$ seçilerek gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\left[\frac{d}{dt}\left\{f_{b,c}^{(\alpha,\beta)}(t:z;p)\right\}:b\right]\\ &\quad= -(c-b-1)\mathcal{M}\left[(1-t)^{c-b-2}e^{zt}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]\\ &\qquad + z\mathcal{M}\left[(1-t)^{c-b-1}e^{zt}H(1-t)\;{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]\end{aligned}$$

$$+p\mathcal{M}\left[\frac{1}{t^2}(1-t)^{c-b-3}e^{zt}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]$$
$$-2p\mathcal{M}\left[\frac{1}{t}(1-t)^{c-b-3}e^{zt}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right):b\right]$$

bulunur. Mellin dönüşümü tanımı ve (2.6) özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&-(b-1)B(b-1,c-b+1)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b-1;c;z)\\
&\quad=-(c-b-1)\int_0^\infty t^{b-1}(1-t)^{c-b-2}e^{zt}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\quad+z\int_0^\infty t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}e^{zt}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\quad+p\int_0^\infty t^{b-3}(1-t)^{c-b-3}e^{zt}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt\\
&\quad-2p\int_0^\infty t^{b-2}(1-t)^{c-b-3}e^{zt}H(1-t)\,{}_0\Psi_1\left(\alpha,\alpha+\beta;-\frac{p}{t(1-t)}\right)dt
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.49) eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
&(b-1)B(b-1,c-b+1)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b-1;c;z)\\
&\quad=(c-b-1)B(b,c-b-1)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c-1;z)\\
&\quad-zB(b,c-b)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\beta)}(b;c;z)\\
&\quad-pB(b-2,c-b-2)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(b-2;c-4;z)\\
&\quad+2pB(b-1,c-b-2)\,{}^{\Psi}\Phi_p^{(\alpha,\alpha+\beta)}(b-1;c-3;z)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır. ■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Wright fonksiyonu yardımıyla Ψ-gama, Ψ-beta, Ψ-Gauss hipergeometrik ve Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonları tanımlanmış ve bu fonksiyonlara ait bazı integral temsilleri, Mellin dönüşümleri, türev formülleri, dönüşüm formülleri ve indirgeme bağıntıları elde edilmiştir. Ele alınan bu fonksiyonların Wright fonksiyonu yardımıyla tanımlanan bir genelleştirmesi literatürde yer almamaktadır. Bu sebeple tez çalışmasında elde edilen sonuçlar (muhtemelen) orjinaldir.

Wright fonksiyonu yardımıyla genelleştirilen bu fonksiyonların özel durumları incelendiğinde:

1. $\alpha = 0, \beta = 1($ ya da $2)$ ve $p = 0$ seçilmesi durumunda Ψ-gama fonksiyonunun klasik gama fonksiyonuna indirgendiği,
2. $\beta = 1($ ya da $2)$ ve $p = 0$ seçilmesi durumunda Ψ-beta, Ψ-Gauss hipergeometrik ve Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının, sırasıyla klasik beta, Gauss hipergeometrik ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlarına indirgendiği,
3. $\alpha = 0$, $\beta = 1($ ya da $2)$ ve $p \neq 0$ seçilmesi durumunda ise Ψ-gama fonksiyonunun 1994 yılında tanımlanan (3.1) genişletilmiş gama fonksiyonuna, Ψ-beta fonksiyonunun 1997 yılında tanımlanan (3.2) genişletilmiş beta fonksiyonuna, Ψ-Gauss hipergeometrik ve Ψ-konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının 2004 yılında tanımlanan (3.3) genişletilmiş Gauss hipergeometrik ve (3.4) genişletilmiş konfluent hipergeometrik fonksiyonlarına indirgendiği ve tez içerisinde elde edilen tüm sonuçların bahsi geçen fonksiyonlar için elde edilen sonuçlarla çakıştığı görülür.

Bu çalışmada tanımlanan genelleştirilmiş beta fonksiyonu kullanılarak, ilerleyen çalışmalarda Appell, Lauricella ve Srivastava fonksiyonları gibi çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar için de yeni genelleştirmeler tanımlanabilir ve bu fonksiyonların özellikleri incelenebilir. Ayrıca, bu fonksiyonlar yardımıyla kesirli türev ve integral operatörleri tanımlanabilir. Bu operatörler yardımıyla bazı özel fonksiyonlar için doğurucu fonksiyon ilişkileri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Altın, A. *Uygulamalı Matematik*. Ankara Üniversitesi, Gazi Kitapevi, Ankara, **2011**.

[2] Andrews, G. E.; Askey, R.; Roy, R. *Special Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, **1999**.

[3] Balcı, M. *Analiz-2*. Balcı Yayınevi, Ankara, **2011**.

[4] Bailey, W. N. *Generalized Hypergeometric Series*. Cambridge University Press, New York, London, **1964**.

[5] Bell, W. W. *Special Functions for Scientists and Engineers*. D. Van Nostrand Company, London, **1968**.

[6] Chaudhry, M. A.; Zubair, S. M. Generalized incomplete gamma functions with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **1994**, *55*, 99-124.

[7] Chaudhry, M. A.; Zubair, S. M. On the decomposition of generalized incomplete gamma functions with applications to Fourier transforms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **1995**, *59*, 253-284.

[8] Chaudhry, M. A.; Temme, N. M.; Veling, E. J. M. Asymptotic and closed form of a generalized incomplete gamma function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **1996**, *67*, 371-379.

[9] Chaudhry, M. A.; Qadir, A.; Rafique, M.; Zubair, S. M. Extension of Euler's beta function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **1997**, *78*, 19-32.

[10] Chaudhry, M. A.; Zubair, S. M. Extended incomplete gamma functions with applications. *J. Math. Anal. Appl.*, **2002**, *274*, 725-745.

[11] Chaudhry, M. A.; Qadir, A.; Srivastava, H. M.; Paris, R. B. Extended hypergeometric and confuent hypergeometric functions. *Applied Mathematics and Computation*, **2004**, *159*, 589-602.

[12] Choi, J.; Rathie, A. K.; Parmar, R. K. Extension of extended beta, hypergeometric and confuent hypergeometric functions. *Honam Mathematical J.*, **2014**, *36*, 357-385.

[13] Çetinkaya, A.; Kıymaz, İ. O.; Agarwal, P.; Jain, S. A further generalization of gamma, beta and hypergeometric functions. IECMSA, **2017** (yayınlanmamış).

[14] Çetinkaya, A.; Kıymaz, İ. O.; Agarwal, P.; Agarwal, R. A comparative study on generating function relations for generalized hypergeometric functions via generalized fractional operators. *Advances in Difference Equations*, **2018**, *2018:156*, DOI:10.1186/s13662-018-1612-0.

[15] Erdelyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. *Higher Transcendental Functions*. Vol.I. McGraw-Hill, Newyork, London, Toronto, **1953**.

[16] Erdelyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. *Higher Transcendental Functions*. Vol.II. McGraw-Hill, Newyork, London, Toronto, **1953**.

[17] Gorenflo, R.; Kilbas, A. A.; Mainardi, F.; Rogosin, S. V. *Mittag-Leffler Functions Related Topics and Applications*. Springer Monographs in Mathematics, **2014**.

[18] Goswami, A.; Jain, S.; Agarwal, P.; Aracı, S. A Note on the new extended beta and Gauss hypergeometric functions. *Appl. Math. Inf. Sci.*, **2018**, *12*, 139-144.

[19] Kilbas, A. A.; Srivastava, H. M.; Trujillo, J. J. *Teory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland mathematics studies, vol.204. Elsevier, Amsterdam, **2006**.

[20] Lebedev, N. N. *Special Functions and Their Aplications*. Prendice-Hall International, London, **1965**.

[21] Lee, D. M.; Rathie, A. K.; Parmar, R. K.; Kim, Y. S. Generalization of extended beta function, hypergeometric and confuent hypergeometric functions. *Honam Mathematical J.*, **2011**, *33*, 187-206.

[22] Mathai, A. M.; Haubold, H. J. *Special Functions for Applied Scientists*. Springer Science Business Media, New York, **2008**.

[23] Mathai, A. M.; Saxena, R. K.; Haubold, H. J. *The H-Function*. Springer Science Business Media, New York, **2010**.

[24] Miller, A. R. Remarks on a generalized beta function. *J. Comput. Appl. Math.* **1998**, *100*, 23-32.

[25] Miller, A. R. Reductions of a generalized incomplete gamma function, related Kampe de Feriet functions, and incomplete Weber integrals. *Rocky Mountain, J. Math.*, **2000**, *30*, 703-714.

[26] Miller, K. S.; Ross, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, **1993**.

[27] Mubeen, S.; Rahman, G.; Nisar, K. S.; Choi, J. An extended beta function and its properties. *Journal of Mathematical Sciences*, **2017**, *102*, 1545-1557.

[28] Musallam, F.; Kalla, S. L. Futher results on a generalized gamma function occurring in diffraction theory. *Integral Transforms and Spec. Funct.*, **1998**, *7 (3-4)*, 175-190.

[29] Oldham, K.; Myland, J.; Spanier, J. *An Atlas of Functions*. Springer Science Business Media, New York, **2009**.

[30] Özergin, E.; Özarslan, M. A.; Altın, A. Extension of gamma, beta and hypergeometric functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2011**, *235*, 4601-4610.

[31] Özergin, E. *Some Properties of Hypergeometric Functions*. Doktora Tezi, Eastern Mediterranean University, Gazimagusa, **2011**.

[32] Paris, R. B.; Kaminski, D. *Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol.85. Cambridge University Press, **2001**.

[33] Parmar, R. K. A new generalization of gamma, beta, hypergeometric and confuent hypergeometric functions. *Le Matematiche*, **2013**, *Vol.LXVIII*, 33-52.

[34] Podlubny, I. *Fractional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering, vol.198. Academic Press, San Diego, **1999**.

[35] Pucheta, P. I. An new extended beta function. *International Journal of Mathematics And its Applications*, **2017**, *5 (3-C)*, 255-260.

[36] Rahman, G.; Nisar, K. S.; Mubeen, S. A new generalization of extended beta and hypergeometric functions. *Journal of Mathematical Sciences*, **2018**, DOI:10.20944/preprints201802.0036.v1.

[37] Rahman, G.; Kanwal, G.; Nisar, K. S.; Ghaffar, A. A new extension of beta and hypergeometric function. *Preprints*, **2018**, DOI:10.20944/preprints201801.0074.v1.

[38] Shadab, M.; Saime, J.; Choi, J. An extended beta function and its application. *Journal of Mathematical Sciences*, **2018**, *103*, 235-251.

[39] Srivastava, H. M.; Manocha, H. L. *A Treatise On Generating Functions*. Halsted Press Wiley, New York, **1984**.

[40] Srivastava, H. M.; Agarwal, P.; Jain, S. Generating functions for the generalized Gauss hypergeometric functions. *Applied Mathematics and Computation*, **2014**, *247*, 348-352.

[41] Şahin, R. *Çok Değiskenli Hipergeometrik Fonksiyonlar*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi-Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2011**.

[42] Şahin, R.; Yağcı. O.; Yağbasan, M. B.; Kıymaz, İ. O.; Çetinkaya, A. Further generalizations of gamma, beta and related functions. *Journal of Inequalities and Special Functions*, **2018**, (Baskıda).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	ATA, Enes
Uyruğu	:	T.C.
Doğum Tarihi	:	01.09.1992
Doğum Yeri	:	İstanbul
e-mail	:	enesata.tr@gmail.com
	:	enes4ata2@gmail.com

Eğitim

İlköğrenim	:	Türk-İsveç Kardeşlik İlköğretim Okulu, İstanbul
Ortaöğrenim	:	Yunus Emre Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, İstanbul
Lisans	:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Kırşehir
Yüksek Lisans	:	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Kırşehir
Yabancı Dil	:	İngilizce