T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YANSIMALI HALKALAR VE UZANTILARI

Havva CİRMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR/2019

T.C.
KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YANSIMALI HALKALAR VE UZANTILARI

Havva CİRMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
DOÇ. DR. HANDAN KÖSE

KIRŞEHİR/2019

Bu çalışma 23.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Emre TAŞ
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Handan KÖSE
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR
Yozgat Bozok Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Havva CİRMAN

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın tespitinde ve hazırlanışında manevi desteklerini, bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Handan KÖSE'ye teşekkürlerimi bir borç bilirim. Çalışmamın hazırlanışında bana her türlü maddi ve manevi imkanı sağlayan annem ve babama sonsuz minnetlerimi sunarım.

Temmuz, 2019 Havva CİRMAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ v

İÇİNDEKİLER vi

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ vii

ÖZET viii

ABSTRACT ix

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Halkalar 3

2.2. Polinom Halkaları, Matris Halkaları 5

2.3. Bazı Özel Halka Sınıfları 7

3. YANSIMALI HALKALAR VE UZANTILARI 11

3.1. Yansımalı Halkalar ve Temel Özellikleri 11

3.2. Yansımalı Halkaların Genişlemeleri 18

3.3. Zayıf Yansımalı Halkalar 21

4. EŞ KARE ELEMANLAR ÜZERİNDE YANSIMA ÖZELLİĞİ 25

4.1. RIP Halkalar ve Özellikleri 25

4.2. RIP Halkaların Uzantıları 32

KAYNAKLAR 39

ÖZGEÇMİŞ 43

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
R	: Birimli halka
I_R	: R nin birim endomorfizması
$R[x]$	: R üzerindeki polinom halkası
$R[[x]]$	: R üzerindeki güç serisi halkası
$R[x;x^{-1}]$	: R üzerindeki Laurent polinom halkası
$T(R,R)$	: R nin aşikar genişlemesi
$Id(R)$	: R nin eş kare elemanları kümesi
$Mat_n(R)$	: R üzerindeki $n \times n$ tipindeki matris halkası
$\Delta^{-1}R$	: R halkasının merkezi terslenebilir elemanlardan oluşan kümesi
$D(R,S)$	: R nin Dorroh genişlemesi
$nil(R)$	: R nin üstel sıfırlı elemanlarının kümesi
$T_n(R)$	: R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matris halkası
$S_r(R)$	: R nin bütün sağ yarı merkez eş kare elemanlarının kümesi
$S_l(R)$	: R nin bütün sol yarı merkez eş kare elemanlarının kümesi
$B(R)$	: R nin merkez eş kare elemanlarının kümesi

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YANSIMALI HALKALAR VE UZANTILARI

Havva CİRMAN

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
MATEMATİK Anabilim Dalı

Danışman: DOÇ. DR. HANDAN KÖSE

Tez temel kavramlar ve iki ana başlıktan oluşmaktadır. Bunlardan ilki " Yansımalı Halkalar ve Uzantıları " ve ikincisi " Eş Kare Elemanlar Üzerinde Yansıma Özelliği " şeklinde isimlendirilmiştir. İkinci bölümde yansımalı halka kavramı tanıtılmıştır ve bu halkaların genel özelliklerine değinilmiştir. Yansımalı halkaların halka sınıflandırmasındaki yeri belirlenmiş ve hangi koşullar altında tam yansımalı olduğu araştırılmıştır. Ayrıca bu bölümde zayıf yansımalı halka kavramı tanıtılmıştır. Hem yansımalı hem de zayıf yansımalı halkaların genişlemeleri: Dorroh, Nagata, aşikar vb. değinilmiştir. Üçüncü bölümde eş kare elemanlar üzerinde yansıma özelliği ele alınmıştır ve kısaca RIP ile gösterilen halkalar tanıtılmıştır. Üstelik RIP özelliğine sahip halkaların denklikleri verilmiştir.

Temmuz 2019, 43 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Yansımalı idealler, Yansımalı halkalar, Tam yansımalı halkalar, Zayıf yansımalı halkalar, Eş kare yansıma özelliği (RIP).

ABSTRACT

MSc THESIS

REFLEXIVE RINGS AND THEIR EXTENSIONS

Havva CİRMAN

Kırşehir Ahi Evran University
Science and Engineering Institute
MATHS Department

Supervisor: ASSOC. PROF. DR. HANDAN KÖSE

This thesis consists of abstract, basic concepts, introduction and two main chapters. The first main section is “ Reflexive rings and their extensions ”, the second main section is “ Reflexive property on idempotents ”. In the first chapter, some definitions and theorems for reflexive rings are included. Moreover, it is characterized weakly reflexive rings which is a weak form of reflexive rings and investigated its properties. In the third chapter, reflexive- idempotent-property (simply, RIP) is introduced as generalization.

July 2019, 43 Pages.

Keywords: Reflexive ideals, Reflexive ring, Completely reflexive ring, Weakly reflexive ring, Reflexive-idempotents-property (RIP).

1. GİRİŞ

Tez boyunca bütün halkalar birimli alınacaktır. Sıfırdan başka üstel sıfır elemanı olmayan halkaya *indirgenmiş* denir. İndirgenmiş halka kavramının daha zayıflatılmış hali; *simetrik halka* kavramı Lambek [24] tarafından tanımlandı. Buna göre $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olması $acb = 0$ olmasını gerektiriyorsa halkaya *simetrik* denir. Bu tanım $abc = 0$ iken $bac = 0$ gerektirmesine de denktir. Ayrıca eğer R indirgenmiş bir halka ise $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $ba = 0$ koşulunun sağlandığını görmek mümkündür. Cohn [10] bu koşulu sağlayan halkaları *terslenebilir* olarak adlandırdı. Anderson ve Camillo [4] bu halkaları *sıfır çarpanların değişmesi* ile tanımladı ve terslenebilir kavramı için ZC_2 teriminden yararlandılar. Cohn [10] çalışmasından önce Mason [28] ve Habeb [12] terslenebilir halka kavramını sırasıyla *tamamen yansımalı* ve *sıfır değişmeli* olarak çalıştılar. Ayrıca Tuganbaev [34] terslenebilir halkaları *sıfırda değişmeli* ismiyle inceledi. Değişmeli halkaların ve indirgenmiş halkaların terslenebilir olduğu açıktır.

Bir halkanın terslenebilir olma özelliği aşağıdaki gibi genelleştirilir. [1] de R halkası için $a, b \in nil(R)$ olmak üzere $ab = 0$ iken $ba = 0$ oluyorsa R halkasına *üstel sıfır elemanların sıfırda değişmeli olması* denir . Kısaltma açısından " *üstel sıfır elemanların sıfırda değişmeli olması* " yerine *CNZ* terimi kullanılır. I; R nin bir sağ ideali olmak üzere $a, b \in R$ için eğer $aRb \subseteq I$ iken $bRa \subseteq I$ sağlanıyorsa I ya *yansımalı* denir. Eğer 0 (sıfır) R nin yansımalı ideali ise R ye *yansımalı halka* denir [28]. Kwak ve Lee [22] deki çalışmasında terslenebilir halkaların yansımalı olduğunu söyledi. Zhao vd. [37] de zayıf yansımalı halka kavramını tanıttı. Eğer $aRb = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $bRa \subseteq nil(R)$ oluyorsa halkaya *zayıf yansımalı* denir. [19] da *nil yansımalı halka* kavramı verildi. Eğer $aRb \subseteq nil(R)$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $bRa \subseteq nil(R)$ sağlanıyorsa R ye *nil-yansımalı halka* denir.

[21] de R halkasının *yansımalı-eş kare elemanlar-özelliği* (kısaca RIP)'ne sahip olması tanıtıldı. Buna göre eğer $eRf = 0$ olacak şekildeki her e, f eş kare elemanı için $fRe = 0$ oluyorsa R ye RIP *özelliğine sahiptir* denir. I asal ideali için eğer $aRe \subseteq I$ olacak şekildeki her $a, e^2 = e \in R$ için $eRa \subseteq I$ sağlanıyorsa I ya *eş kare yansımalı ideali* denir [16]. Eğer 0 (sıfır) eş kare yansımalı ideal ise R ye *eş kare yansımalı halka* denir.

Kim ve Baik [17] de *sol ve sağ eş kare yansımalı halkaları* tanımladı. I; R halkasının iki yanlı ideali olmak üzere eğer $aRe \subseteq I$ olacak şekildeki her $a, e^2 = e \in R$ için $eRa \subseteq I$ oluyorsa I ya R nin *sağ eş kare yansımalı ideali* denir. R halkası için eğer 0 (sıfır) sağ eş kare yansımalı ideal ise R ye *sağ eş kare yansımalı halka* denir. Sol eş kare yansımalı idealler ve halkalar benzer şekilde tanımlanabilir. Üstelik R halkası hem sol hem de sağ eş kare yansımalı ise R ye *eş kare yansımalı halka* denir. Kheradmand vd. [15], yansımalı halkaları RNP halkalarına genişlettiler. Eğer $aRb = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in nil(R)$ için $bRa = 0$ oluyorsa R ye *yansımalı-üstel sıfırlı-özelliği* (kısaca RNP)'ne sahiptir denir. Bu tez de yansımalı halkaların bazı sonuçları ve uzantıları incelendi.

Tezin ikinci bölümü tezde kullanılan temel kavramlar ve bazı özel halka sınıflarına ayrıldı.

Üçüncü bölümde, [37] esas alınarak yansımalı halkaların temel özellikleri ve diğer bazı halkalar ile ilişkileri incelendi. R nin tam yansımalı halka olması için gerek ve yeter şart R nin yarı değişmeli yansımalı halka olmasıdır. Üstelik bazı polinom halkalarının ne zaman yansımalı olduğu araştırıldı ve $R[x]$ yansımalıdır ancak ve ancak $R[x; x^{-1}]$ yansımalıdır. Ayrıca quasi-Armendariz halka şartı altında R yansımalıdır ancak ve ancak $R[x]$ yansımalıdır ancak ve ancak $R[x; x^{-1}]$ yansımalıdır denkliği elde edildi. Bölümün sonunda *zayıf yansımalı halka* kavramı tanıtıldı ve özellikleri araştırıldı. Zayıf yansımalı halkaların yarı değişmeli halkaları gerektirmediğine yönelik örnekler verildi. Üstelik eğer R yarı değişmeli ise $R[x]$ in zayıf yansımalı olduğu ve eğer R zayıf yansımalı halka ise $T_n(R)$ $n \times n$ tipinde üst üçgensel matris halkasının zayıf yansımalı olduğu gösterildi.

Tezin dördüncü bölümünde, kaynaklar kısmında belirtilen [21] nolu yayın referans alındı. Bu bölümde RIP ile gösterilen yansımalı-eş kare elemanlar-özelliğine sahip halkalar incelendi. Bu halkalar tek yanlı eş kare yansımalı halkaların bir genelleştirmesi olarak ortaya çıkar. R nin RIP halka olması için gerek ve yeter şart $R[x]$ in RIP halka olmasıdır gerek ve yeter şart $R[[x]]$ in RIP halka olmasıdır. Ayrıca R, RIP halkadır ancak ve ancak $D_n(R)$, RIP halkadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca gerekli olan temel kavramlar tanıtılacaktır.

2.1. Halkalar

Tanım 2.1. [23] R boş olmayan bir küme ve R üzerinde $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma ile gösterilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer;

1. $(R, +)$ bir değişmeli grup,
2. Her $a, b, c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$,
3. Her $a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$ (soldan ve sağdan dağılma özellikleri)

aksiyomları sağlanıyorsa R ye $(+)$ ve $(.)$ ikili işlemleri ile birlikte bir *halka* denir.

Örnek 2.2. [23] $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$ kümesi göz önüne alınsın. Her $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_n$ için $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ ve $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$ işlemleri ile birlikte $\mathbb{Z}_n$ birimli ve değişmeli bir halkadır.

Tanım 2.3. [4] R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ $(ba = 0)$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ varsa, bu durumda a ya *sol (sağ) sıfır bölen* denir. Hem sağ hem sol sıfır bölen elemana halkanın *sıfır böleni* denir. Sıfır böleni olmayan halkaya *tamlık bölgesi* denir.

Örnek 2.4. [23] $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte bir tamlık bölgesidir.

Tanım 2.5. [5] R bir halka olsun. $x \in R$ için eğer $x^k = 0$ ise $x^{k-1} \neq 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ varsa x e *üstel sıfırlı eleman* denir.

Örnek 2.6. [23] $\mathbb{Z}_8$ halkası göz önüne alınsın. Bu halkada üstel sıfırlı elemanların kümesi $nil(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

Tanım 2.7. **[18]** R bir halka olsun. $e \in R$ olmak üzere eğer $e^2 = e$ oluyorsa e ye *eş kare eleman* denir. R deki bütün eş kare elemanların kümesi $Id(R)$ ile gösterilir. Birimli bir halkada halkanın sıfır elemanı (0_R) ve birim elemanı (1_R) eş kare elemanlardır.

Örnek 2.8. **[23]** Boolean halkasında $Id(R) = R$.

Tanım 2.9. **[35]** R bir halka olsun. $C(R) = \{a \in R \mid x \in R,\ xa = ax\}$ kümesine R nin *merkezi* denir. Özel olarak $C(R) = R$ ise halka değişmelidir.

Önerme 2.10. **[22]** R bir halka olsun. Bu durumda $e \in Id(R) \cap C(R)$ olması için gerek ve yeter koşul $1 - e \in Id(R) \cap C(R)$ olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki $e \in Id(R) \cap C(R)$ olsun. O halde $e^2 = e$ ve her $r \in R$ için $er = re$ olur. $(1-e)^2 = (1-e)(1-e) = 1 - e - e + e^2 = 1 - e$ ve $r \in R$ olmak üzere $(1-e)r = r - er = r - re = r(1-e)$, yani $1 - e \in C(R)$. Buna göre $1 - e \in Id(R) \cap C(R)$ elde edilir. Benzer şekilde $1 - e \in Id(R) \cap C(R)$ ise $e \in Id(R) \cap C(R)$ olduğu gösterilebilir. $\blacksquare$

Tanım 2.11. **[16]** R bir halka ve $u \in R$ olsun. Eğer $r \in R$ için $ur = 0$ $(ru = 0)$ iken $r = 0$ ise u ya *sağ (sol) düzenli* denir. Hem sağ hem sol düzenli elemana *düzenli (regüler)* denir.

Tanım 2.12. **[23]** R bir halka, I; R nin ideali olsun. $R/I = \{x + I \mid x \in R\}$ ile tanımlansın. Her $x + I, y + I \in R/I$ için $(x + I) \oplus (y + I) = x + y + I$ ve $(x + I) \odot (y + I) = xy + I$ işlemleriyle bir halkadır. Bu halkaya *bölüm halkası* denir.

Tanım 2.13. **[14]** R bir halka olsun. $a \in R$ olmak üzere eğer $aRa = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa R ye *yarı asal halka* denir. Örneğin; her tamlık bölgesi yarı asal halkadır.

Tanım 2.14. **[23]** R bir halka olsun. $S \subseteq R$ olmak üzere eğer $x, y \in S$ için $xy \in S$ oluyorsa S ye *çarpımsal kapalı alt küme* denir.

Tanım 2.15. **[23]** R bir halka olsun. R halkasının çarpma işlemine göre birimi 1 olmak üzere eğer $x, x^{-1} \in R$ için $x.x^{-1} = 1$ ise x^{-1} e, R halkasının *çarpımsal tersi* denir.

Tanım 2.16. **[23]** R bir halka olsun. Eğer R halkasının sıfır olmayan her elemanının R de çarpımsal tersi varsa R ye *bölme halkası* denir. Değişmeli olan bölme halkaları cisimdir.

2.2. Polinom Halkaları, Matris Halkaları

Tanım 2.17. **[3]** R bir halka ve x bir bilinmeyen olmak üzere;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

şeklindeki ifadeye R ***katsayılı polinom*** denir. R katsayılı bütün polinomların kümesi

$$R[x] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \;\mid\; n \in \mathbb{N}, a_i \in R\right\}$$

ile gösterilir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i,\; g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j \in R[x]$$

olmak üzere, bu iki polinomun toplamı ve çarpımı

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i)x^i$$

ve

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_ix^i$$

şeklinde tanımlanır. Burada $k = mak\{m, n\}$ ve

$$c_t = \sum_{j=0}^{t} a_jb_{t-j} = a_0b_t + a_1b_{t-1} + \ldots + a_{t-2}b_2 + a_{t-1}b_1 + a_tb_0$$

şeklindedir. Bu işlemlerle $R[x]$ kümesi bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki *polinom halkası* denir.

Tanım 2.18. **[23]** R bir halka olmak üzere $R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}$ şeklinde tanımlansın.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,\ g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]] \text{ için}$$

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

işlemleriyle bir halkadır. Bu halkaya *güç serisi* denir.

Tanım 2.19. **[36]** R bir halka olsun.

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}$$

(k ve n negatif tamsayı olabilir) kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya *Laurent polinom halkası* denir.

Tanım 2.20. **[33]** R bir halka olsun. $Mat_n(R) = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in R, 1 \leq i, j \leq n\}$ kümesi bileşenleri R halkasından alınan $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesini göstersin. Matrislerin bilinen toplama ve çarpma işlemi altında $Mat_n(R)$ bir halkadır. Bu halkaya derecesi n olan *matris halkası* denir.

Tanım 2.21. **[21]** R bir halka olsun. $n \times n$ tipinde asal köşegeni altında kalan tüm elemanları sıfır olacak şekilde $T_n(R) = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} = 0, i > j\}$ kümesi $Mat_n(R)$ halkasının alt halkasıdır.

Tanım 2.22. **[21]** R bir halka ve $n \geq 2$ olmak üzere;

$$D_n(R) = \{(a_{ij}) \in T_n(R) \mid a_{ii} = a \in R\}$$

ve

$$V_n(R) = \left\{ \sum_{i=j}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_j e_{(i-j+1)i} \mid a_j \in R \right\}$$

kümeleri $T_n(R)$ nin alt halkalarıdır. Burada eğer $i - j + 1 = i$ ise $e_{(i-j+1)i} = 1$ diğer yerlerde 0 olan $n \times n$ tipindeki matrisi gösterir.

2.3. Bazı Özel Halka Sınıfları

Şimdi tez boyunca kullanılan bazı özel halka sınıfları tanıtılacaktır.

Tanım 2.23. **[25]** R bir halka olsun. Eğer R nin sıfırdan başka üstel sıfırlı elemanı yoksa halkaya *indirgenmiş* denir. Yani; $nil(R) = \{0_R\}$.

Örnek 2.24. **[25]** $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası indirgenmiş halkadır.

Uyarı 2.25. **[21]** R indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart $a \in R$ için eğer $a^2 = 0$ ise $a = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.26. **[24]** R bir halka olsun. I; R nin sağ (sol) ideali olsun. Eğer $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ olması $acb \in I$ olmasını gerektiriyorsa I ya *sağ (sol) simetriktir* denir. Eğer özel olarak 0 (sıfır) ideali simetrik yani; $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ iken $acb = 0$ oluyorsa R ye *simetriktir* denir.

Örnek 2.27. **[37]** Her indirgenmiş halka simetriktir.

Tanım 2.28. **[10]** R bir halka olsun. $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $ba = 0$ oluyorsa R ye *terslenebilir* denir. terslenebilir halkalar tam yansımalı halka olarak da adlandırılır.

Örnek 2.29. **[37]** İndirgenmiş halkalar terslenebilirdir. Gerçekten; $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = b(ab)a = 0$ olup R indirgenmiş olduğundan $ba = 0$ elde edilir. Yani; R terslenebilir halkadır.

Tanım 2.30. **[8]** R bir halka olsun. $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $aRb = 0$ oluyorsa R ye *yarı değişmeli halka* denir.

Örnek 2.31. **[18]** Terslenebilir halkalar yarı değişmelidir. Gerçekten; $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ elde edilir. Her $r \in R$ için $b(ar) = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ bulunur. Yani; $aRb = 0$ olup R yarı değişmelidir.

Tanım 2.32. **[28]** R bir halka olsun. $aRb = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $bRa = 0$ oluyorsa R ye *yansımalı halka* denir.

Örnek 2.33. **[37]** Her terslenebilir halka yansımalıdır. Gerçekten; $a, b \in R$ olmak üzere $aRb = 0$ olsun. Özel olarak R birimli olduğundan $ab = 0$ şeklindedir. Buradan her $r \in R$ için $a(br) = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $bra = 0$ bulunur. Yani; $bRa = 0$. Sonuç olarak R yansımalı halkadır.

Tanım 2.34. **[27]** R bir halka ve M bir bi-modül olsun. $(r_1, m_1), (r_2, m_2) \in T(R, M)$ olmak üzere

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

ve

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

işlemleri ile bir halkadır. Bu halkaya R nin M boyunca *aşikar genişlemesi* denir. Ayrıca

$T(R, M)$ halkası $\left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in R, m \in M \right\}$ matris halkasına izomorftur.

Tanım 2.35. **[6]** R bir halka olsun $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j \in R[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olması her $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ için $a_i b_j = 0$ olmasını gerektiriyorsa R ye *Armendariz halka* denir.

Örnek 2.36. **[32]** Her indirgenmiş halka Armendarizdir.

Tanım 2.37. **[13]** R bir halka olsun. $f(x), g(x) \in R[x]$ olmak üzere $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ olsun. Eğer $f(x)R[x]g(x) = 0$ iken her $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ için $a_i R b_j = 0$ olmasını gerektiriyorsa R halkasına *quasi-Armendariz* denir.

Örnek 2.38. **[13]** Yarı asal halkalar quasi-Armendarizdir.

Tanım 2.39. **[11]** R bir halka olsun. $R \times \mathbb{Z}$ üzerinde iki ikili işlem aşağıdaki gibi tanımlansın. $(r, n), (s, m) \in R \times \mathbb{Z}$ olmak üzere $(r, s) + (s, m) = (r + s, n + m)$ ve $(r, n).(s, m) = (rs + ns + mr, nm)$ işlemleri ile bir halkadır. Bu halkaya R nin *Dorroh genişlemesi* denir ve $D(R, \mathbb{Z})$ ile gösterilir.

Tanım 2.40. **[31]** R bir halka ve M bi-modül olsun. $R \oplus M$, R ve M nin dik toplamını göstersin. Bileşensel toplama ve

$$(r_1, m_1).(r_2, m_2) = (r_1 r_2, \alpha(r_1) m_2 + r_2 m_1)$$

işlemleri tanımlansın. Burada $r_1, r_2 \in R$ ve $m_1, m_2 \in M$. Bu işlemlerle $R \oplus M$ bir halkadır. Bu halkaya R nin M ve α boyunca *Nagata (aşikar katı) genişlemesi* denir ve $N(R, M; \alpha)$ ile gösterilir. Bu yapı ilk defa Nagata tarafından 1962 de verildi.

Tanım 2.41. **[26]** R bir halka olsun. $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ olması her bir $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ için $a_i b_j \in nil(R)$ olmasını gerektiriyorsa R ye *zayıf Armendariz halka* denir.

Örnek 2.42. **[26]** Yarı değişmeli halkalar zayıf Armendarizdir.

Tanım 2.43. **[20]** R bir halka olsun. X; R nin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere $r_R(X) = \{r \in R \mid Xr = 0\}$ tanımlansın. Bu kümeye X in R deki *sağ sıfırlayanı* denir. Benzer şekilde $l_R(X) = \{s \in R \mid sX = 0\}$ kümesine X in R deki *sol sıfırlayanı* denir.

Tanım 2.44. **[29]** R bir halka $a \in R$ olsun. Eğer $a \circ a^{'} = a + a^{'} - aa^{'}$ olacak şekilde bir $a^{'} \in R$ varsa a ya *r.q.r eleman (sağ yarı düzenli)* denir. R nin r.q.r elemanlarının kümesi $J(R) = \{a \in R \mid aR\}$ şeklindedir.

Tanım 2.45. **[2]** R bir halka olsun. Eğer her $e \in Id(R)$ için $e \in C(R)$ oluyorsa R ye *Abelian halka* denir. Örneğin; yarı değişmeli halkalar Abeliandır.

Tanım 2.46. **[21]** R bir halka olsun. R nin bir P asal ideali için $O(P) = \{a \in R \mid b \in R/P,\ aRb = 0\}$ şeklindedir. Eğer R nin P asal ideali için $O(P) = 0$ ise R halkasına *burulmasız* denir.

3. YANSIMALI HALKALAR VE UZANTILARI

Bu bölümde yansımalı halkalar tanıtılacak, özellikleri incelenecektir. Yansımalı halkaların halka sınıflandırmasındaki yeri belirlenecektir. Ayrıca yansımalı halkaların bazı genişlemelerine değinilecektir. Zayıf yansımalı halka kavramı tanıtılacak ve özellikleri araştırılacaktır.

3.1. Yansımalı Halkalar ve Temel Özellikleri

Tanım 3.1. [28] R bir halka olsun. $aRb = 0$ olacak şekilde her $a, b \in R$ için $bRa = 0$ oluyorsa R ye *yansımalı halka* denir.

Örnek 3.2. [37] Her terslenebilir halka yansımalıdır. Gerçekten; $a, b \in R$ olmak üzere $aRb = 0$ olsun. Özel olarak R birimli olduğundan $ab = 0$ şeklindedir. Buradan her $r \in R$ için $a(br) = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $bra = 0$ bulunur. Yani; $bRa = 0$. Sonuç olarak R yansımalı halkadır.

Tanım 3.3. [10] R bir halka olsun. $ab = 0$ olacak şekildeki her $a, b \in R$ için $ba = 0$ oluyorsa R ye *terslenebilir* denir. terslenebilir halkalar tam yansımalı halka olarak da adlandırılır.

Örnek 3.4. [37] İndirgenmiş halkalar terslenebilirdir. Gerçekten; $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = b(ab)a = 0$ olup R indirgenmiş olduğundan $ba = 0$ elde edilir. Yani; R terslenebilir halkadır.

Lemma 3.5. [26] R bir halka olsun. R nin terslenebilir halka olması için gerek ve yeter koşul R nin yarı değişmeli ve yansımalı halka olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki R terslenebilir halka olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ elde edilir. Herhangi bir $r \in R$ için $bar = 0$ ve buradan $arb = 0$ bulunur. Yani $aRb = 0$ olur ki R yarı değişmelidir. Şimdi kabul edelim ki $aRb = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $arb = 0$ olur. Özel olarak $ab = 0$ ve her $r \in R$ için $a(br) = 0$ şeklindedir.

R terslenebilir olduğundan $bra = 0$, yani R yansımalı halkadır. Tersine kabul edelim ki R yarı değişmeli ve yansımalı halka olsun. Buradan $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ şeklinde bulunur. R yarı değişmeli olduğundan $aRb = 0$ ve R yansımalı olduğundan $bRa = 0$ elde edilir. Yani her $r \in R$ için $bra = 0$ olur. Özel olarak $r = 1_R$ alındığında $ba = 0$ bulunur ki bu R nin terslenebilir halka olduğunu gösterir. ■

Aşağıdaki örnek yarı değişmeli olan fakat yansımalı olmayan bir halka örneğini göstermektedir.

Örnek 3.6. [37] R indirgenmiş bir halka olsun. Buna göre $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$

halkası Kim ve Lee (2003) Önerme 1.2 den yarı değişmelidir. Fakat $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$

için $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olmasına rağmen herhangi bir $0 \neq a \in R$ için

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olduğundan S halkası yansımalı değildir.

Önerme 3.7. [37] R indirgenmiş bir halka olsun. Buna göre $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$

yansımalı halkadır.

İspat $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S$ olmak üzere S deki elemanların gösterimi ve S de

tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri için aşağıdaki notasyondan yararlanılacaktır.

$$(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)$$

$$(a_1,b_1,c_1)(a_2,b_2,c_2)=(a_1a_2,a_1b_2+b_1a_2,a_1c_2+c_1a_2)$$

şeklinde tanımlansın. Her $(a,b,c)\in S$ için $(a_1,b_1,c_1)(a,b,c)(a_2,b_2,c_2)=0$ olduğunu kabul edelim. Buradan aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$a_1aa_2=0 \tag{3.1}$$

$$a_1ab_2+(a_1b+b_1a)a_2=0 \tag{3.2}$$

$$a_1ac_2+(a_1c+c_1a)a_2=0 \tag{3.3}$$

Buna göre Lemma 3.5. ve her indirgenmiş halkanın terslenebilir olması gerçeği kullanılacaktır. (3.1) den $a_1aa_2=0$ ise R terslenebilir olduğundan $a_2aa_1=0$ olarak bulunur. (3.2) denklemi sağdan a_2 ile çarpılırsa, indirgenmiş halkalar yarı değişmeli ve $a_1aa_2=0$ olduğundan $a_1ab_2a_2=0$ elde edilir. Yani $0=a_1ab_2a_2+(a_1b+b_1a)a_2a_2=(a_1b+b_1a)a_2a_2$ şeklindedir. Bu ise $(a_1b+b_1a)a_2(a_1b+b_1a)a_2=[(a_1b+b_1a)a_2]^2=0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$(a_1b+b_1a)a_2=0 \tag{3.4}$$

denklemi elde edilir. (3.4) denklemi soldan a_1 ile çarpılırsa $a_1a_1ba_2+a_1b_1aa_2=0=a_1a_1ba_2$ bulunur. Yani $a_1ba_2=0$ şeklindedir. Buradan

$$a_1ab_2+b_1aa_2=0 \tag{3.5}$$

denklemi elde edilir. (3.5) denklemi sağdan a_2 ile çarpılırsa $0=a_1ab_2a_2+b_1aa_2a_2=b_1aa_2a_2$ olur. Yani $b_1aa_2=0$ bulunur. Bu ise $a_1ab_2=0$ olduğunu gösterir. R yansımalı olduğundan $a_2ba_1=0, a_2ab_1=0, b_2aa_1=0$ elde edilir. Benzer şekilde (3.3) denkleminden $a_1ac_2=0, a_1ca_2=0, c_1aa_2=0$ olduğu görülür. R terslenebilir olduğundan $c_2aa_1=0, a_2ca_1=0, a_2ac_1=0$ elde edilir ki bu $(a_2,b_2,c_2)(a,b,c)(a_1,b_1,c_1)=0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla S yansımalı halkadır.

■

Sonuç 3.8. **[26]** Eğer R indirgenmiş halka ise $T(R,R)$ bir yansımalı halkadır.

İspat Önerme 3.7. den istenilen sonuç elde edilir. ∎

Tanım 3.9. **[7]** R bir halka olsun. α, R nin endomorfizması olsun. $a,b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken $b\alpha(a) = 0$ oluyorsa α ya *sağ terslenebilir* ve eğer $a,b \in R$ için $ab = 0$ iken $\alpha(b)a = 0$ oluyorsa α ya *sol terslenebilir* denir. Bir R halkası sağ (sol) terslenebilir bir α endomorfizmasına sahip ise R ye *sağ (sol) α-terslenebilir halka* denir. Eğer R hem sağ hem sol α-terslenebilir halka ise R ye *α-terslenebilir halka* denir.

Aşağıdaki örnek sağ α- terslenebilir halkaların yansımalı halka olmadığını gösterir.

Örnek 3.10. **[7]** $\mathbb{Z}$, tam sayılar halkası olsun. $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$ halka ve

$\alpha : R \to R$, $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan endomorfizma göz önüne alınsın.

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \in R$ için kabul edelim ki; $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = 0$ olsun. Buna göre

$$a_1a_2 = 0 \tag{3.6}$$

$$a_1b_2 + b_1c_2 = 0 \tag{3.7}$$

$$c_1c_2 = 0 \tag{3.8}$$

Buradan (3.6) eşitliğinden $a_2a_1 = 0$ bulunur. Bu ise $a_2 = 0$ ya da $a_1 = 0$ olduğunu gösterir. Her iki durum için de

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \alpha\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

elde edilir.

Bu sebeple R sağ α- terslenebilirdir. Eğer $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ ise $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ olmak üzere

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olmasına rağmen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

olduğu görülür. Yani R yansımalı değildir.

“ R halka ve I; R nin sıfır olmayan yansımalı öz ideali olmak üzere eğer R/I yansımalı ise R yansımalıdır. ” Aşağıdaki örnek yukarıdaki olasılığı yok eder.

Örnek 3.11. [37] S bir bölme halkası olsun. $R = \begin{pmatrix} S & S \\ 0 & S \end{pmatrix}$ halkası göz önüne alınsın. R nin

sıfır olmayan öz idealleri $I_1 = \begin{pmatrix} S & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & S \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir. Buna göre

I_1 ve I_3 (halka olarak düşünüldüğünde) yansımalıdır. Ayrıca $R/I_1 \cong S$, $R/I_3 \cong S \oplus S$ olduğundan R/I_1 ve R/I_3 yansımalı halkalardır. Ancak I_2 ve R yansımalı değildir. Gerçekten;

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I_2$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

olmasına rağmen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan I_2 yansımalı halka değildir.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

olmasına rağmen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan R yansımalı halka değildir.

Önerme 3.12. [37] R bir halka ve I; R nin öz ideali olsun. Eğer R/I yansımalı ve I indirgenmiş ise R yansımalı halkadır.

İspat Kabul edelim ki; I indirgenmiş ve R/I yansımalı halkalar olsun. $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere her $r \in R$ için $r_1 r r_2 = 0$ olsun. Bu durumda $\overline{r}_1 \overline{r} \overline{r}_2 = \overline{0}$ ve buradan R/I yansımalı olduğundan $\overline{r}_2 \overline{r} \overline{r}_1 = \overline{0}$ bulunur. Bu ise $r_2 r r_1 \in I$ olduğunu gösterir. Buradan $(r_2 r r_1)(r r_2 r r_1) = 0$ elde edilir. I terslenebilir olduğundan $(r r_2 r r_1)(r_2 r r_1) = 0$ bulunur. Bu denklem sağdan r_2 ile çarpılırsa $r(r_2 r r_1)(r_2 r r_1) r_2 = 0$ olur. I indirgenmiş ve indirgenmiş halkalar terslenebilir olduğundan
$(r_2 r r_1)(r_2 r r_1) r_2 r = 0$ elde edilir. Bu denklem sağdan r_1 ile çarpılırsa $(r_2 r r_1)(r_2 r r_1) r_2 r r_1 = 0$ olur ki bu $r_2 r r_1 \in I$ demektir. I indirgenmiş olduğundan $r_2 r r_1 = 0$ bulunur. Böylece R yansımalıdır. ■

Uyarı 3.13. Önerme 3.12. de I idealinin “ indirgenmiş ” yerine “ yansımalı ” olması durumu düşünülemez.

Aşağıdaki örnek bu durumu açıklar.

Örnek 3.14. [37] R bir indirgenmiş halka olsun. $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$,

$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$ olsun. Buna göre $S/I \cong R$ olduğundan S/I indirgenmiştir.

Ayrıca I yansımalıdır. Fakat indirgenmiş değildir.

Buradan aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.15. [37] R indirgenmiş bir halka ve I ideali R de bir sıfırlayan olsun. Bu durumda R/I yansımalı halkadır.

İspat Kim ve Lee (2003) Önerme 1.14.(1) den ve her terslenebilir halka yansımalı olduğundan istenilen sonuç elde edilir. ■

Önerme 3.16. [37] R bir halka olsun. Eğer R terslenebilir halka ise $I = \{a \in R \mid a^n = 0\}$ kümesi R halkasının yarı değişmeli idealidir.

İspat Kabul edelim ki; R terslenebilir halka olsun. Bu durumda $a, b \in I$ için $a^n = 0$, $b^m = 0$ olacak şekilde $n, m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bir $s \in \mathbb{N}$ için $k = min\{m, n\} + s$ olsun. R terslenebilir olduğundan $(ab)^k = 0$ bulunur. Böylece $(a-b)^k = 0$ elde edilir. Buradan $r \in R$ için $(ar)^n \in I$ ve $(ra)^n \in I$ olur. Dolayısıyla I, R halkasının idealidir. Üstelik eğer $ab \in I$ ise $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(ab)^n = 0$ şeklindedir. Dolayısıyla R terslenebilir olduğundan $r \in R$ için $(arb)^n = 0$ elde edilir. Bu ise I idealinin yarı değişmeli olduğunu gösterir. ■

3.2. Yansımalı Halkaların Genişlemeleri

Bu bölümde, yansımalı halkaların bazı polinom genişlemeleri incelenmiştir. R halka ve Δ; R nin merkezi düzenli elemanlardan oluşan çarpımsal kapalı bir alt küme olmak üzere

$$\Delta^{-1}R = \left\{u^{-1}a \mid u \in \Delta, a \in R\right\}$$

ile tanımlansın. Bu durumda $\Delta^{-1}R$ bir halkadır.

Önerme 3.17. [37] R bir halka olsun. Bu durumda $R[x]$ polinom halkasının yansımalı olması için gerek ve yeter şart $\Delta^{-1}R[x]$ halkasının yansımalı olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki; $\Delta^{-1}R[x]$ yansımalı olsun. Özel olarak $\Delta = \{1_R\}$ alındığında $R[x]$ yansımalı halka olur. Şimdi kabul edelim ki; $R[x]$ yansımalı halka olsun.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} u_i^{-1}a_ix^i, \;\; g(x) = \sum_{j=0}^{n} \upsilon_j^{-1}b_jx^j \in \Delta^{-1}R[x]$$

ve her $h(x) = \sum_{k=0}^{t} \gamma_k^{-1}c_kx^k \in \Delta^{-1}R[x]$ için $f(x)h(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= (u_m u_{m-1}\dots u_0)f(x) \\ H(x) &= (\gamma_t\gamma_{t-1}\dots\gamma_0)h(x) \\ G(x) &= (\upsilon_n\upsilon_{n-1}\dots\upsilon_0)g(x) \end{aligned}\right\} \in R[x]$$

elde edilir. Buradan $F(x)H(x)G(x) = 0$ olur. $R[x]$ yansımalı olduğundan $G(x)H(x)F(x) = 0$ ve Δ, R deki merkezi düzenli elemanlardan oluşan çarpımsal kapalı alt kümesi ve her i, j için $u_i, \upsilon_j \in \Delta$ olduğundan $g(x)h(x)f(x) = 0$ bulunur. Böylece $\Delta^{-1}R[x]$ yansımalı halkadır. ■

Sonuç 3.18. [37] R bir halka olsun. $R[x]$ polinom halkasının yansımalı olması için gerek ve yeter şart $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinom halkasının yansımalı olmasıdır.

İspat Önerme 3.17. den istenilen sonuç elde edilir. ■

Armendariz olma şartı altında aşağıdaki ifadeler denktir:

1. R terslenebilir halkadır.
2. $R[x]$ terslenebilir halkadır.
3. $R[x, x^{-1}]$ terslenebilir halkadır.

Kim ve Lee (2003) Önerme 2.4 te R halkasının Armendariz olma şartı altında yukarıdaki üç ifadenin denk olduğunu gösterdi **[18]** .

Önerme 3.19. **[37]** R bir quasi-Armendariz halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

1. R bir yansımalı halkadır.
2. $R[x]$ bir yansımalı halkadır.
3. $R[x; x^{-1}]$ bir yansımalı halkadır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) Kabul edelim ki; R yansımalı halka olsun. $f(x)R[x]g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ ve her $h(x) = \sum_{k=0}^{t} c_k x^k \in R[x]$ olsun. R quasi-Armendariz halka olduğundan her i, j için $a_i c_k b_j = 0$ olur. R yansımalı halka olduğundan her i, j için $b_j c_k a_i = 0$ bulunur. Böylece $g(x)h(x)f(x) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $R[x]$ yansımalı halkadır.
(2) $\Rightarrow$ (1) Tersine kabul edelim ki; $R[x]$ yansımalı halka olsun. $a, b \in R$ olmak üzere $aRb = 0$ olsun. $f(x) = a, g(x) = b \in R[x]$ için $f(x)R[x]g(x) = 0$ nulunur. Kabulden $g(x)R[x]f(x) = 0$ olur. Buradan $g(x)Rf(x) = 0$, yani $bRa = 0$ elde edilir. Dolayısıyla R yansımalı halkadır.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) Sonuç 3.18. den istenilen elde edilir. ∎

Önerme 3.20. **[37]** R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadaler sağlanır.

1. R bir değişmeli tamlık bölgesi ve α, R halkasının birebir endomorfizması olsun. Bu durumda R halkasının R ve α boyunca Nagata genişlemesi yansımalıdır.

2. R, değişmeli S halkası üzerinde bir cebir ve D, R nin S boyunca Dorroh genişlemesi olsun. Eğer R yansımalı halka ve S tamlık bölgesi ise bu durumda D yansımalıdır.

İspat

1. Kim ve Lee (2003) Önerme 1.14.(3) ve terslenebilir halkalar yansımalı olduğundan istenen sonuç elde edilir.

2. Kabul edelim ki; R yansımalı halka ve S tamlık bölgesi olsun. $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in D$ olmak üzere her $(r, s) \in D$ için $(r_1, s_1)(r, s)(r_2, s_2) = 0$ olsun.
Buradan $(r_1rr_2 + s_1rr_2 + sr_1r_2 + s_1sr_2 + s_2r_1r + s_1s_2r + ss_2r_1, s_1ss_2) = 0$ elde edilir.
Yani;
$$r_1rr_2 + s_1rr_2 + sr_1r_2 + s_1sr_2 + s_2r_1r + s_1s_2r + ss_2r_1 = 0$$
ve
$$s_1ss_2 = 0$$
şeklindedir. S bir tamlık bölgesi olduğundan $s_1 = 0$ veya $s = 0$ veya $s_2 = 0$.
1. durum: $s_1 = 0$ olsun. Bu durumda $r_1rr_2 + sr_1r_2 + s_2r_1r + ss_2r_1 = 0$ ve buradan $0 = r_1(r + s)(r_2 + s_2)$ şeklindedir. R yansımalı olduğundan $0 = (r_2 + s_2)(r + s)r_1 = r_2rr_1 + r_2sr_1 + s_2rr_1 + s_2sr_1$ bulunur. Dolayısıyla $(r_2, s_2)(r, s)(r_1, s_1) = (r_2rr_1 + s_2rr_1 + sr_2r_1 + s_2sr_1 + s_1r_2r + s_1s_2r + s_1sr_2, s_2ss_1) = 0$ elde edilir.
2. durum: $s_2 = 0$ olsun. Bu durumda $r_2rr_1 + s_1rr_2 + sr_1r_2 + sr_1r_2 + s_1sr_2 = (r_1 + s_1)(r + s)r_2 = 0$ şeklinde bulunur. R yansımalı olduğundan $r_2(r + s)(r_1 + s_1) = r_2rr_1 + r_2rs_1 + r_2sr_1 + r_2ss_1 = r_2rr_1 + s_2rr_1 + sr_2r_1 + s_2sr_1 + s_1r_2r + s_1s_2r + s_1sr_2 = 0$ olur.
Dolayısıyla her bir durum için $(r_2, s_2)(r, s)(r_1, s_1) = 0$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

∎

Uyarı 3.21. [37] Önerme 3.20.(1) de R halkası " değişmeli indirgenmiş " halka alındığında sonuç Önerme 3.22. de geçerli değildir.

Örnek 3.22. [37] D karakteristiği sıfır olan bir tamlık bölgesi olsun. Bileşensel toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte $R = D \oplus D$ halkasını düşünelim. Bu durumda R değişmeli ve indirgenmiş bir halkadır. Ancak R bir tamlık bölgesi değildir. $\alpha : R \to R$, $\alpha((s,t)) = (t,s)$ otomorfizması göz önüne alınsın. $r_1 = ((0,1),(1,0)), r_2 = ((1,0),(0,1) \in R$ olsun. Bu durumda $r = ((0,1),(0,1)) \in R$ için $r_1 r r_2 = ((0,1),(1,0))((0,1),(0,1))((1,0),(0,1)) = 0$ olmasına rağmen $r_2 r r_1 = ((1,0),(0,1))((0,1),(0,1))((0,1),(1,0)) = ((0,0),(0,2)) \neq 0$ elde edilir. Buna göre R halkasının R ve α boyunca Nagata genişlemesi yansımalı değildir.

Aşağıdaki örnek α endomorfizmasının birebir olmadığı zaman Önerme 3.20.(1) in geçerli olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.23. [37] D bir değişmeli tamlık bölgesi ve $R = D[x]$, D üzerinde polinom halkası olsun. $\alpha : D[x] \to D[x]$, $\alpha(f(x)) = f(0)$ şeklinde tanımlansın. $N(R,R;\alpha)$, R nin Nagata genişlemesi ve $(1,x^2),(0,1) \in N(R,R;\alpha)$ olsun. Bu durumda $(x,1) \in N(R,R;\alpha)$ için $(1,x^2)(x,1)(0,1) = 0$ olmasına rağmen $(0,1)(x,1)(1,x^2) = (0,x) \neq 0$ elde edilir. Bu ise $N(R,R;\alpha)$ nın yansımalı olmadığını gösterir.

3.3. Zayıf Yansımalı Halkalar

Bu alt başlıkta yansımalı halkaların zayıf bir formu incelenecektir ve bu form zayıf yansımalı halkalar olarak adlandırılır. Yansımalı halkalar 0 (sıfır) elemanı yerine üstel sıfırlı elemanın alınması olarak tanımlanır.

Tanım 3.24. [37] R bir halka olsun. $a, b \in R$ ve her $r \in R$ için eğer $arb = 0$ iken $bra \in nil(R)$ oluyorsa R ye *zayıf yansımalı halka* denir.

Örnek 3.25. [37] Yansımalı halkalar zayıf yansımalıdır.

Önerme 3.26. [37] Eğer R zayıf yansımalı halka ise bu durumda $n \geq 2$ için $T_n(R)$ zayıf yansımalı halkadır.

İspat Kabul edelim ki; R zayıf yansımalı halka olsun. $A = (a_{ij}), C = (c_{ij}) \in T_n(R)$ ve her $B = (b_{ij}) \in T_n(R)$ için $ABC = 0$ olsun. Burada $1 \leq i \leq j \leq n$ şeklindedir. Buna göre her $1 \leq i \leq n$ için $a_{ii}b_{ii}c_{ii} = 0$ olur. R zayıf yansımalı olduğundan $c_{ii}b_{ii}a_{ii} \in nil(R)$ bulunur. Bu durumda her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $(c_{ii}b_{ii}a_{ii})^{m_i} = 0$ olacak şekilde $m_i \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $m = maks\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ olacak şekilde $((CBA)^m)^n = 0$ elde edilir. Yani $CBA \in nil(R)$ şeklindedir. O halde $T_n(R)$ halkası zayıf yansımalıdır. ■

Uyarı 3.27. [37] Zayıf yansımalı halkaların alt halkaları da zayıf yansımalıdır. Örnek 3.6. da gösterilen S halkası Önerme 3.26. dan dolayı zayıf yansımalı olmasına rağmen yansımalı değildir.

Önerme 3.28. [37] R bir halka olsun. $R[x]$ polinom halkasının zayıf yansımalı olması için gerek ve yeter şart $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinom halkasının zayıf yansımalı olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki; $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinom halkası zayıf yansımalı olsun. $R[x]$ polinom halkası $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinom halkasının alt halkası olduğundan Uyarı 3.27. den $R[x]$ zayıf yansımalı halkadır. Şimdi kabul edelim ki; $R[x]$ zayıf yansımalı olsun. $f(x), g(x) \in R[x; x^{-1}]$ olmak üzere her $h(x) \in R[x; x^{-1}]$ için $f(x)h(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= f(x)x^s \\ g_1(x) &= g(x)x^s \\ h_1(x) &= h(x)x^s \end{aligned}\right\} \in R[x]$$

olacak şekilde $s \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $f_1(x)h_1g_1(x) = 0$ bulunur. $R[x]$ zayıf yansımalı halka olduğundan $(g_1(x)h_1f_1(x))^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$(g(x)h(x)f(x))^n = (x^{-3s})^n(g_1(x)h_1(x)f_1(x))^n = 0$$

elde edilir. Bu ise $g(x)h(x)f(x) \in nil(R[x; x^{-1}])$ olduğunu gösterir. O halde $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinom halkası zayıf yansımalıdır. ■

Kim ve Lee (2003) Lemma 1.4 ten her terslenebilir halka yarı değişmelidir. Zayıf yansımalı halkalar yarı değişmeli değildir.

Örnek 3.29. **[37]** F bir bölme halkası olsun. $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ 2×2 tipindeki üst üçgensel matris halkasını göstersin. R yarı değişmeli değildir. Gerçekten: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ olmak üzere her $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ için $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ olmasına rağmen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ elde edilir. Böylece R yarı değişmeli değildir. Fakat Önerme 3.26. dan zayıf yansımalı halkadır.

Zayıf yansımalı olan fakat terslenebilir olmayan bir halka vardır.

Örnek 3.30. **[37]** R indirgenmiş bir halka ve $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$ olsun. $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$ ve $C = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \in S$ olmak üzere her $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \in S$ için $ABC = 0$ olsun. Bu durumda $a_1a_2a_3 = 0$ ve $c_1c_2c_3 = 0$ bulunur. Her indirgenmiş halka zayıf yansımalı olduğundan $(a_3a_2a_1) \in nil(R)$ ve $(c_3c_2c_1) \in nil(R)$ elde edilir. Buna göre $(a_3a_2a_1)^{n_1} = (c_3c_2c_1)^{n_2} = 0$ olacak şekilde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $(CBA)^{maks\{n_1,n_2\}+3} = 0$ olur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ için $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, fakat $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ olduğundan S terslenebilir değildir.

Motais De Narbonne (1981) Örnek 2. den R halkasının yarı değişmeli olması $R[x]$ polinom halkasının yarı değişmeli olmasını gerektirmez. Dolayısıyla $R[x]$ terslenebilir değildir.

Önerme 3.31. **[26]** R yarı değişmeli bir halka olsun. Bu durumda $R[x]$ zayıf yansımalıdır.

İspat

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \ , \ g(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \in R[x]$$

olmak üzere

$$h(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k \in R[x]$$

için $f(x)h(x)g(x) = 0$ olsun. Yarı değişmeli halkalar zayıf Armendariz olduğundan her bir i, j için $(a_i b_k c_j)^{n_{ij}} = 0$ olacak şekilde $n_{ij} \in \mathbb{N}$ vardır. Yani $(a_i b_k c_j)(a_i b_k c_j) \ldots (a_i b_k c_j) = 0$ şeklindedir. R yarı değişmeli olduğundan ve b_k ile çarpıldığında $a_i b_k (c_j b_k a_i) b_k c_j \ldots a_i b_k c_j = 0$ bulunur. Yine b_k ile çarpıldığında $a_i b_k (c_j b_k a_i) b_k (c_j b_k a_i) \ldots a_i b_k c_j = 0$ olur. Dolayısıyla $(c_j b_k a_i) \in nil(R)$ elde edilir. Burada

$$g(x)h(x)f(x) = \Big(\sum_{j=0}^{n} c_j x^j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{p} b_k x^k\Big)\Big(\sum_{i=0}^{m} a_i x\Big) = \sum_{t=0}^{m+n+p} \Big(\sum_{i+j+k=t} c_j b_k a_i\Big)$$

şeklindedir. Liu ve Zhao (2006) Lemma 3.1 den her bir t için

$$\sum_{i+j+k=t} c_j b_k a_i \in nil(R).$$

Yani $g(x)h(x)f(x) \in nil(R[x])$ bulunur. Böylece $R[x]$ zayıf yansımalı halkadır. ■

4. EŞ KARE ELEMANLAR ÜZERİNDE YANSIMA ÖZELLİĞİ

Bu bölümde eş kare elemanlar üzerinde halkaların yansıma özelliği çalışılacaktır.

4.1. RIP Halkalar ve Özellikleri

Tanım 4.1. [17] R bir halka olsun. I; R nin tek yanlı ideali olmak üzere eğer $a \in R$ ve $e \in Id(R)$ için $aRe \subseteq I$ iken $eRa \subseteq I$ oluyorsa I ya *sağ eş kare yansımalı ideal* denir. Eğer 0 (sıfır) bir sağ yansımalı ideal ise R halkasına *sağ eş kare yansımalı* denir. Sol eş kare yansımalı idealler ve halkalar benzer şekilde tanımlanır.

Örnek 4.2. [17] Yansımalı halkalar tek yanlı eş kare yansımalıdır.

Tanım 4.3. [21] R bir halka olsun. Eğer $e, f \in Id(R)$ için $eRf = 0$ iken $fRe = 0$ oluyorsa R halkası *eş kare elemanlar üzerinde yansıma özelliğine (kısaca RIP) sahiptir* denir.

Örnek 4.4. [21] Her tek yanlı eş kare yansımalı halka RIP özelliğine sahiptir. Abelian halkalar RIP özelliğine sahiptir.

Aşağıdaki örnek tek yanlı eş kare yansımalı olmayan RIP halkaların olduğunu gösterir.

Örnek 4.5. [21] F, karekteristiği sıfır olan bir cisim ve F üzerinde değişmeyen a, b, c bilinmeyeni için $A = F < a, b, c >$ olsun.

1. Kwak and Lee (2012) Örnek 3.3 de I; $aAb, a^2 - a$ tarafından üretilen A nın ideali ve $R = A/I$ olsun. Bu durumda R sağ eş kare yansımalı halka fakat sol eş kare yansımalı değildir. R sağ eş kare yansımalı olduğundan RIP halkadır.

2. Kwak and Lee (2012) Örnek 3.3 de I; $aAb, a^2 - a$ tarafından üretilen A nın ideali ve $R = A/I$ olsun. Bu durumda R sol eş kare yansımalı halka fakat sağ eş kare yansımalı değildir. R sol eş kare yansımalı olduğundan RIP halkadır.

Örnek 4.6. [21] F bir cisim olmak üzere $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ halkası göz önüne alınsın. R bir RIP halka değildir. Gerçekten; $E_{11}, E_{22} \in Id(R)$ için $E_{22}RE_{11} = 0$ olmasına rağmen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ için $E_{11}RE_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ olduğundan R bir RIP halka değildir.

F bir cisim olmak üzere yansımalı bir halkadır. Kwak ve Lee (2012) Teorem 2.6.(2) de $Mat_2(F)$ nin yansımalı bir halka olduğu gösterildi. Dolayısıyla $Mat_2(F)$ bir RIP halkadır. Buna rağmen Örnek 4.6. da $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ üst üçgensel matris halkasının RIP olmadığı gösterildi. O halde halkaların RIP olma özelliği alt halkalarda korunmaz.

Önerme 4.7. [21] R bir halka olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir.

1. R, RIP halkadır.
2. $e \in Id(R)$ için $r_R(eR) \cap Id(R) = l_R(Re) \cap Id(R)$.
3. $ERF = 0$ olacak şekilde $\emptyset \neq E \subseteq Id(R)$ ve $\emptyset \neq F \subseteq Id(R)$ için $FRE = 0$ olur.
4. I ve J; $Id(R)$ nin sağ idealleri olmak üzere eğer $IJ = 0$ ise $JI = 0$.
5. I ve J; $Id(R)$ nin idealleri olmak üzere eğer $IJ = 0$ ise $JI = 0$.

İspat $(1) \Rightarrow (2)$ Kabul edelim ki; R bir RIP halka olsun. $x \in r_R(eR) \cap Id(R)$ olsun. Buradan $x \in r_r(eR)$ ve $x \in Id(R)$ olup $eRx = 0$ ve $x^2 = x$ şeklindedir. R bir RIP halka olduğundan $xRe = 0$ olur. O halde $x \in l_R(Re) \cap Id(R)$ şeklindedir. Böylece, $r_R(eR) \cap Id(R) \subseteq l_R(Re) \cap Id(R)$ elde edilir. Benzer şekilde $l_R(Re) \cap Id(R) \subseteq r_R(eR) \cap Id(R)$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $r_R(eR) \cap Id(R) = l_R(Re) \cap Id(R)$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Kabul edelim ki; $e \in Id(R)$ için $r_R(eR) \cap Id(R) = l_R(Re) \cap Id(R)$ olsun. $e^2 = e \in R$, $f^2 = f \in R$ için $eRf = 0$ şeklindedir. Bu durumda $f \in r_R(eR) \cap Id(R)$ olur. Kabulden $f \in l_R(Re) \cap Id(R)$ bulunur. Yani $fRe = 0$ şeklindedir. Bu ise R nin RIP halka olduğunu gösterir.

(1) $\Rightarrow$ (3) Kabul edelim ki; R, RIP halka olsun. $E, F \subseteq Id(R)$ olmak üzere $ERF = 0$ olsun. Bu durumda $e \in E$, $f \in F$ için $eRf = 0$ bulunur. R, RIP halka olduğundan $fRe = 0$ olur.

$$FRE = \left\{ \sum_i f_i r_i e_i \;\middle|\; f_i \in F, e_i \in E, r_i \in R \right\}$$

olduğundan $FRE = 0$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4) Kabul edelim ki; $ERF = 0$ olacak şekilde $E, F \subseteq Id(R)$ için $FRE = 0$ olsun. Burada $I = ER$ ve $J = FR$ şeklindedir. Bu durumda $ERF \subseteq IJ = 0$ olarak bulunur. Kabulden $FRE = 0$ olup $JI = 0$ elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (5) $E, F \subseteq Id(R)$ olmak üzere $I = RER$ ve $J = RFR$ olsun. Kabul edelim ki; $IJ = 0$ olsun. Bu durumda $ERFR \subseteq IJ = 0$ olduğundan $ERFR = 0$ olur. (4) ten $FRER = 0$ ve buradan $RFRER = 0$ bulunur. Böylece $JI = 0$ elde edilir.

(5) $\Rightarrow$ (1) Kabul edelim ki; $e, f \in Id(R)$ olmak üzere $eRf = 0$ olsun. $I = ReR$, $J = RfR$ idealleri için $ReRRfR = 0$ olup (5) ten $(RfR)(ReR) = 0$ şeklinde bulunur. Özel olarak $fRe = 0$ elde edilir. Dolayısıyla R bir RIP halkadır. $\blacksquare$

Önerme 4.8. [21] R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Eğer R bir RIP halka ise $e \in Id(R)$ için eRe bir RIP halkadır.
2. I, R nin bir ideali olmak üzere R/I bir RIP halka olsun. Eğer I indirgenmiş halka ise R bir RIP halkadır.
3. $e \in Id(R) \cap C(R)$ olmak üzere eR ve $(1-e)R$ halkalarının RIP olması için gerek ve yeter koşul R halkasının RIP olmasıdır.

İspat

1. Kabul edelim ki; R bir RIP halka olsun. $f, f^{'} \in Id(eRe)$ olmak üzere $f(eRe)f^{'} = 0$ olsun. Buradan $f = exe$, $f^{'} = eye$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır. $fe = (exe)e = exe^2 = exe = f$ ve $ef = e(exe) = e^2xe = exe = f$ şeklindedir. Yani, $fe = f = ef$ bulunur. Benzer şekilde $f^{'}e = f^{'} = ef^{'}$ elde edilir. $f(eRe)f^{'} = 0$ ise $(fe)R(ef^{'}) = 0$ ve buradan $fRf^{'} = 0$ olur. R bir RIP halka olduğundan $f^{'}Rf = 0$ bulunur. Bu ise $0 = f^{'}Rf = (f^{'}e)R(ef) = f^{'}(eRe)f$ olmasını gerektirir. Böylece eRe halkası RIP özelliğine sahiptir.

2. Kabul edelim ki; R/I, RIP halka ve I ideali indirgenmiş olsun. $e, f \in Id(R)$ için $eRf = 0$ olsun. Buna göre $\bar{e}\bar{R}\bar{f} = \bar{0}$ elde edilir. $\bar{R} = R/I$, RIP olduğundan $\bar{f}\bar{R}\bar{e} = \bar{0}$ bulunur. Burada $\bar{e}, \bar{f} \in Id(\bar{R})$ şeklindedir. Buna göre $fRe \subseteq I$ bulunur. Diğer taraftan $(fRef)^2 = (fReR)(fReR) = fR(eRf)ReR = 0$ olup I indirgenmiş olduğundan $fRe = 0$ elde edilir. Bu ise R halkasının RIP özelliğine sahip olduğunu gösterir.

3. Kabul edelim ki; $e \in Id(R) \cap C(R)$ için eR ve $(1-e)R$ halkaları RIP olsun. $f, f^{'} \in Id(R)$ için $fRf^{'} = 0$ olsun. Bu durumda eşitliğin her iki tarafı soldan e ile ve $1-e$ ile çarpıldığında $efRf^{'} = 0$ ve $(1-e)fRf^{'} = 0$ olur. $e \in Id(R) \cap C(R)$ olduğundan $feRf^{'} = 0$ ve $f(1-e)Rf^{'} = 0$ bulunur. eR ve $(1-e)R$ halkaları RIP olduğundan $f^{'}eRf = 0$ ve $f^{'}(1-e)Rf = 0$ elde edilir. Buradan $e \in C(R)$ olduğundan $ef^{'}Rf = 0$ ve $(1-e)f^{'}Rf = 0$ bulunur. Böylece $ef^{'}Rf + (1-e)f^{'}Rf = f^{'}Rf = 0$ olur ki bu ise R halkasının RIP özelliğine sahip olduğunu gösterir. Tersine kabul edelim ki; R halkası RIP özelliğine sahip olsun. (1) den her $e \in Id(R)$ için eRe halkası RIP özelliğine sahip olduğundan $eRe = eR$ ve $(1-e)R(1-e) = (1-e)R$ halkaları RIP özelliğine sahiptir.

■

Uyarı 4.9. Önerme 4.8.(2) de ki " I indirgenmiş bir halka " olma şartı kaldırılamaz.

Örnek 4.10. **[21]** F bir cisim olsun. $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ halkası göz önüne alınsın. Örnek 4.6. dan

R halkası RIP değildir. Gerçekten; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

olmasına rağmen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

bulunur. R nin sıfır olmayan öz idealleri $I_1 = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ ve $I_3 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

şeklindedir. Bu idealler halka olarak düşünüldüğünde indirgenmiş değillerdir. Buna rağmen

$R/I_1 \cong F$ ve $R/I_2 \cong F$ ve $R/I_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + I_3 \mid a, c \in F \right\}$ indirgenmiş halkalardır.

İndirgenmiş halkalar RIP olduğundan her bir $i = 1, 2, 3$ için R/I_i halkaları RIP özelliğine sahiptir.

Önerme 4.11. **[21]** R_λ $(\lambda \in \Lambda)$ halkalar olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:

1. R_λ $(\lambda \in \Lambda)$ bir RIP halkadır.
2. R_λ $(\lambda \in \Lambda)$ nin dik çarpım halkası $\Pi_{i \in \lambda} R_\lambda$ RIP halkadır.
3. R_λ $(\lambda \in \Lambda)$ nin dik toplam halkası $\oplus_{i \in \lambda} R_\lambda$ RIP halkadır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) Kabul edelim ki; her bir $\lambda \in \Lambda$ için R_λ bir RIP halka olsun. R, RIP halkaların bir sonlu dik çarpımı olsun. $(e_\lambda), (f_\lambda) \in Id(R)$ için $(e_\lambda)R(f_\lambda) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her $\lambda \in \Lambda$ için $e_\lambda R_\lambda f_\lambda = 0$ olup $e_\lambda, f_\lambda \in Id(R)$ bulunur.

R_λ, RIP halka olduğundan her $\lambda \in \Lambda$ için $f_\lambda R_\lambda e_\lambda = 0$ şeklindedir. Böylece $(f_\lambda)R(e_\lambda) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla R bir RIP halkadır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Kabul edelim ki; R_λ ($\lambda \in \Lambda$) nin dik çarpımı RIP halka olsun. $\gamma \neq \lambda$ için $e_\lambda = 1$ ve $e_\gamma = 0$ olacak şekilde $e = (e_\lambda) \in Id(R)$ olsun. Buradan $eRe \cong R_\lambda$ bulunur. Önerme 4.8.(1) den eRe bir RIP halkadır. Dolayısıyla R_λ bir RIP halkadır.

(1) $\Rightarrow$ (3) Kabul edelim ki; R_λ ($\lambda \in \Lambda$) RIP olsun. R, R_λ ($\lambda \in \Lambda$) nin dik toplamı olsun. $(e_\lambda), (f_\lambda) \in Id(R)$ için $(e_\lambda)R(f_\lambda) = 0$ olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere $e_\lambda, f_\lambda \in Id(R_\lambda)$ için $e_\lambda R_\lambda f_\lambda = 0$ bulunur. R_λ, RIP olduğundan $f_\lambda R_\lambda e_\lambda = 0$. Böylece $(e_\lambda)R(f_\lambda) = 0$ olup R bir RIP halkadır.

(3) $\Rightarrow$ (1) Kabul edelim ki; R, R_λ nın dik toplamı ve R, RIP halka olsun. $\gamma \neq \lambda$ için $e_\lambda = 1$ ve $e_\gamma = 0$ olacak şekilde $e = (e\lambda) \in Id(R)$ olsun. Bu durumda $eRe \cong R_\lambda$ bulunur. $f(eRe)f' = 0$ olacak şekilde $f, f' \in Id(eRe)$ olsun. Buradan $f(eRe)f' = (fe)R(ef') = 0$ olur. Burada $e = (e_\lambda) = 1$ olduğundan $fe = f = ef$ ve $ef' = f' = f'e$ şeklindedir. Böylece $fRf' = 0$ bulunur. R, RIP olduğundan $f'Rf = 0$ elde edilir. Buradan $(f'e)R(ef) = f'(eRe)f = 0$ olup eRe bir RIP halkadır. Dolayısıyla $eRe \cong R_\lambda$ olduğundan R_λ bir RIP halkadır. ∎

Uyarı 4.12. RIP halkalar homomorfik görüntüleri altında kapalıdır.

Örnek 4.13. [21] K bir cisim ve $R = K < a, b >$ olsun. Bu durumda R indirgenmiştir ve dolayısıyla yansımalıdır. O halde R bir RIP halkadır. I; aRb, $a^2 - a$ ve $b^2 - b$ tarafından üretilen R nin ideali olsun. Bu durumda $a, b \in Id(R/I)$ için $aRb \subseteq I$ olmasına rağmen $ba \in bRa \nsubseteq I$ olduğundan R/I halkası RIP özelliğine sahip değildir.

Örnek 4.14. [21] R herhangi bir halka ve $n \geq 2$ olsun. Bu durumda R üzerindeki $n \times n$ tipinde üst üçgensel matris halkası $T_n(R)$, bir RIP halka değildir. Gerçekten; $E_{11}, E_{nn} \in Id(T_n(R))$ için $E_{nn}T_n(R)E_{11} = 0$ olmasına rağmen $E_{11}T_n(R)E_{nn} = E_{11}(RE_{1n} + RE_{2n} + \cdots + RE_{nn}) = RE_{1n} \neq 0$ elde edilir. Şimdi R sıfırdan farklı birimli olmayan bir halka olsun. $ef = e$ olacak şekilde sıfır olmayan $e, f \in Id(R)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $n \times n$ tipindeki $T_n(R)$ ($n \geq 2$) üst üçgensel matris halkası RIP halka değildir. $i, j = 1, \ldots, n$ için $A_{ij} = eE_{ij}$ ve $B_{ij} = fE_{ij}$ olsun. Buna göre $A_{ii}, B_{ii} \in Id(T_n(R))$ ve $B_{nn}T_n(R)A_{11} = 0$ bulunur. Fakat $A_{11}T_n(R)B_{nn}$, $A_{11}(B_{1n} + B_{2n} + \cdots + B_{nn}) = A_{11}B_{1n} = A_{1n} = efE_{in} = eE_{in} \neq 0$ elde edilir.

Tanım 4.15. **[9]** R bir halka ve $e \in Id(R)$ olsun. Eğer her $r \in R$ için $re = ere$ oluyorsa e ye *sol yarı değişmeli eş kare eleman* denir ve bütün sol yarı değişmeli eş kare elemanların kümesi $S_l(R)$ ile gösterilir. Benzer şekilde eğer her $r \in R$ için $er = ere$ oluyorsa e ye *sağ yarı değişmeli eş kare eleman* denir ve R nin bütün sağ yarı değişmeli eş kare elemanların kümesi $S_r(R)$ ile gösterilir. R merkezde yer alan eş kare elemanların kümesi için $B(R)$ notasyonundan yararlanılır.

Önerme 4.16. **[21]** R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. R bir RIP halka olsun. R nin her tek yanlı yarı değişmeli eş kare elemanı merkezdedir.
2. R bir RIP halka olsun. Eğer R burulmasız ise $B(R) = \{0, 1\}$.

İspat

1. $e \in S_l(R)$ olması için gerek ve yeter şart $(1 - e)Re = 0$ olmasıdır. R, RIP halka olduğundan $eR(1 - e) = 0$ olur. Dolayısıyla $e \in S_r(R)$ elde edilir.
2. Kabul edelim ki; R nin P asal idealleri için $O(P) = 0$ olsun. $e \in B(R) = S_l(R)$ olsun. Bu durumda $(1 - e)Re = 0$ olup R, RIP olduğundan $eR(1 - e) = 0$ elde edilir. Eğer $e \neq P$ ise $1 - e \in O(P) = \{0\}$, yani $e = 1$ bulunur. Eğer $e \in P$ ise $1 - e \neq P$ olur. Dolayısıyla $e \in O(P) = \{0\}$, yani $e = 0$ elde edilir.

■

Tanım 4.17. **[9]** R bir halka olsun. Eğer R halkasının bir sağ (sol) idealinin sağ (sol) sıfırlayanı bir eş kare elemanı tarafından üretiliyor ise R halkasına *sağ (sol) devirli yarı Baer (kısaca p.q-Baer)* denir. Eğer R hem sağ hem sol p.q-Baer ise R ye *p.q-Baer halka* denir.

Önerme 4.18. **[21]** R bir sağ p.q-Baer halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

1. R yarı asal halkadır.
2. R yansımalı halkadır.
3. R sağ eş kare yansımalı halkadır.
4. R sol eş kare yansımalı halkadır.
5. R bir RIP halkadır.
6. $S_l(R) = B(R) = S_r(R)$ dir.

İspat Kwak ve Lee (2012) Önerme 3.15 ve tanımdan istenilen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.19. **[21]** R bir RIP halka olsun. Bu durumda R sağ p.q-Baer olması için gerek ve yeter şart R nin p.q-Baer halka olmasıdır.

İspat R her sağ p.q-Baer ve RIP halkası Önerme 4.18. den tek yanlı eş kare yansımalıdır. Böylece Kwak ve Lee (2012) Önerme 3.16 dan R bir p.q-Baer halkadır. ■

4.2. RIP Halkaların Uzantıları

Bu bölümde çeşitli halka uzantılarının eş kare yansımalı özelliğini gözlemleriz. İlk olarak polinom halkaları ve güç serisi halkaları göz önüne alınacaktır.

Teorem 4.20. **[21]** R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. R bir RIP olması için gerek ve yeter şart $R[x]$ polinom halkasının RIP olmasıdır.
2. R nin RIP halka olması için gerek ve yeter şart $R[[x]]$ in RIP halka olmasıdır.
3. R bir sağ (sol) eş kare yansımalı halka olması için gerek ve yeter şart $R[x]$ in bir sağ (sol) eş kare yansımalı halka olmasıdır.

4. R bir sağ (sol) eş kare yansımalı halka olması için gerek ve yeter şart $R[[x]]$ in bir sağ (sol) eş kare yansımalı halka olmasıdır.

İspat

1. R halkasının RIP olduğunu varsayalım. Buradan $f(x)R[x]g(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $f(x), g(x) \in R[x]$ için $f(x)Rg(x) = 0$ olmasıdır. $e(x)Rf(x) = 0$ olacak şekilde
$$e(x) = \sum_{i=0}^{m} e_i x^i, f(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j x^j \in Id(R[x])$$
olsun. $e^2(x) = e(x)$ den $e_0^2 = e_0$ ve $h = 1, 2, \ldots, m$ için ,
$$e_h = \sum_{u+v=h} e_u e_v$$
şeklindedir. $(e_0, \ldots, e_{h-1})$, $e_0, \ldots, e_{h-1}$ tarafından üretilen R nin ideallerini göstersin. Buna göre tüm h ler için $e_h \in (e_0, \ldots, e_{h-1})$ olur. Böylece $(e_0) = Re_0R$ olmak üzere tüm $h = 0, 1, \ldots, m$ için $e_h \in (e_0)$ ve benzer şekilde $k = 0, 1, \ldots, n$ için $f_k \in (f_0)$ bulunur. Eğer $e_0 = 0$ ise her $e_h \in (e_0)$ olduğundan $e(x) = 0$ şeklindedir. $e_0 \neq 0$ olduğunu varsayalım. $e(x)Rf(x) = 0$ dan $e_0Rf_0 = 0$ bulunur. R, RIP halka ve $e_0, f_0 \in Id(R)$ olduğundan $f_0Re_0 = 0$ elde edilir. Bu $(Rf_0R)R(Re_0R) = 0$ olduğunu gösterir. Fakat tüm i, j ler için $e_i \in Re_0R$ ve $f_i \in Rf_0R$ olur. Buradan $f(x)R[x]e(x) = 0$ olduğundan tüm i, j ler için $f_iRe_i = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $R[x]$ halkası RIP olarak bulunur. Tersine $R[x]$ halkasının RIP olduğunu varsayalım. $e, f \in Id(R)$ için $eRf = 0$ olsun. Bu durumda $eR[x]f = 0$ ve buradan $fR[x]e = 0$ olup $fRe = 0$ elde edilir. Böylece R bir RIP halkadır.

2. (1) in ispatına benzer şekilde elde edilir.

3. Sol eş kare yansımalı halka için ispatı (1) in ispatına benzerdir. R nin sağ eş kare yansımalı halka olduğunu varsayalım. $f(x)Re(x) = 0$ olacak şekilde

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, e^2(x) = e(x) = \sum_{j=0}^{n} e_j x^j \in R[x]$$

olsun. Tüm $h = 0, 1, \ldots, n$ için $e_h \in (e_0)$ ve $e_0 \neq 0$ olduğunu varsayalım. Buna göre $f(x)Re(x) = 0$ olduğundan $a_0 Re_0 = 0$ ve buradan $a_0 Re_0 R$ elde edilir.
Böylece tüm h ler için $e_h \in (e_0)$ olduğundan $h = 0, 1, \ldots, n$ için $a_0 Re_h = 0$ (denk olarak $a_0 Re(x) = 0$) bulunur. Yani,

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i xi \right) Re(x) = 0$$

şeklindedir. Buradan $a_1 Re_0 = 0$ elde edilir. Ayrıca benzer şekilde $a_1 Re(x) = 0$ bulunur. Bu şekilde ilerleyerek tüm $i = 0, 1, \ldots, m$ için $a_i Re(x) = 0$ elde edilir. Buna göre tüm $i = 0, 1, \ldots, m$ ve $j = 0, 1, \ldots, n$ için $a_i Re_j = 0$ şeklinde bulunur. $i = 0, 1, \ldots, m$ için $a_i Re_0 = 0$ olup R sağ eş kare yansımalı ve $e_0 \in Id(R)$ olduğundan $i = 0, 1, \ldots, m$ için $e_0 Ra_i = 0$ (denk olarak $e_0 Rf(x) = 0$) olur. Yani $Re_0 Rf(x) = 0$ şeklindedir. Fakat tüm $j = 0, 1, \ldots, n$ için $e_j \in Re_0 R$ bulunur. Buna göre $e(x)R[x]f(x) = 0$ olmak üzere i, j için $e_j Ra_i = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $R[x]$ sağ eş kare yansımalıdır. Tersi (1) in ispatına benzerdir.

4. (3) ün ispatına benzer şekilde elde edilir.

■

Teorem 4.21. [21] R, değişmeli bir S halkası üzerinde bir cebir olsun. Bu durumda R halkası RIP olması için gerek ve yeter şart R nin S boyunca Dorroh genişlemesi olan D bir RIP olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki R halkası RIP olsun. $s \in S$ birimli ve $s1 \in R$ şeklindedir. $s = s1$ olmak üzere $R = \{r + s \mid (r, s) \in D\}$ şeklindedir.

$(e_1, s_1), (e_2, s_2) \in Id(D)$ için $(e_1, s_1)D(e_2, s_2) = 0$ olsun. $(e_i, s_i)^2 = (e_i^2 + 2s_ie_i, s_i^2)$ olduğundan $(e_i + s_i1)^2 = e_i^2 + 2s_ie_i + s_i^2 1 = e_i + s_i1$ R nin bir eş kare elemanıdır. $(e_1, s_1)(r, 0)(e_2, s_2) = (e_1re_2 + s_1re_2 + s_2e_1r + s_1s_2r, 0) = (0, 0)$, $(e_1 + s_11)r(e_2 + s_21) = e_1re_2 + s_1re_2 + s_2e_1r + s_1s_2r$ olduğundan $(e_1 + s_11)R(e_2 + s_21) = 0$ elde edilir. R halkası RIP olduğundan $(e_2 + s_21)R(e_1 + s_11) = 0$ olur. Dolayısıyla tüm $r \in R$ için $e_2re_1 + s_2re_1 + s_1e_2r + s_1s_2r = 0$ olarak bulunur. $(r, s) \in D$ olsun. Bu durumda $(e_2, s_2)(r, s)(e_1, s_1) = (e_2(r + s1)e_1 + s_2(r + s1)e_1 + s_1e_2(r + s1) + s_1s_2r, s_2ss_1) = (-s_1s_2s1, s_1ss_2) = (0, 0)$ şeklindedir. Çünkü son eşitlik $(e_1, s_1)D(e_2, s_2) = 0$ olmak üzere tüm $s \in S$ için $s_1ss_2 = 0$ olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla D, RIP halkadır.
Tersine D, RIP olduğunu varsayalım. $e, f \in Id(R)$ için $eRf = 0$ olsun. Buradan her $(r, s) \in D$ için $(e, 0)(r, s)(f, 0) = (e(r + s1)f, 0) = (0, 0)$ olur. D, RIP olduğundan $(f, 0)D(e, 0) = 0$ bulunur. $r \in R$ için $(f, 0)(r, 0)(e, 0) = (fre, 0) = (0, 0)$ elde edilir. Bu durumda $fRe = 0$ ve böylece R bir RIP halkadır. ■

Teorem 4.22. **[21]** R bir halka ve $n \geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. R nin RIP halka olması için gerek ve yeter şart $D_n(R)$ nin RIP halka olmasıdır.
2. R nin RIP halka olması için gerek ve yeter şart $V_n(R)$ nin RIP halka olmasıdır.
3. R nin sağ (sol) eş kare yansımalı halka olması için gerek ve yeter şart $D_n(R)$ nin sağ (sol) eş kare yansımalı halka olmasıdır.
4. R nin sağ (sol) eş kare yansımalı halka olması için gerek ve yeter şart $V_n(R)$ nin sağ (sol) eş kare yansımalı halka olmasıdır.

İspat

1. Kabul edelim ki R halkası RIP olsun. Eğer $E^2 = E = (e_{ij}) \in D_n(R)$ olacak şekilde $i = 1, \ldots, n$ için $e_{ii} = e$ ise $e_{ij} \in ReR$ şeklindedir. $E = (e_{ij}), F = (f_{kl}) \in Id(D_n(R))$ için $ED_n(R)F = 0$ olduğunu varsayalım. $D = (d_{uv}) \in D_n(R)$ olsun.

Tüm $i, u, k = 1, \ldots, n$ için $e_{ii} = e, d_{uu} = d, f_{kk} = f$ olmak üzere $e, f \in Id(R)$ ve $d \in R$ için $edf = 0$ olur. Yani $eRf = 0$ şeklindedir. R, RIP halka ve $e, f \in Id(R)$ olduğundan $fRe = 0$ bulunur. Buradan $(RfR)R(ReR) = 0$ olur. Fakat tüm i, j, k, l için $f_{kl} \in RfR$ ve $e_{ij} \in ReR$ şeklindedir. Bu $FD_n(R)E = 0$ olmak üzere i, j, k, l için $f_{kl}Re_{ij} = 0$ olduğunu gösterir. Buna göre $D_n(R)$, RIP halkadır. Tersine $D_n(R)$ bir RIP halka olduğunu varsayalım. $e, f \in Id(R)$ için $eRf = 0$ olsun.

$$E = e\sum_{i=1}^{n} E_{ii}, F = f\sum_{i=1}^{n} e_{ii} \in Id(D_n(R))$$

için $ED_n(R)F = 0$ şeklindedir. Varsayımdan $FD_n(R)E = 0$ olur. Buradan $fRe = 0$ olup R bir RIP halkadır.

2. (1) in ispatına benzer şekilde elde edilir.

3. Kabul edelim ki R sağ eş kare yansımalı halka olsun. $A_{(a_{ij})}, E^2 = E = (e_{kl}) \in D_n(R)$ için $AD_n(R)E = 0$ olsun. $D = (d_{ul}) \in D_n(R)$ için $ADE = 0$ olsun. Tüm $i, u, k = 1, \ldots, n$ için $a_{ii} = a, d_{uu} = d, e_{kk} = e = e^2$ şeklindedir. Tüm $d \in R$ için $ade = 0$ olur. Buna göre $aReR = 0$ ve $e_{kl} \in ReR$ olduğundan $d \in R$ için ade_{kl} ve ayrıca $j - i$ üzerinde $a_{ij}de = 0$ bulunur. R sağ eş kare yansımalı ve $e \in Id(R)$ olduğundan tüm i, j ler için $eRa_{ij} = 0$, yani, $ReRa_{ij} = 0$ olur. Fakat herhangi k, j için $e_{kl} \in ReR$ olup tüm i, j, k, l için $e_{kl}Ra_{ij}$ elde edilir. Bu ise $ED_n(R)A = 0$ olduğunu göstermektedir. Buradan $D_n(R)$, $n \geq 2$ için bir sağ eş kare yansımalı halkadır. Tersi (1) in ispatına benzer şekilde elde edilir.

4. (1) in ispatına benzer şekilde elde edilir.

■

Sonuç 4.23. [21] R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Bir R halkası RIP (sağ (sol) eş kare yansımalı) halka olması için gerek ve yeter şart $T(R, R)$ aşikar genişlemenin RIP (sağ (sol) eş kare yansımalı) halka olmasıdır.

2. Bir R halkasının RIP (sağ (sol) eş kare yansımalı) olması için gerek ve yeter şart $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $(x^n), x^n$ tarafından üretilen $R[x]$ in ideali olmak üzere $R[x]/(x^n)$ RIP (sağ (sol) eş kare yansımalı) halka olmasıdır.

İspat $V_n(R) \cong R[x]/(x^n)$ ve Teorem 4.22. den istenilen sonuç elde edilir. ■

Önerme 4.24. **[21]** R halkasının merkezi düzenli elemanlardan oluşan bir M kümesi çarpma işlemine kapalı olsun.

1. $M^{-1}R$, RIP halka ise R, RIP halkadır.
2. $M^{-1}R$ nin her eş kare elemanı, $u \in M$ ve $e \in Id(R)$ olmak üzere $u^{-1}e$ formatında olsun. Buna göre R halkası RIP ise $M^{-1}R$ bir RIP halkadır.

İspat

1. $M^{-1}R$ bir RIP olduğunu varsayalım. $e, f \in Id(R)$ için $eRf = 0$ olsun. Herhangi $r \in R, w \in M$ için $0 = w^{-1}erf = e(w^{-1}r)f$. $e(M^{-1}R)f = 0$ olup $M^{-1}R$ halkası RIP olduğundan $f(M^{-1}R)e = 0$ bulunur. Böylece $fRe = 0$ elde edilir. Bu ise R halkasının RIP olduğunu gösterir.
2. R halkasının RIP olduğunu varsayalım. $\alpha = u^{-1}e, \beta = v^{-1}f \in Id(M^{-1}R)$ ve $e, f \in Id(R)$ için $\alpha(M^{-1}R)\beta = 0$ olsun. M, R nin merkezi düzenli elemanlardan oluşan bir kümesi olduğundan $w^{-1}r \in M^{-1}R$ için $0 = (u^{-1}e)(w^{-1}r)(v^{-1}f) = (uwv)^{-1}(erf)$ olarak bulunur. Bu ise $eRf = 0$ olduğunu gösterir. R halkası RIP olduğundan $fRe = 0$ olur. Böylece $r \in R$ için $(uwv)^{-1}(fre) = 0$ bulunur. Bu $\beta(M^{-1}R)\alpha = 0$ olduğunu gösterir. O halde $M^{-1}R$, RIP halkadır.

■

Sonuç 4.25. **[21]** R bir halka olsun. Kabul edelim ki; $R[x;x^{-1}]$ de her eş kare eleman $f(x) \in Id(R[x])$ ve $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f(x)x^m$ formatındadır. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:

1. R bir RIP halkadır.
2. $R[x]$ bir RIP halkadır.
3. $R[x;x^{-1}]$ bir RIP halkadır.

İspat $(1) \Leftrightarrow (2)$ Teorem 4.20.(1) den istenilen sonuç elde edilir.
$(2) \Leftrightarrow (3)$ Önerme 4.24. den $M = \{1, x, x^2, \ldots\}$ şeklinde alınması durumunda istenilen sonuç elde edilir. ∎

KAYNAKLAR

[1]. Abdul-Jabbar, A. M., Ahmed, C. A. K., Kwak, T. K. and Lee, Y., 2017, On commutativity of nilpotent elements at zero, *Communications of the Korean Mathematical Society*, 32(4), 811-826.

[2]. Agayev, N., Harmancı, A. and Halıcıoğlu, S., 2010, On Abelian rings, *Turkish Journal of Mathematics*, 34, 465-474.

[3]. Al-Ezeh, H., 1987, On some properties of polynomial rings, *International Journal of Mathematical Society*, 10(2), 311-314.

[4]. Anderson, D. D. and Camillo, V., 1999, Semigroups and rings whose zero products commute, *Communications in Algebra*, 27(6), 2847-2852.

[5]. Antoine, R., 2008, Nilpotent elements and Armendariz ring, *Journal of Algebra*, 319(8), 3128-3140.

[6]. Armendariz, E.P., 1974, A note on extension of Baer and P.P.-rings, *Journal of the Australian Mathematical Society*, 18, 470-473.

[7]. Baser, M., Hong, C. Y. and Kwak, T. K., 2009, On extended reversible rings, *Algebra Colloquium*, 16, 37-48.

[8]. Bell, H. E., 1970, Near-rings in which each element is a power of itself, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2, 363-368.

[9]. Birkenmeier, G. F., Heaterly H. E. and Lee E. K., 1993, *Completely prime ideals and associated radicals*, Rings theory (Granville, OH, 1992) World Science Publications, River Edge NJ.

[10]. Cohn, P. M., 1999, Reversible rings, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 31(6), 641-648.

[11]. Dorroh, J. L., 1932, Concerning adjunclions to algebras, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 38(2), 85-88.

[12]. Habeb, J. M., 1990, A note on zero commutative and duo rings, *Mathematical Journal of Okayama University*, 32, 73-76.

[13]. Hirano, Y., 2002, On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 168, 45-52.

[14]. Jung, Y. S. and Park, K. H., 2007, On prime and semiprime rings with permuting 3-derivations, *Bulletin of Korean Mathematical Society*, 44(4), 789-794.

[15]. Kheradmand, M., Khabazian, H., Kwak, T. K. and Lee, Y., 2017, Reflexive property restricted to nilpotents, *Journal of Algebra and Its Applications*, 16(3), 20.

[16]. Kim, J. Y., 2005, Certain rings whose simple singular modules are GP-injective, *Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Mathematical Sciences*, 81(7), 125-128.

[17]. Kim, J. Y. and Baik, J. U., 2006, On idempotent reflexive rings, *Kyungpook Mathematical Journal*, 46(4), 597-601.

[18]. Kim, N. K. and Lee, Y., 2003, Extensions of reversible rings, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 185(1-3), 207-223.

[19]. Köse, H., Üngör, B. and Harmancı, A., 2016, Nil-reflexive rings, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1-Mathematics and Statistics*, 65(1), 19-33.

[20]. Krempa, J. and Niewieczerza, L. D., 1997, Rings in which annihilators are ideals and their application to semigroup rings, *Bulletin Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiqus, Astronomiques et Physiques*, 25, 851-856.

[21]. Kwak T. K. and Lee, Y., 2013, Reflexive property on idempotents, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 50(6), 1957-1972.

[22]. Kwak, T. K. and Lee, Y., 2012, Reflexive property of rings, *Communications in Algebra*, 40(4), 1576-1594.

[23]. Lambek, J., 1996, *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell Publishing Company.

[24]. Lambek, J., 1971, On the representation of modules by sheaves of factor modules, *Canadian Mathematical Bulletin*, 14, 359-368.

[25]. Lee, T. K. and Zhou, Y. Q., 2004, Armendariz and reduced rings, *Communications in Algebra*, 32(6), 2287-2299.

[26]. Liu, Z. K. and Zhao, R. Y., 2006, On weak Armendariz rings, *Communications in Algebra*, 34(7), 2607-2616.

[27]. Mayada, N. M., Areej, M. A. and Anwar, K., 2018, Trivial extension of Armendariz rings and related concept, *Journal of AL-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics* 10(3), 73-79.

[28]. Mason, G., 1981, Reflexive ideals, *Communications in Algebra*, 9(17), 1709-1724.

[29]. McCoy, N. H., 1973, The theory of rings, *Chelsea Publishing Company*, Newyork.

[30]. Motais de Narbonne, L., 1982, Anneaux semi-commutatifs et units rields anneaux dont les id aux principaux sont idempotents, *Proceedings of the 106th National Congress of Learned Societies* 71-73.

[31]. Nagata, M., 1962, *Local rings*, Interscience, New York.

[32]. Rege, M. B. and Chhawchharia, S., 1997, Armendariz rings, *Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Mathematical Sciences*, 73, 14-17.

[33]. Sherherdson, J. C., 1951, Inverses and zero-divisors in matrix ring, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(3), 71-85.

[34]. Tuganbaev, A. A., 1998, *Semidistributive modules and rings*, Mathematics and is Applications 449, Dordrecht: Springer Netherlands.

[35]. Wang, L. and Wei, J. C., 2014, Central semicommutative rings, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 45(1), 13-26.

[36]. Varma, P. L. N., 1992, On maximal polynomial and Laurent polynomial rings, *Journal of Algebra*, 148, 433-443.

[37]. Zhao, L., Zhu, X. and Gu, Q., 2013, Reflexive rings and their extensions, *Mathematica Slovaca*, 63(3), 417-430.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Havva CİRMAN
Doğum Yeri	Manisa
Doğum Tarihi	05.08.1993
Uyruğu	T.C.
Telefon	05536368645
E-Posta Adresi	havvacirman@gmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2015

Yüksek Lisans	
Üniversite	Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	2019